

A New Alternating Segment Explicit-Implicit Scheme for One Dimensional Convection-Diffusion Equation

Haiming Gu, Qian Liu

Qingdao University of Science and Technology, Qingdao
Email: guhm@ns.qd.sd.cn

Received: Sep. 10th, 2013; revised: Sep. 24th, 2013; accepted: Sep. 27th, 2013

Copyright © 2013 Haiming Gu, Qian Liu. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: A new alternating segment explicit-implicit scheme for convection-diffusion equation was given and this scheme was proved to be unconditionally stable. This scheme can be used in parallel computation and the spatial accuracy rate is $O(h^4)$. A numerical experiment shows that this scheme has high accuracy and quick ratio of convergence.

Keywords: Convection-Diffusion Equation; Finite Difference; Parallel Algorithm; Absolute Stability

一维对流扩散方程的新交替分段显隐格式

顾海明, 刘倩

青岛科技大学, 青岛
Email: guhm@ns.qd.sd.cn

收稿日期: 2013年9月10日; 修回日期: 2013年9月24日; 录用日期: 2013年9月27日

摘要: 对一维对流扩散方程给出了一组新的交替分段显隐格式, 并证明了格式无条件稳定。它可以用于并行算法且精度可以达到 $O(h^4)$ 阶。数值实验表明, 此格式具有精度高, 收敛快的特点。

关键词: 对流扩散方程; 有限差分; 并行计算; 绝对稳定

1. 引言

对流扩散方程是描述流体运动某些物理现象的一类重要的偏微分方程, 在热传导、渗流力学与粒子扩散等方面有重要应用^[1], 因此研究其数值计算方法有重要的现实意义, 开展并行差分法的研究也已成为偏微分方程数值分析的重要内容之一。在有限差分格式的并行计算研究中, D. J. Evans 中提出了求解对流扩散方程的交替分组格式^[2], 随后也出现了新的算法^[3-5], 但是这些算法的精度几乎是 $O(h^2)$ 阶的。本文在给出差分格式的基础上构造了交替显隐分段格式, 且精度可达到 $O(h^4)$ 阶, 并分析了格式的稳定性, 最后给出算例得到证实。

2. 差分格式

考虑一维对流扩散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, 0 < t < T, b > 0 \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t), 0 < t < T$$

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 < x < l$$

建立它的交替分段显隐格式。

首先对区域进行等距剖分, 令 h 和 τ 分别为空间和时间步长。设精确解为 $u(x, t)$, 定义 U_i^n 为精确解 $u(x_i, t_n) = u_i^n$ 的数值近似解, $x_i = (i-1)h, i = 1, 2, \dots, J+1$; $\tau_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, [T/\tau]$ 。特别的, 本文讨论 $h = \frac{l}{J}$ 的问题的交替显隐格式, 其中 $J = K(2L+4), L \geq 1$ 为一整数。

由泰勒展开我们能得到截断误差为 $o(\tau + h^4)$ 的显格式(2)和隐格式(2):

$$U_i^{n+1} = (1-30br)U_i^n + (arh-br)U_{i+2}^n - (arh+br)U_{i-2}^n - (8arh-16br)U_{i+1}^n + (8arh+16br)U_{i-1}^n \tag{2}$$

$$(1+30br)U_i^{n+1} - (arh-br)U_{i+2}^{n+1} + (arh+br)U_{i-2}^{n+1} + (8arh-16br)U_{i+1}^{n+1} - (8arh+16br)U_{i-1}^{n+1} = U_i^n \tag{3}$$

其中: $r = \frac{\tau}{12h^2}$ 。

在此基础上, 我们可以得到逼近方程(1)的如下四个非对称差分格式:

$$(1+7br)U_i^{n+1} - 4r(2b-ah)U_{i+1}^{n+1} + r(b-ah)U_{i+2}^{n+1} = -r(b+ah)U_{i-2}^n + 8r(2b+ah)U_{i-1}^n + (1-23br)U_i^n + 4r(2b-ah)U_{i+1}^n \tag{4}$$

$$-4r(ah+2b)U_{i-1}^{n+1} + (1+23br)U_i^{n+1} - 8r(2b-ah)U_{i+1}^{n+1} + r(b-ah)U_{i+2}^{n+1} = -r(b+ah)U_{i-2}^n + 4r(2b+ah)U_{i-1}^n + (1-7br)U_i^n \tag{5}$$

$$r(b+ah)U_{i-2}^{n+1} - 8r(ah+2b)U_{i-1}^{n+1} + (1+23br)U_i^{n+1} - 4r(2b-ah)U_{i+1}^{n+1} = (1-7r)U_i^n + 4r(ah-2b)U_{i+1}^n - r(b-ah)U_{i+2}^n \tag{6}$$

$$r(b+ah)U_{i-2}^{n+1} - 4r(2b+ah)U_{i-1}^{n+1} + (1+7br)U_i^{n+1} = 4r(2b+ah)U_{i-1}^n + (1-23br)U_i^n + 8r(2b-ah)U_{i+1}^n - r(b-ah)U_{i+2}^n \tag{7}$$

3. 新交替分段显隐格式

3.1. 新格式

对于 $J = K(4+2L)$, 在奇数时间层上, J 个网络节点按从左至右的空间分为 $2K$ 段, 并按“显式段, 隐式段, ..., 显式段, 隐式段”来构造差分格式。其中显式段包含 L 个点, 每个点上均采用式(2)计算, 所以各点可以单独的显式求解。隐式段包含 $L+4$ 个点, 采用式(4), (5), (3)⋯(3), (6), (7), 本段只能通过求解线性方程组进行求值。而在偶数时间层上, 显式段包含 L 个点, 每个点上均采用式(2)计算, 靠近边界的两个隐式段分别包含 $L+2$ 个点和 2 个点, 分别用(3)⋯(3), (6), (7)和(4), (5)计算。从而偶数时间层上的分段情况为: “隐式段, 显式段, ..., 隐式段, 显式段, 隐式段”。用线性方程组的形式表示如下:

n 为偶数时, 对 $n+1$ 层上的隐式段节点 (x_j, t^{n+1}) ; $j = i+L+1, \dots, i+4+2L$; $i = (4+2L)k, k = 0, 1, \dots, K-1$, 有如下的求解格式:

$$(1+7br)U_{i+L+1}^{n+1} - 4r(2b-ah)U_{i+L+2}^{n+1} + r(b-ah)U_{i+L+3}^{n+1} = -r(b+ah)U_{i+L-1}^n + 8r(2b+ah)U_{i+L}^n + (1-23br)U_{i+L+1}^n + 4r(2b-ah)U_{i+L+2}^n \tag{8}$$

$$-4r(2b+ah)U_{i+L+1}^{n+1} + (1+23br)U_{i+L+2}^{n+1} - 8r(2b-ah)U_{i+L+3}^{n+1} + r(b-ah)U_{i+L+4}^{n+1} = -r(b+ah)U_{i+L}^n + 4r(2b+ah)U_{i+L+1}^n + (1-7br)U_{i+L+2}^n \tag{9}$$

其中 R_L 为 $L \times L$ 的零矩阵。 $P_{L+4} + P_{L+4}^T = 2bC_{L+4}$, 而 C_{L+4} 为非负定的对称阵且 $b > 0$, 则 $G_1 + G_1^T$ 是非负定的。

$$G_2 = \begin{bmatrix} A_{L+2} & & & & \\ & R_L & & & \\ & & P_{L+4} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_L \\ & & & & & Y_2 \end{bmatrix}_{J \times J}$$

其中 $Y_2 = b \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -8 & 23 \end{bmatrix} + ah \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, 容易得出矩阵 $\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -8 & 23 \end{bmatrix}$ 是非负定的。

$A_{L+2} = bV_{L+2} + ahW_{L+2}$ 为非负定的对称阵, W_{L+2} 是一个反对称阵, 定义如下:

$$V_{L+2} = \begin{bmatrix} 30 & -16 & 1 & & & & & \\ -16 & 30 & -16 & 1 & & & & \\ 1 & -16 & 30 & -16 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -16 & 30 & -16 & 1 \\ & & & & 1 & -16 & 23 & -8 \\ & & & & & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}, W_{L+2} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -1 & & & & & \\ -8 & 0 & 8 & -1 & & & & \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \\ & & & & 1 & -4 & 0 & 4 \\ & & & & & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

而 $b > 0$ 因此 $A_{L+2} + A_{L+2}^T = 2bV_{L+2}$ 是非负定矩阵, 同理 $Y_2 + Y_2^T$ 也是非负定矩阵。又有 R_L 为零矩阵, $P_{L+4} + P_{L+4}^T$ 是非负定的, 则 $G_2 + G_2^T$ 是非负定的。

对于偶数时间层 $(n+2)$, 可以得到如下矩阵方程:

$$(I + rG_2)U^{n+2} = (I - rG_1)U^{n+1} \tag{15}$$

从而对于 $n = 0, 2, 4, \dots$, 可以得到如下完整格式:

$$\begin{cases} (I + rG_1)U^{n+1} = (I - rG_2)U^n \\ (I + rG_2)U^{n+2} = (I - rG_1)U^{n+1} \end{cases} \tag{16}$$

3.2. 稳定性分析

Kellogg 引理 设 $\theta > 0$, $(C + C^T)$ 是非负定的, 则 $(\theta I + C)^{-1}$ 必存在且:

$$\begin{cases} \left\| (\theta I + C)^{-1} \right\|_2 \leq \theta^{-1} \\ \left\| (\theta I - C)(\theta I + C)^{-1} \right\|_2 \leq 1 \end{cases} \tag{17}$$

由式(16)可以得到 $U^{n+2} = GU^n$ 。

其中 $G = (I + rG_2)^{-1}(I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}(I - rG_2)$, 记 $\bar{G} = (I + rG_2)G(I + rG_2)^{-1}$, 又有 $G_1 + G_1^T, G_2 + G_2^T$ 是非负定矩阵, 由引理可知:

$$\left\| (I - rG_i)(I + rG_i)^{-1} \right\|_2 \leq 1, i = 1, 2$$

于是 $\rho(G) = \rho(\bar{G}) \leq \|\bar{G}\|_2 \leq 1$, 因此该格式是无条件稳定的。

3.3. 截断误差

下面讨论格式的误差。令 $L_h^{(2)}$ 为算子 L 的离散形式, 所以有:

$$\begin{aligned}
 L_h^{(2)}u_i^n &\equiv \frac{1}{\tau} \left[u_i^{n+1} - (1-30br)u_i^n + (br-arh)u_{i+2}^n + (arh+br)u_{i-2}^n + (8arh-16br)u_{i+1}^n - (8arh+16br)u_{i-1}^n \right] \\
 &= \frac{1}{\tau} \left\{ \tau(u_t)_i^n + \frac{\tau^2}{2!}(u_{tt})_i^n + 12arh^2(u_x)_i^n - 12brh^2(u_{xx})_i^n - 48arh\frac{h^5}{5!}(u^{(5)})_i^n + o(\tau^3+h^6) \right\}
 \end{aligned} \tag{18}$$

相应的截断误差为:

$$L_h^{(2)}u_i^n - [Lu]_i^n = \frac{\tau}{2!}(u_{tt})_i^n - 4a\frac{h^4}{5!}(u^{(5)})_i^n + o\left(\tau^2 + \frac{h^6}{\tau}\right) \tag{19}$$

类似可得其它格式的截断误差形式如下:

$$L_h^{(3)}u_i^n - [Lu]_i^n = \frac{\tau}{2!}(u_{tt})_i^n + 12arh^2 \left[(u_{tt})_i^n + \frac{\tau}{2!}(u_{xtt})_i^n \right] - 24br\frac{h^2}{2!}(u_{xxt})_i^n + o\left(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}\right) \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 L_h^{(4)}u_i^n - [Lu]_i^n &= 3arh(u_t)_i^n + (1+3arh)\frac{\tau}{2!}(u_{tt})_i^n + r(2ah-6b)h \left[(u_{xt})_i^n + \frac{\tau}{2!}(u_{xtt})_i^n \right] \\
 &\quad - 4br\frac{h^2}{2!}(u_{xxt})_i^n + o\left(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}\right)
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 L_h^{(5)}u_i^n - [Lu]_i^n &= 3arh(u_t)_i^n + (1+3arh)\frac{\tau}{2!}(u_{tt})_i^n + (10arh-6br)h \left[(u_{xt})_i^n + \frac{\tau}{2!}(u_{xtt})_i^n \right] \\
 &\quad - 20br\frac{h^2}{2!}(u_{xxt})_i^n + o\left(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}\right)
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 L_h^{(6)}u_i^n - [Lu]_i^n &= -3arh(u_t)_i^n + (1-3arh)\frac{\tau}{2!}(u_{tt})_i^n + (10arh+6br)h \left[(u_{xt})_i^n + \frac{\tau}{2!}(u_{xtt})_i^n \right] \\
 &\quad - 20br\frac{h^2}{2!}(u_{xxt})_i^n + o\left(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}\right)
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 L_h^{(7)}u_i^n - [Lu]_i^n &= -3arh(u_t)_i^n + (1-3arh)\frac{\tau}{2!}(u_{tt})_i^n + (2arh+6br)h \left[(u_{xt})_i^n + \frac{\tau}{2!}(u_{xtt})_i^n \right] \\
 &\quad - 4br\frac{h^2}{2!}(u_{xxt})_i^n + o\left(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}\right)
 \end{aligned} \tag{24}$$

在本格式中, (4)和(6)在两层的节点 x_s , 其中 $s = i + L + 1, i + 2L + 3$; $i = (4 + 2L)k, k = 0, 1, \dots, K - 1$ 处是交替使用的, 同样式(5)和(7)在 $s = i + L + 2, i + 2L + 4$ 也是交替使用的; 其它的点处是(2)和(3)交替使用。采用这 6 个格式的节点, 我们比较如下的三组式子: 一组是式(4)在点 (x_i, t_{n+1}) 的 Taylor 展开式和式(6)在 (x_i, t_{n+1}) 的截断误差式, 另一组是式(5)在点 (x_i, t_{n+1}) 的 Taylor 展开式和式(7)在 (x_i, t_{n+1}) 的截断误差式, 最后一组是式(2)在点 (x_i, t_{n+1}) 的 Taylor 展开式和式(3)在 (x_i, t_{n+1}) 的截断误差式:

$$\begin{aligned}
 L_h^{(4)}u_i^{n+1} - [Lu]_i^{n+1} &= 3arh^2(u_t)_i^{n+1} - (1+3arh)\frac{\tau}{2!}(u_{tt})_i^{n+1} - (10arh+6br)h \left[(u_{xt})_i^{n+1} - \frac{\tau}{2!}(u_{xtt})_i^{n+1} \right] \\
 &\quad + 20br\frac{h^2}{2!}(u_{xxt})_i^{n+1} + o\left(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}\right)
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 L_h^{(5)}u_i^{n+1} - [Lu]_i^{n+1} &= 3arh^2(u_t)_i^{n+1} - (1+3arh)\frac{\tau}{2!}(u_{tt})_i^{n+1} - (2arh+6br)h \left[(u_{xt})_i^{n+1} - \frac{\tau}{2!}(u_{xtt})_i^{n+1} \right] \\
 &\quad + 4br\frac{h^2}{2!}(u_{xxt})_i^{n+1} + o\left(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}\right)
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$L_h^{(2)}u_i^{n+1} - [Lu]_i^{n+1} = -\frac{\tau}{2!}(u_{tt})_i^{n+1} - 12arh^2 \left[(u_{xt})_i^{n+1} - \frac{\tau}{2!}(u_{xtt})_i^{n+1} \right] + 24br \frac{h^2}{2!}(u_{xxt})_i^{n+1} + o\left(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}\right) \tag{27}$$

式(25)和式(23)中的第一项与第四项符号相反, 第二项与第三项部分可以抵消; 从而这两个格式在两层交替用计算时误差会抵消一部分。同样的结果对式(26)和式(24)以及式(27)和式(20)也成立。

类似可以得到, 对于每一个隐式段的最后两个以及隐格式节点, 对应于式(6), 式(7)和式(3)相应点 (x_i, t_{n+1}) 处的 Taylor 展开式, 可以得到如下截断误差:

$$L_h^{(6)}u_i^{n+1} - [Lu]_i^{n+1} = -3arh^2 (u_t)_i^{n+1} - (1-3arh) \frac{\tau}{2!}(u_{tt})_i^{n+1} - (2arh - 6br)h \left[(u_{xt})_i^{n+1} - \frac{\tau}{2!}(u_{xtt})_i^{n+1} \right] + 4br \frac{h^2}{2!}(u_{xxt})_i^{n+1} + o\left(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}\right) \tag{28}$$

$$L_h^{(7)}u_i^{n+1} - [Lu]_i^{n+1} = -3arh^2 (u_t)_i^{n+1} - (1-3arh) \frac{\tau}{2!}(u_{tt})_i^{n+1} - (10arh - 6br)h \left[(u_{xt})_i^{n+1} - \frac{\tau}{2!}(u_{xtt})_i^{n+1} \right] + 20br \frac{h^2}{2!}(u_{xxt})_i^{n+1} + o\left(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}\right) \tag{29}$$

$$L_h^{(3)}u_i^{n+1} - [Lu]_i^{n+1} = -\frac{\tau}{2!}(u_{tt})_i^{n+1} - 4a \frac{h^4}{5!}(u^{(5)})_i^{n+1} + o\left(\tau^2 + \frac{h^6}{\tau}\right) \tag{30}$$

可以看到, 式(28)和式(23)中的第一项和第四项符号相反, 第二项和第三项可以抵消一部分, 抵消之后的两层可以达到 $O(\tau h)$ 。式(29)和式(22)有同样的结果成立, 所以本格式的整体截断误差可以达到 $O(\tau h)$ 。

4. 数值实验

我们用下例做数值实验

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, 0 < t < T$$

$$u(0, t) = u(1, t), 0 < t < T$$

$$u(x, 0) = \cos(2\pi x), 0 < x < l$$

精确解为

$$u(x, t) = e^{-4\pi^2 t} \cos(2\pi(x-t)), 0 < x < 1$$

令 $h = \frac{1}{J}$, $\tau = \lambda h^2$, 计算时间为 $T = n\tau$ 的解。其中 U_i^n 为精确解 $u(x_i, t_n) = u_i^n$ 的数值近似解, $x_i = (i-1)h$, $i = 1, 2, \dots, J+1$; $\tau_n = n\tau$, 误差的 L_2 模和 L_∞ 模度量范数定义如下:

$$E_{2,\Delta x}^n = \|U_i^n - u(x_i, t_n)\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^J (U_i^n - u(x_i, t_n))^2 h \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$E_{\infty,\Delta x}^n = \|U_i^n - u(x_i, t_n)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq J} |U_i^n - u(x_i, t_n)|$$

方法的收敛率定义如下:

$$\text{收敛率} \approx \frac{\log(E_{l,\Delta x_1}/E_{l,\Delta x_2})}{\log(\Delta x_1/\Delta x_2)}, l = 2, \infty$$

求解后与 ASCN 格式进行比较, 结果如表 1 所示。由此可以看出本文的分段显隐收敛比 ASCN 格式好很多。当空间剖分不变, 网比不同时两种方法计算得到的绝对误差结果比较如图 1 所示。其中 x 方向表示空间变量, e 方向表示在某一时刻计算的绝对误差。

Table 1. The comparison of the ration of the convergence by the Scheme(16) and ASCN ($\tau = 10^{-6}, n = 10^5, T = n * \tau$)

表 1. Scheme(16)和 ASCN 收敛率的比较 ($\tau = 10^{-6}, n = 10^5, T = n * \tau$)

Scheme	J	16	32	48	72
Scheme(16)	$E_{\infty, \Delta x_1}$	2.31×10^{-5}	1.42×10^{-6}	2.85×10^{-7}	5.26×10^{-8}
	ration1	-	4.0239	3.9607	4.1675
	$E_{2, \Delta x_1}$	1.43×10^{-5}	9.64×10^{-7}	2.01×10^{-7}	3.78×10^{-8}
	ration2	-	3.8908	3.8666	4.1212
ASCN	$E_{\infty, \Delta x_1}$	1.28×10^{-3}	2.78×10^{-4}	1.25×10^{-4}	5.58×10^{-5}
	ration1	-	2.2030	1.9713	1.9892
	$E_{2, \Delta x_1}$	8.32×10^{-4}	1.72×10^{-4}	8.52×10^{-5}	4.02×10^{-5}
	ration2	-	2.2742	1.7326	1.8525

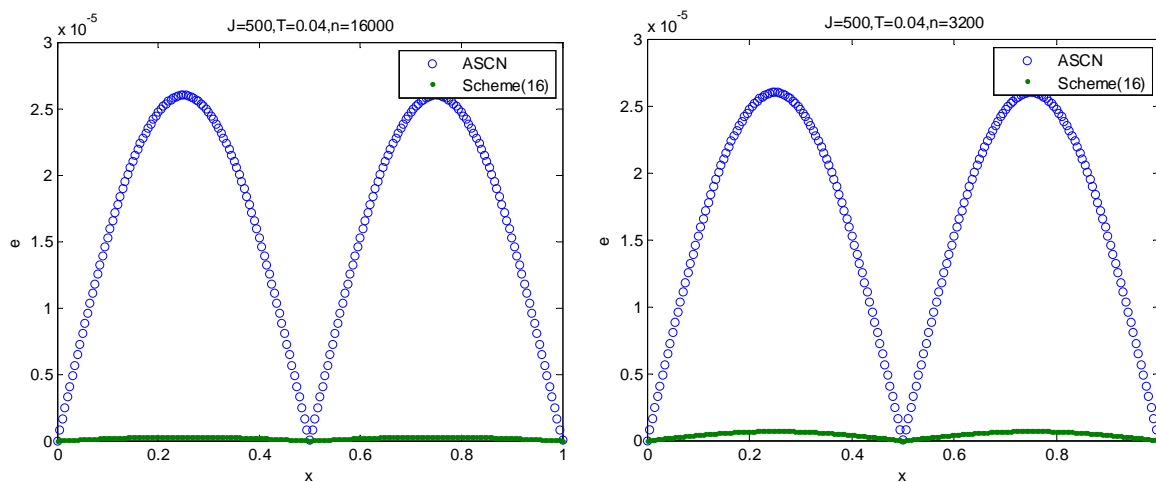


Figure 1. The absolute error of the example by Scheme(16) and ASCN
图 1. Scheme(16)和 ASCN 计算的绝对误差

从表 1 中可以清楚地看到, 无论是 L_{∞} 模还是 L_2 模, 用本文格式 Scheme(16)得到的解的误差比 ASCN 方法计算得到的相应误差精确 2 阶, 而对于迭代解关于空间的收敛速率, Scheme(16)接近 4 阶, ASCN 方法接近 2 阶。由图 1 可以看到, Scheme(16)的解的绝对误差要比 ASCN 方法的绝对误差小很多。这些数值实验的结果与其理论分析的结论是一致的, 本文格式 Scheme(16)比 ASCN 方法有更好的精度和较高的收敛速率。

参考文献 (References)

[1] 孙志忠 (2004) 偏微分方程的数值解. 科学出版社, 北京.

- [2] Evans, D.J. (1985) Alternating group explicit method for the diffusion equations. *Applied Mathematical Modelling*, **9**, 201-206.
- [3] 王文治 (2002) 对流 - 扩散方程的一类交替分组方法. *高等学校计算数学学报*, **4**, 289-297.
- [4] 左进明, 张天德 (2010) 五阶色散 KdV 方程的交替分段显 - 隐差分格式. *山东大学学报(理学版)*, **10**, 116-121.
- [5] 张守慧, 王文治 (2007) 抛物型方程的 $O(h^4)$ 精度新交替分段显隐格式. *山东大学学报(理学版)*, **12**, 1-7.