Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 333-346
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.36052 Published Online November 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Practicalities Foundations of Elementary Geometry and Its Applications

—The Produce of Geometry

Junyun Cao[1], Kai Cao[2]

[1]School of Mathematics and Information Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo
[2]School of Electrical Engineering and Automation, Henan Polytechnic University, Jiaozuo
Email: cjy@hpu,edu.cn, caokai.pds@gmail.com

Received: Aug. 12th, 2013; revised: Aug. 25th, 2013; accepted: Sep. 1st, 2013

Abstract: There is a gap between the current geometry theory and its practice applications. The point, straight line, ray, parallel line and plane in current geometry possess the character of ideal all. They are the limit of sequence of approximation point, straight line, ray, parallel line and plane separately, when the error bounds tend to zero. But the limit possesses the characteristic that could not be arrived at. Therefore, the character of only existence and ideal congruence of ideal point, straight line, ray, parallel line and plane must apply axioms to affirm them. In researching three-dimensional actual space, for ideal geometry element, the system of Euclidean geometry is suitable and necessary; but it needs a process of "negation of the negation" to apply it in reality question. Two questions of consistency of the axiom system and practice function of axioms could not be settled by the method of formal logic and the method of mathematical logic. The settlement of the two questions must apply the method of materialist dialectics.

Keywords: Point; Straight Line; Number Axis; Parallel Line; Order; Congruence

初等几何的实践性基础及其应用

—几何学的产生

曹俊云[1]，曹　凯[2]

[1]河南理工大学数信学院，焦作
[2]河南理工大学电气学院，焦作
Email: cjy@hpu,edu.cn, caokai.pds@gmail.com

收稿日期：2013 年 8 月 12 日；修回日期：2013 年 8 月 25 日；录用日期：2013 年 9 月 1 日

摘　要：现行几何理论与实践是有差距的。现行几何理论中的点、直线、平行线、射线、平面都具有理想性。它们分别是误差界趋向于零时近似点、近似直线、近似射线、近似平行线、近似平面序列的极限。极限具有不可达到的性质，所以理想点、理想直线、理想射线、理想平行线、理想平面的存在唯一性和理想合同性都需要用公理的方法去确定。在三维现实空间研究中，对于理想几何元素，欧几里德体系下的初等几何是适当的、需要的；但在应用这个理论于现实问题时，需要有一个"否定之否定"式的过程。几何公理体系的无矛盾性、公理的实际意义都是形式逻辑和数理逻辑无法解决的问题。解决这两个问题都必须使用唯物辩证法。

关键词：点；直线；数轴；平行线；顺序；合同

1. 引言

希尔伯特《几何基础》虽然给出了欧氏几何应当满足的五组公理[1]，但它还存在着以下四个问题：

1) 关于公理体系的无矛盾性问题，他们讲：“如果实数的算术运算没有矛盾，那么欧氏几何、罗氏几何就没有矛盾。”但是，哥德尔不完全定理说明：实数系的无矛盾性是数理逻辑无法解决的问题。不仅如此，三分律的反例的存在说明现行实数理论中存在着“三分律成立与否”的争论。

2) 理论的价值在于应用。从实践应用上讲，如果不补充上点、线、面的概念与公理体系如何成立的说明，那么它就无法得到应用；或者说：在实践应用之前，必须补充上点、线、面的实际意义与哪一种公理体系成立的说明。

3) 如果不给出点的区分与标志方法，就无法讨论直线上的点的介于关系与不同线段端点的区分与标志问题。

4) 亚历山大洛夫讲到：“人们许多次地画直线，然后才能够领会通过任意两点可以画一条直线这个公理”[2]，但是，人们所能点出的点决不是没有大小的，人们所能画出的直线也绝不是没有粗细的。此外，在宇宙空间研究中，被人们使用的光线不仅可以有粗细而且还可能是锥形的。对此，有人讲：“数学是一种高度的抽象”，笔者不同意这种解释。因为，“抽象时只能去掉个性，而不能去掉共性”，在不同的测量工作中，随着“误差界要求”的不同，被使用的点的大小也可以不同，但它们都是有大小的。“有大小”是测量工作中用来标志位置的“点”的共性，这种共性是不能去掉的；去掉了这种共性的数学理论就无法具体的而又正确的反映物体大小的研究工作。

经过四十多年的反复探讨，笔者发现，必须承认：1) 实践是数学理论的基础；2) 在数学理论中的基本概念阐述上，“理论与实践之间相互依赖的对立统一法则”是必须使用的基本法则。在这种指导思想下，必须以“深入联系实践”的做法去寻求与实践相联系的点、线、面概念，并提出一个能与实践联系的、能推出希尔伯特所有欧氏几何 20 条公理的公理体系。此外，本文使用的方法是“数形结合”的方法，所以文献[3]中阐述的测不准原则、无穷的基本概念与自然数的 7 条公理、实数与实数集合的公理都是本文提出的这个几何公理体系中已有的公理。本文与现行几何基础的理论的根本差别是：第一，本文以唯物辩证法为根本方法讨给出了点、线、面的定义，但现行几何学中不给出这些术语的定义与说明。第二，本文以量子力学中的测不准原理为基本原理，而他们不是。第三，在坚持无穷是无有穷尽的不使用“实无穷”观点下，无穷长直线、无穷大平面都是达不到的极限性质的理想事物。

2. 点、直线、线段合同、结合公理、度量公理与数轴的基本概念

2.1. 点的辩证概念

《初等几何学教程》中讲到：“位于直线上任何两点之间，有无穷多另外的点，这些点的集合，叫做线段。位于点 A 和 B 之间的所有点所组成的线段，记做 AB 或 BA”[4]的说法，如果说每一个点的大小是 0，那么它们就不能构成有长度的线段；如果说它们的大小不是 0，那么这种点的大小又是多少？由于线段长度是一个有限数，而线段上的点又是无穷多的，所以无论用多么小的正实数 α 表示点的大小，都存在着：无穷多个 α 不是有限数而与线段长度是有限数的矛盾。为了解决这个矛盾，首先应当给出点的如下定义。

定义 1 只有位置而没有大小的点叫做理想点；满足一定“误差界要求”的有大小但其大小可以忽略不计的点叫做近似点。设 $\left\{\varepsilon_n = \dfrac{1}{10^n}\right\}$ 为以 0 为极限的误差界序列，我们称：随着这个序列逐步得到的、能近似表达一个理想点位置的近似点序列为全能近似点列(简称为全能近似点)。

公理 1 随着误差界趋向于零，每一个全能近似点列的极限是一个唯一的理想点。

在这个公理的基础上，现行《几何基础》中的即中的公理Ⅳ2(康托尔公理)(本文下边说到的《几何基础》中

的一切叙述和公理，都是指文献[1]中的叙述和公理)将成为一条定理(参看下文 2.6 节)。

有了上述点的辩证概念，现在就可以说：“线段可以被看作是连接‘有限个’近似点构成的；但不是由理想点构成的”。采用这种线段构成的观点，就可以消除上述“点能不能构成线段的矛盾或称说不清”的问题；同理，“球体、球面也不是由理想点组成的”，因此，分球奇论等疑问也就不存在了。此外，根据公理 1，可以想到：求瞬时速度与函数变化率时需要使用极限方法。

2.2. 线段与直线的辩证概念

定义 2(全能近似直线段序列) 对于一个给定的可判断线段足够细和长度足够短(即足够直)的误差界ε和两个理想点，通过能表示这两个理想点的两个近似点间的、拉得足够紧(即足够直和足够细)的线段或发散角足够小的光束都叫做连接这两点的足够准近似现实直线段，简称为近似直线段；其中长度大于足够大数 n 的足够长近似现实直线段叫做为近似直线。对于距离无限远离着的两个理想点列，并有以 0 为极限的误差界序列$\left\{\varepsilon_n\right\}$和无限大序列$\left\{n\right\}$，随着这两个序列逐步得到的后一个直线段含有前两个理想点的，后一个比前一个线段更细、更长、拉得更紧(即更直)的近似现实直线段序列叫做全能近似直线序列，简称为全能近似直线。其中，经过任意两个确定的理想点之间的近似直线段序列叫做全能近似直线段。

公理 2(理想直线与理想直线段的极限性) 通过两个理想点的全能近似直线序列的极限是一条唯一的理想直线。其中，理想直线上任意两个不同理想点之间的部分叫做理想直线段。理想直线的长度是一个与无穷集合元素个数类似的，与延长方法有关的非正常实数+∞，但不能被看作是“非标准分析”中的实无穷大数。

由公理 2 可知，理想直线是绝对没有粗细的、没有弯曲的、无限延长着的理想事物。由于无穷序列的极限是一个无法验证的想象事物，理想直线需要用公理方法去肯定它的存在性与唯一性。有了定义 2 和公理 2，就可以得到如下的定理。

定理 1(过两点的理想直线唯一性) 对于不同的两个理想点 A、B，存在着唯一的理想直线α通过理想点 A、B。

定理 2(过两点的理想直线段的唯一性) 任意两个理想点之间的理想直线段是唯一确定的。

定理 3(理想直线与其上点的多少关系) 在每条理想直线上至少有两个理想点。

这三条定理就是现行《几何基础》中的公理I_1、I_2与公理I_3中的第一部分，不同的地方，在于我们叙述了点与直线的概念，但它们没有。

由定义 2 及公理 2 还可以看出初等几何中的一个重要性质：在所有连接两个理想点的连线中，理想直线段最短。

2.3. 点、线段概念在解释两个悖论时的应用

2.3.1. 关于飞矢不动问题的解释

芝诺(Zeno)的“飞矢不动”问题的叙述是：“任何东西占据一个与自身相等的处所时是静止的，飞着的箭在任何一个瞬间总是占据与自身相等的处所，所以它是不动的。”

仔细斟酌一下这个叙述，可以发现，这个悖论是在承认“时段是由瞬间构成”的观点下而得出的。

根据 2.1 节的段构成理论，应当说，时段只能由有大小的近似瞬间所组成，但却不能由没有大小的理想瞬间所组成。虽然可以说“任何东西占据一个与自身相等的处所时是静止的”，但“任何东西占据一个与自身相等的处所”的瞬间是没有大小的理想瞬间(或称时刻)，而理想瞬间不能构成任何有长度的时段。因此，就不能说：“飞矢是不动的”，这样，这个悖论也就不成立了。

进一步地，对于不能构成时段的、绝对没有大小的理想瞬间，无论说“飞矢”是静止的或是运动的，对飞着的箭的运动效应都没有影响。但在飞行的任何有大小的近似瞬间上，“飞着的箭”总是处于运动状态的，亦即在近似瞬时中的不同理想瞬时上，飞着的箭占据的处所不同。因而也可以讲，“飞着的箭在飞行的任何时刻

都是运动着的”，但此时的“任何时刻”是指有大小的任何近似瞬时，而不是指“不能构成时段的”没有大小的理想瞬时。

2.3.2. 关于瞬时速度的问题

将自由落体运动的表达式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 对时间 t 求导数，即可以得瞬时速度 $v=gt$ 。于是，在 $t=2$ 时的瞬时速度就为 $v=2g$ 。现在的问题是，若问：物体按照这个速度运动的时段长是不是 0 呢？很显然，这又是一个“既不能回答说是 0，又不能回答说不是 0”的、形式逻辑无法回答的问题。事实上，如果回答说是 0，那么就意味着物体没有按照这个速度运动，这显然是不对的。而如果回答说不是 0，那么它究竟等于多少呢？此时又面临着“用任何正实数表示这个时段长度都不合适，亦即不能用任何正实数去表达物体按照这个速度运动的时段长”的问题。

现在按照理想瞬时与近似瞬时两个相互依赖的概念，就可以说：1) 讨论一个没有大小的理想瞬时(即没有长度的时刻)上的运动速度是没有实际意义的；而且只有讨论有大小的近似瞬时(有长度的时段)上的运动速度才有实际意义。2) 理想瞬时(即没有长度的时刻)上的运动速度与近似瞬时(有长度的时段)上的运动速度之间有相互依赖的关系。

就这个问题来讲，$v=2g$ 是 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 在 $t=2$ 的理想意义下的导数，且这个导数为一极限。再从极限的运算过程上来看，这个 $v=2g$ 的意义，已经是近似地代表着包含 $t=2$ 的足够小时段(近似瞬时)上的运动速度。因此可以回答说：自由落体近似地按照速度 $v=2g$ 运动的时段长，是包含了 $t=2$ 的一个足够小的时段。至于绝对准确的回答方式，由于：第一，讨论一个没有长度的理想瞬时的速度没有实际意义；第二，根据测不准原理，在绝对准的要求下，$t=2$ 这个理想瞬时，是无法测定的；第三，$s=\frac{1}{2}gt^2$ 本身也不是绝对准确的表达式(事实上，根据万有引力定律，g 随 s 的变化而变化，即 g 不是常数)，所以讨论绝对准确的回答方式是没有实践意义的。量子力学中的测不准原理指出：坐标的测不准量 Δx 与速度的测不准量 Δv_x 都不能为 0，它们必须遵守测不准关系：$\Delta x\times\Delta v_x\geq\frac{h}{m}$ [5]。

2.4. 线段的近似合同与理想合同问题

定义 3 若以理想点 A、B 为端点的近似直线段与以理想点 C、D 为端点的近似直线段在某个误差界 ε 之下，经过近似的刚体移动后可以近似地叠合，则称：理想线段 AB 与理想线段 CD 是近似合同的，记作 $AB\cong CD$ 。

性质 1 近似合同是可以判定和实现的合同。

性质 2(近似合同的有限次传递性) 设

$$A_1B_1\cong A_2B_2^{\pm\frac{\varepsilon}{n}},A_2B_2\cong A_3B_3^{\pm\frac{\varepsilon}{n}},\cdots,A_nB_n\cong A_{n+1}B_{n+1}^{\pm\frac{\varepsilon}{n}},$$

则 $A_1B_1\cong A_{n+1}B_{n+1}^{\pm\varepsilon}$ (式中，符号 $\pm\frac{\varepsilon}{n}$ 、$\pm\varepsilon$ 都表示误差界)。

性质 3(近似合同的有限次可加性) 设

$$A_1A_2\cong B_1B_2^{\pm\frac{\varepsilon}{n}},A_2A_3\cong B_2B_3^{\pm\frac{\varepsilon}{n}},\cdots,A_nA_{n+1}\cong B_nB_{n+1}^{\pm\frac{\varepsilon}{n}}$$

则，$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_nA_{n+1}\cong\left(B_1B_2+B_2B_3+\cdots+B_nB_{n+1}\right)^{\pm\varepsilon}$ 。

定义 4 设 $\{\varepsilon_n\}$ 是“以零为极限”的误差界序列，对 $\{\varepsilon_n\}$ 中的任一误差界 ε_n ，在理想直线上做出与理想线段 CD 近似合同的近似线段 A_nB_n ，若 $\{A_n\}$、$\{B_n\}$ 的极限分别为理想点 A、B，则称近似线段序列 $\{A_nB_n\}$ 的极限线段 AB 为与理想线段 CD 是理想合同的理想线段。记作：$AB\equiv CD$。

根据线段长度的测不准原理，理想合同具有无法实行的性质；但根据这个定义和上述公理 1、2，以及现行教科书中的极限理论，我们可以提出下面的理想合同定理。

定理 4 1) 若 A,B 是理想直线 α 上的两个不同的理想点，又 A' 是同一条或另一条理想直线 α' 上的一个理想点，则在理想直线 α' 上 A' 的任意指定一侧有一个且只有一个理想点 B' 使 AB 与 $A'B'$ 为理想的合同现段(这就是《几何基础》中的合同公理III1)。2) 理想合同具有绝对准的无限次的传递性和无限次的“可加性”(即《几何基础》中的合同公理III2、III3 成立)。

证：对近似合同中的性质 2、性质 3，取极限立得定理第二部分。下边证明第一部分。根据定义 2.4 及近似合同的性质 1，对任意小的误差界 ε_n，我们可以在误差界 $\frac{\varepsilon_n}{2}$ 的要求下，在直线 α' 上 A' 的指定一侧找出与 AB 近似合同许多线段 $A'C_n$，这些 C_n 将被包含在一个长度小于 ε_n 的小线段内，这个小线段可以被看作一个近似点 B'_n，当 $\varepsilon_n \to 0$ 时，依照公理 1 $\{B'_n\}$ 的极限是一个唯一的理想点，这个理想点就是符合要求的理想点 B'。

定义 5 理想线段与度量单位的近似比值叫做这个理想线段或它的近似线段的近似长度。表达近似长度的数字叫做近似的正实数(这种数字可以只是正有理数)。

定义 6 误差界趋向于零时的理想线段的近似长度的极限叫做这个理想线段的理想长度。表达理想长度的数字是理想正实数(注：文献[3]中发现了实数的理想性，提出了理想实数的公理，所以这里使用理想实数这个名词，它可以用来代替现行教科书中的这个已有的名词——实数)。

理想线段的理想长度可以看作是它与度量单位的绝对准确的比值，但理想长度具有无法测出或认定的性质。在生产实践中，被人们的得到的或能够被认定的只能是近似长度。理想长度与近似长度之间具有“相互依存的对立统一性质”。

公理 3 设 AB、CD 是在误差界 δ 要求下，近似合同的两个近似线段，则一定存在着一个误差界 ε，使这两个线段在这个误差界之下近似长度是近似相等的；且当误差界 δ 可以任意小的情况下，误差界 ε 也可以任意小。

定理 5 理想合同的线段的理想长度是相等的。

2.5. 近似数轴与理想数轴

关于数轴的概念，在现行数学理论中有如下三种讲法。

1) 一般教科书(如中学教科书或高等数学)中的说法是：“在直线上，取定一个坐标原点、正方向与度量单位之后，直线上任一点 P 就能与实数构成一一对应了，有了这种一一对应关系的直线就是数轴。”

2) 几何基础教科书中的说法是：在结合公理、顺序公理、合同公理、连续公理(或称度量公理)的基础上得到“直线上所有点的有序集合与所有实数的有序集合可以建立一一对应”[1]的结论。

3) 超实数的观点：这种理论认为直线上还存在着与超实数对应的点。这种观点下的数轴概念，叫做超实数线的数轴概念。

关于这些理论，在文献[6]中评论到：“我们不要为实数的名称所愚弄，实数集纯粹是数学家的创作，它可以是也可以不是现实空间中直线的精确写照⋯⋯，我们无法识别现实空间中的直线真正是什么，它可以是超实数线、实数线或者两者都不是[6]。”

由此可见，在现行教科书与非标准分析中，关于数轴的概念不仅有矛盾，而且都与实践联系不够(或者说：缺乏实践依据)。为此，将以线段长度测量的实际情况为基础提出如下数轴定义。

定义 7(近似数轴) 在点与数的对应误差界为 1/10 情况下，可以设想在较高的精度要求下，把长度为 20 个单位的现实直线段，采用足够准的、近似的方法，将其分割成长度为 1/100 的 2000 个小线段。然后“从左至右”把第一个至第五个小线段合起来作为第一个近似现实点，并用含有一位小数的十进小数−10.0 表示它；再把第 6 个至第 15 个小线段合起来作为第二个近似现实点，用含有一位小数的十进小数−9.9 表示它，⋯⋯；把第 996 个至第 1005 个小线段合起来作为第 101 个近似现实点，用含有一位小数的十进小数 0.0 表示它，把第 1006 至第

1015 个小线段合起来作为第 102 个近似现实点，用含有一位小数的十进小数 0.1 表示它……；把最后 5 个小线段合起来作为第 201 个近似现实点，用含有一位小数的十进小数 10.0 表示它。这样做成的近似现实点与其表达数字之间所对应的误差小于 1/10，因此称：有了这种近似现实点及其对应表达数字之后的这个现实直线段是误差界为 1/10 之下的近似现实数轴，简称为近似数轴。

在“假定误差界可以无限减小而趋向于 0”的条件下，继误差界 1/10 之下的近似现实数轴之后，在“误差界”提高到 1/100 的情况下，可以将长度为 200 个单位的现实直线段在较高的精度要求下区分成长度为 1/1000 的 200000 小线段，然后“从左至右”把第一个至第五个小线段合起来作为第一个近似现实点，用含有 2 位小数的十进小数−100.00 表示它；再把……，这样就有了误差界为 1/100 的近似数轴；再继续下去，又有误差界等于 1/1000、1/10000、……之下的近似现实数轴序列。据此，又可以提出下述定义。

定义 8(全能近似数轴) 设 $\left\{\varepsilon_n = 1/10^n\right\}$ 是以 0 为极限的误差界序列，则称对应于这个序列的、近似数轴序列，为全能近似现实数轴序列，简称为全能近似数轴。

公理 4(理想数轴) 若误差界序列趋于 0，则全能近似数轴序列的极限就为一条理想数轴。

定理 6 全能近似现实数轴列定义中的所有循环和不循环无尽小数都是全能近似实数序列；它们的极限与理想实数集中的理想实数(理想实数也可以简称为实数，关于它的详细论述可参看文献[3]或文献[7])是“一一对应的”。

公理 5 (理想数轴的完备性公理) 根据理想实数的完备性定理与理想实数表示线段理想长度的完备性，我们可以提出如下的公理：在理想数轴上，除了与理想实数集中的理想实数“一一对应”的理想点之外，没有其它理想点。

定理 7 在一条理想直线上，当线段的起点与方向确定时，线段的终点与线段是“一一对应的”。

定理 8 任何理想直线都可以成为理想数轴。

根据定理 6 数轴上的理想点与实数集中的理想实数之间存在着“一一对应”关系，但应当知道这种关系具有理想性。根据公理 4、5，非标准分析中的实无穷小数与实无穷大数都是不能提出的数。

将上述理想数轴概念与现行《几何基础》教科书中的数轴概念相比较，可以说：两者是完全一样的；但从这些概念的提出过程来看，两者又是不一样的。前者是在可实际操作的“有限多近似实数及其‘一一对应’的近似点”的基础上，经过取极限方法得到的；而后者则是通过理想的合同公理、顺序公理和连续公理用逻辑推理方法得出的。在实际问题研究中，前者可以按照取极限以前的近似形式得到应用，而后者从严格意义上讲是无法得到应用的。为此，我们称前者的“一一对应”为“具有实践性质的以‘有穷方法、近似方法’为基础的一一对应”，而后者的“一一对应”为“缺乏实践性质的、纯理想性质的一一对应”。纯理想的研究方法已经招致了许多怪定理和难题，所以应当提出我们的一一对应方法。在此还需要指出：理想点依赖于有大小的近似点，所以可以提出理想点的邻域系，从而可以建立讨论邻接性、连续性的拓扑空间理论。

有了理想数轴的概念，就可以有实践根据地规定：理想数轴上满足$1 \le x \le 2$ 的理想实数对应的理想点的集合叫做线节[1,2]。人们还可以规定：这个线节的长度为 $2 - 1 = 1$，但不能说这个长度是由这些理想点构成的。

2.6. 理想直线上理想点之间的介于概念与顺序公理、度量公理

现行《几何基础》中的“介于”概念与顺序公理、度量公理，涉及到理想直线上的理想点的区分。因此，在讨论这些公理的意义之前，首先需要给出理想点的区分和表达方法。现在，有了前述的理想依赖于近似的数轴概念，就有了这种区分和表达方法，因此就可以去讨论这些问题了。

定义 9 设 A、B、C 是表示理想直线上三个不同理想点的理想实数，若 A、B、C 之间成立关系：$A < B < C$ 或 $C < B < A$，则称理想点 B 介于 A、C 之间，或称理想点 B 介于 C、A 之间。

有了这个定义，很容易将顺序公理 II_1、II_2、II_3 改写为定理。至于公理 II_4(巴士公理)，根据三角形是“没有空隙的简单闭折线”的性质，也是很容易被理解的。我们将保留这个公理并称它为公理 6。现行教科书中的

两条度量公理可以改写为下边的两个定理。

定理 9 设 AB 和 CD 是任意两个理想线段，那么在理想射线 AB 上存在着有限多个理想点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$，它们是这样地排列着：点 A_1 在 A 与 A_2 之间，点 A_2 在 A_1 与 A_3 之间等等；并且理想线段 $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ 都与 CD 理想合同；理想点 B 在理想点 A 与 A_n 之间。

证：取理想点 A 为坐标原点，线段 CD 为度量单位，A 向 B 的方向为数轴的正方向，按照做出理想数轴的方法，可以使“半直线”AB 上的一切理想点与一切正理想实数构成“一一对应”的关系。因此，理想点 B 所对应的正实数，必小于许多正整数；这些正整数中的任何一个所对应理想点都可以作为这样的 A_n。

定理 10 若能以数字(有理数或无理数)表达其端点的线段(或称区间)序列 $\{[A_n, B_n]\}$ 或 $\{(A_n, B_n]\}$、$\{[A_n, B_n)\}$、$\{(A_n, B_n)\}$ 满足条件：$\{A_n\}$、$\{B_n\}$ 为相互等价的收敛数列，则这些区间序列都是全能近似现实点列，而且它们的绝对准极限为同一个理想点。

证：根据新实数的理论(参看文献[3]中的实数公理及实数的完备性与区间套定理)可知，$\{A_n\}$、$\{B_n\}$ 的极限为同一理想实数；再根据我们的定义 1、公理 1 以及前述理想数轴的概念，可知：这个定理确实是成立的。

这个定理不仅包含了公理Ⅳ$_2$(即康托尔公理)中“每一线段都落在前一个线段内部”的情形，而且还包含不具有这一性质的其它情形。例如：线段序列 $\{[1/n+1, 1/n]\}$ 也能确定一个全能近似现实点列 $X=0^+$和理想点 $X=0$。

3. 面、射线、角与角的度量问题

3.1. 面、平面和属于的概念

类似于点的问题，虽然作为物体的表面的曲面可以看作是没有厚度的，但由于“绝对准研究”的不可能性，我们也需要提出近似曲面、近似距离与近似平面的概念。

定义 10 针对物体厚度测量的误差界 ε，现实空间中厚度为足够小而长、宽不为足够小的物体叫做近似曲面。当厚度趋向于 0 时，近似曲面的极限叫做理想曲面。例如铁皮、球壳、纸张、薄板都可以看作近似曲面；任何物体的表面都可以被看作理想曲面。

定义 11 连接两个理想点之间的近似直线段的近似长度叫做这两点间的近似距离；随着以 0 为极限的误差界序列的变化而逐渐精确的近似距离的极限叫做这两个理想点之间的绝对准的理想距离。

定义 12 理想点 A 到理想直线(或理想曲面)上各个理想点之间的近似距离的“最小数”叫做 A 到这个理想直线(或理想曲面)的近似距离；随着以 0 为极限的误差界序列的变化而逐渐精确的近似距离的极限叫做它们之间的绝对准的理想距离。

定义 13 若：理想点 A 与理想点 B 之间的近似距离为针对误差界的足够小，则称 A 与 B 近似重合；若：理想点 A 与理想点 B 之间的理想距离为 0，则称 A 与 B 为理想的绝对准重合。

定义 14 若：理想点 A 到理想直线(曲面)α 之间的近似距离为针对误差界的足够小，则称：理想点 A 近似属于理想直线(曲面)α；若：理想点 A 到理想直线(曲面)α 之间的理想的绝对准理想距离为 0，则称理想点 A 为绝对准的理想的属于理想直线(曲面)α。

公理 7(结合公理Ⅰ$_3$的后一部分) 现实空间中至少存在着三个理想点不在一条理想直线上。

有了这个公理，就可以讨论平面的概念了。对于平面，由于在现实世界中不存在“完成了的实无穷意义”平面，所以对于平面，也需要提出理想与近似两种相互依赖的术语；在叙述这两个术语之前我们先看一个事实。

对于任意给定的不在同一条理想直线上三个理想点 A、B、C，和判断平面厚度与直线宽度的误差界 ε，当把理想线段 BC 分割成许多足够小线段之后，通过理想点 A 与这些小线段的端点的理想连线就可以把“AB、AC 两条理想直线所夹的对顶角区域”分割成许多较小的对顶角区域。对于任何确定的足够大研究区域，只要每个“小角域”的角度是足够小，这些“小角域”就可以被看作近似的现实射线(射线的定义将在下文中叙述)。同样，对于理想直线 CA、CB 和理想直线 BA、BC“所夹的对顶角角域”也是如此。

将这个事实，反过来，类似于近似点可以构成线段的说法，我们完全可以说：当不在同一条理想直线上的三个理想点和判断平面厚度和直线宽度的误差界给定之后，人们能够使用近似现实射线去构造足够大的近似平面块。

定义 15 设$\{\varepsilon_n\}$为以 0 为极限的误差界序列，则对其中的误差界ε_n，我们称“按上述思想构建的足够大近似平面块”为近似平面；并称这样得到的后一个比前一个更薄的、范围更大的近似平面序列叫做全能近似平面序列。

公理 8 全能近似平面序列的极限是一个唯一的理想平面。

根据定义 15 和公理 8 立刻可以得到下边的定理。

定理 11 1) 理想平面被不在同一条理想直线上的三个理想点，唯一地决定；2) 理想平面上的任意两个理想点之间的理想直线段全部在这个理想平面上(这个定理就是现行《几何基础》中的公理I_4、I_5、I_6的内容)。

与理想点、理想直线类似，理想平面具有无法被人们构成的性质；但近似平面是可以被人们构成的。理想平面与近似平面之间也存在着相互依赖的对立统一关系。

为了公理系统的完备性，对于现实空间的描述，我们再补充下面两个公理。

公理 9 若两个理想平面α、β有公共的理想点A，则它们至少还有一个公共理想点B。这个公理就是《几何基础》中的公理I_7。

公理 10 现实空间中至少存在着四个理想点，不在同一个理想平面上。这条公理就是《几何基础》中的公理I_8。

这两条公理的依据是：根据实践，现实空间具有的三维性。

3.2. 射线、角和角的合同概念

现行《几何基础》在角的度量问题中谈到：“角度大小的确定与线段长度大小的确定方法相同，但是并不需要再引进新的公理，因为我们可以由直线的戴德金(R. Dedekind)原理导出角的戴德金命题[1]。”针对这个论述，笔者考察了这个文献中的角的戴德金命题的证明。发现在这个命题的证明中应用了$\angle AOB$ 内部的射线与直线段AB上的点之间的“一一对应”的方法。他们的这个证明，有以下两个问题：第一，“无实践性的‘一一对应’方法”已经引起了许多怪定理和难题(例如：分球奇论与连续统的大难题)；第二，在他们的这个证明中，有一个图 1 所示的图形，由此图可知：若$OA \equiv OB$，$AM_1 \equiv M_1M_2$，则$\angle AOM_1 \neq \angle M_1OM_2$。这说明：使用“无实践性的‘一一对应’方法”能够造成“合同的角可以不相等”的怪事。关于这个怪事，还可以进一步说明如下：设$\angle AOB = 60^\circ$，$\angle AOM_1 = \angle M_1OM_2 = \angle M_2OB = 20^\circ$，$AO = BO$，则显然成立$AM_1 \neq M_1M_2$，这说明：合同的两个角$\angle AOM_1$、$\angle M_1OM_2$，对应的两个线段长$AM_1$、$M_1M_2$不等长；因此，这个戴德金命题的证明有缺点。这个缺点是：如果按照一一对应的方法从线段长度的度量得出角度大小的度量，就会造成上述怪事。为此，我们需要根据实践提出“近似射线”、“近似角”、“理想角”以及“角的合同”概念与公理如下。

定义 16 对于一个确定的误差界ε和两个理想点A、B，从表达理想点A的近似点出发的，经过理想点B的足够长的发散角为足够小的光束或有一定发散角的锥形线段叫做从理想点A出发的、指向B的近似射线；对于

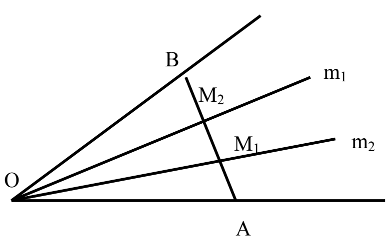

Figure 1. One to one correspondence on point to angle
图 1. 点与角的一一对应

“以零为极限”的误差界序列$\{\varepsilon_n\}$，从理想点A出发的经过理想点B的发散角越来越小的近似射线序列叫做从理想点A出发的指向理想点B的全能近似射线序列。

公理11 从理想点A出发的指向B的全能近似射线序列的极限是一条唯一的从理想点A出发的指向理想点B的理想射线，记作$\xrightarrow[AB]{}$。

需要说明的问题有三个：1) 这个公理与理想点、理想直线一样存在着这个极限能不能达到的问题。2) 与近似直线的定义比较一下，可以发现：近似射线有一定的发散角，而近似直线的发散角可以是变化着的；在距离点A的有限范围内，近似射线可以看作近似直线；但在无限远处，由于近似射线有一定的发散角，所以随着离出发点的距离的无限增大，近似射线的宽度是无限增大的；3) 理想射线的发散角是0，理想直线的宽度必须是0。这说明：理想射线可以被认为一条“半理想直线”。

定义17 设在误差界ε之下，有一个从理想点O发出的两条近似射线h,k，则称h,k所在的近似平面上，从射线h转向k或从射线k转向h时经过的近似平面部分叫做以O为顶点的以h,k为边的“近似角”；若射线h,k是从理想点O发出的理想射线，则称h,k所在的理想平面上，从射线h转向k或从射线k转向h时经过的理想平面部分叫做以O为顶点的、以h,k为边的“理想角”；记做$\angle(h,k)$或$\angle(k,h)$，也可简记为$\angle o$。

定义18 设：理想平面α上有一个理想平面图形，(例如：理想角$\angle(h,k)$)在一定误差界的近似意义下经近似性刚体性运动后与理想平面α上或另一个理想平面α'上的理想平面图形(例如：理想角$\angle(h',k')$)近似的叠合，则称两个理想平面图形(例如理想$\angle(h,k)$与$\angle(h',k')$)是近似合同的。

定义19 设：理想平面α上有一个理想角$\angle(h,k)$，对于“以零为极限”误差界序列$\{\varepsilon_n\}$中的任一误差界ε_n都可以经近似性刚体运动后与理想平面 α 上或另一个理想平面α'上的理想角$\angle(h_n',k_n')$近似的叠合，又设$\angle(h_n',k_n')$的极限为理想角$\angle(h',k')$，则称$\angle(h_n',k_n')$的极限$\angle(h',k')$与$\angle(h,k)$是相互理想合同的角。

关于“角的合同”问题也需要进行类似于线段合同的讨论。第一，需要从“角的近似合同的存在性”及“近似合同的有限次传递性和有限次可加性”出发，经过取极限提出角的理想合同的“存在唯一性与无限次传递性和无限次可加性”三条定理；其中，第一条定理就是现在的《几何基础》中的合同公理III4；第二条、第三条为角的理想合同的“无限次传递性和无限次可加性”定理。第二，类似于数轴的提出，需要经过角的近似度量再取极限的办法去得出理想实数与理想射线的“有实践基础的一一对应性质”。关于这个性质的得到需要提出类似与公理1的前述的公理11。

有了理想实数与理想射线间的“有实践基础一一对应”性质之后，在推导角的戴德金命题时，不仅可以不用那个能够引起怪论的“理想集到理想集的理想的一一对应”方法，而且在我们这种叙述方法下，还把理想合同与近似合同连结起来了。

在此还需要指出以下两点：1) 在现行几何基础教科书中，“角与角”之间合同的传递性和“可加性”都依赖于公理III_5，但在我们这里依赖于近似合同的取极限方法。2) 在我们这里，平面图形的合同概念依赖于图形的叠合工作；两个绝对准叠合的三角形就是全等的三角形。在这个概念下，公理III_5可以改写为下边的定理。

定理12 在两个三角形ΔABC与$\Delta A'B'C'$中，若：$AB \equiv A'B'$，$AC \equiv A'C'$，$\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$，则$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$与$\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$。

证：根据角的理想合同概念与两个理想点之间理想线段的唯一性，可以得到：$BC \equiv B'C'$，于是在理想的绝对准要求下，两个三角形是相互叠合的，即$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$。再根据三角形理想的绝对准合同的性质，可以得到：$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$与$\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$。

4. 平行线的概念与有关平行线的公理与定理

4.1. 近似平行线的定义及性质

由于无穷大理想平面是“还在不断扩大着的理想事物”，所以在现行几何理论中的“在同一平面内两条不

想交的直线叫做平行线”定义下，经过“直线外一点只存在一条平行线”的问题不仅无法通过实践验证，而且也无法用逻辑方法证明，为此我们先提出如下的定义。

定义 20 在理想平面的足够大有限范围内，在理想的绝对准相交意义下不相交的两条理想直线叫做近似平行线。

定理 13 设 A 为理想直线 L 外的任一的理想点，再设 A 到理想直线 L 的距离为一个“非零的”正实数 d，则对半径大于 d 的，以 A 为中心的任意足够大理想平面块，至少存在两条在此平面块内与理想直线 L 不相交的近似平行线。

证：如图 2 所示，设理想直线 L 与此直线外的理想点 A，以及以 A 为中心的足够大理想平面块的半径已经确定；再设以 A 为中心的这个大圆与理想直线 L 的绝对准理想交点为 B、C，则经过理想点 A、B 与经过理想点 A、C 的两条理想直线 L_1、L_2 就是过点 A 的与 L 近似平行的近似平行线；此外，理想直线上线段 BC 的任一外点与点 A 决定的理想直线也都是近似平行线，所以定理是成立的。

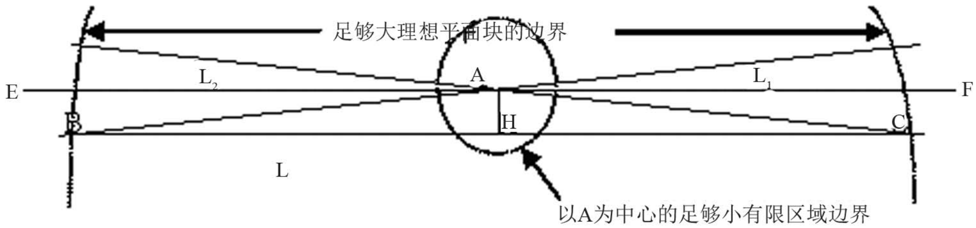

Figure 2. Ideal parallel line and its approximately parallel lines
图 2. 理想平行线与它的近似平行线

定义 21 我们称“图 2”中的理想直线 L_1、L_2 为临界近似平行线；其它的近似平行线叫做超近似平行线；$\angle BAH$、$\angle CAH$ 为临界平行角；$d = AH$ 叫做平行距。

性质 1 存在着以 A 为圆心的足够小有限区域，在此区域内这些临界近似的和超近似平行理想直线合起来在误差界 δ 的允许之下可以被看作是这个足够小区域研究时的一条近似的现实的平行直线。这种近似现实平行线做法也是解决生产实际问题时，一个从理论上讲，可以实行的(但实际上不好用的)做法。

性质 2 性质 1 中的那一条近似的现实平行直线是一个由许多近似平行直线组成的对顶角区域；在离 A 足够远处，这条近似现实平行线(即这个对顶角区域)，总要与理想直线 L 相交。

性质 3 参看图 2，设 AE，AF 是两条从 A 发出的与 AH 构成直角的两条理想射线，则上述对顶角区域是从 A 发出的这两条理想射线的两条近似射线。

4.2. 欧几里德意义的平行线概念与有关这种平行线的定理

定理 14(欧氏几何中的平行线公理的依据) 设 A 为理想直线 L 外的一个任意理想点，参看图 2，H 为 A 到理想直线 L 的垂足，B，C 为直线上的两个动点，则 $HB \to \infty, HC \to \infty$ 时，两条理想直线 L_1、L_2 所构成的含有超近似平行线的两个对顶角域的极限为两条理想射线 AE、AF。

证：根据理想射线的公理 11，可知：这两个对顶角域的近似射线的极限分别是理想射线 AE、AF。

定义 22 上述两条理想射线的结合体叫做过 A 的欧几里得意义的绝对准的理想平行线，简称为理想平行线或简称为欧几里得平行线。

应当指出：由于理想射线可以被认为是一条半理想直线，所以这里说的欧几里得平行线也可以被认为是一般的理想直线。我们的平行线定义与几何基础中公理Ⅴ中的平行线定义相同：公理Ⅴ中的平行线说的是：平行线在它决定的平面上不相交，我们也可以这样说。

定理 15 在理想平面的任意大有限范围内的研究中，设 A 为理想直线 L 外的任意一个理想点，且它到理想

直线 L 的距离不为无限大(参看图 2)，则经过 A 的理想直线 L 的欧几里得平行线只能有一条。

定理 16 理想平面内两条理想直线互为欧几里得平行线的充要条件是：若它们在理想平面的任意大有限范围内与第三条直线相交，则内错角相等、同位角相等，同一侧的两个内角互补(证明从略)。

推论：有限范围内的任意三角形的三个内角和等于两直角。

定理 17 理想平面内两条理想直线在任意大有限范围内与第三条理想直线相交，若第三条理想直线一侧的两内角之和小于二直角，则前两条理想直线必在理想平面的有限范围内相交于第三直线的这一侧。

证 参看的图 3，设$\angle ABD+\angle BAC<$二直角，作直线 AE 垂直 BD，则

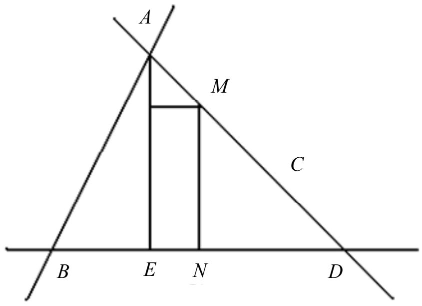

Figure 3. The fifth postulate
图 3. 第五公设

$$\alpha = \angle CAE = \angle BAC - \angle BAE < \pi - \angle ABD - \angle BAE = \pi/2 \text{。}$$

即：$\alpha < \pi/2$ 。

在直线 BD 上取理想点 N，并作 BD 的垂线 NM 交直线 AC 于 M，则有：$NM = AE - EN \cdot \mathrm{ctg}\alpha$ 。

由于α 的大小是一定的，故当 EN 足够大时总有 NM 为负值，这就表明：直线 AC 与 BD 相交。定理获证。

说明 1：这个定理就是欧几里得的“第五公设”。这个公设的证明问题不仅争论了两千多年，罗巴切夫斯基与希尔伯特都没有解决这个问题。从我们的讨论来看，只有从实践出发，在弄清无穷、点、直线、射线的概念之后，才可以通过定义 22、定理 15、16，17 及其推论解决这个问题。我们的讨论说明：针对我们所说的理想直线、理想平面、理想平行线概念，在现实空间中成立的只能是欧氏几何；非欧几何只是在近似意义下，把球面、伪球面上某种曲线解释为直线时才能说明其价值的几何。因此，欧氏几何理论是最重要的、基础性质的几何理论。

说明 2：如果承认康托尔(Cantor, G.)的“实无限”观点，即承认鲁宾逊(Robinson, A)“非标准分析”中的“存在着无穷多实无穷大数、实无穷小数”的观点，我们还可以说：定理 15 中的直角是一个“单子”。这个单子是与$\dfrac{\pi}{2}$之差为“无穷小数”的许多数组成的；而且还可以说：理想点 B 的极限是包含许多无穷大数的集合；因此，与理想直线 L 平行的理想平行线也可以有无穷多。但是，在绝对准要求下，线段长度的测不准性是必须承认的事实；角度的测量问题也是如此。在这些事实下，理想实数以及它与理想射线一一对应的关系已经是无法实现的理想了。所以，我们不需要“非标准分析”中的“实无穷小数”；也不需要在理想的绝对准的要求下接受罗巴切夫斯基的平行线公理。这就是说：笔者的实数公理(参看文献[3])与定理 15 的论断以及欧氏几何理论都是适当的理论。

说明 3：还可以说：罗巴切夫斯基几何理论和康托尔(Cantor)的实数理论(或我们的实数公理)有矛盾。事实上，对于罗巴切夫斯基几何，文献[1]111 页中的定理 5 讲到：“在两条平行直线之一上的点沿平行方向移动时，此点到另一条直线的距离将连续变小，并且以零为极限”。罗巴切夫斯基几何中的这个定理说明：如果承认康托尔的实数理论，即承认以 0 为极限的基本数列是 0 的代表，那么就可以讲：平行角小于直角的罗巴切夫斯基

平行线与被平行的直线是相交的直线。这就是说：康托实数理论与罗巴切夫斯基几何之间有矛盾。

5. 圆与圆周长的定义与计算问题

关于圆周的定义，在《初等几何学教程》[4]中给出的定义是："一些点与某点 O 所连接的线段，都等于同一线段，所有这样的点的集合叫做圆周"。那么"点"又是如何定义和解释的呢？在希尔伯特的《几何基础》中并没有给出"点"的解释，而在欧几里得的《几何原本》中则认为"点是没有部分的"，没有部分能不能理解为没有大小呢？那么没有大小的点，又是如何构成有长度的曲线呢？另一方面，虽然人们也可以说，圆周是到定点的距离不变的、动点的运动轨迹，但运动一定是平稳的吗？可见，这个圆周的定义也是不完善的。此外，仅仅从这些定义出发无法得出圆周长的计算公式。为此，这里将给出圆周的如下定义与公理、定理。

定义 23(近似圆周) 在理想平面上，把一个定点 O 所发出的且夹角相等的、各个射线上到定点 O 的距离为 r 的点，用直线段依次连接起来所构成的多边形，叫做近似圆周；在射线上的这些点处均作垂线，由这些垂线依次两两相交所构成的多边形也叫做近似圆周。其中，定点 O 叫做圆心，距离 r 叫做圆的半径。

公理 12(理想圆周) 当射线夹角无限减小并趋于 0 时，定义 23 中两种近似圆周的极限都叫做理想圆周。

定理 18 从圆心发出的所有射线上与圆心距离为半径的理想点都在理想圆周上，这种点的集合是一个无穷集合。

根据理想点的公理性定义，这个定理是显然成立的。根据这个定理，理想圆周上存在着一个理想点的无穷集合，但由于没有大小的点的集合不能构成有长度的线段，所以不能说这个无穷集合构成了理想圆周。

定理 19(圆的内接、外切正多边形) 定义 23 中的第一种近似圆周是理想圆周的内接等边多边形，第二种近似圆周则为理想圆周的外切等边多边形。

证：定理的第一部分是显然的。对于第二部分，根据"切线是割线的极限"的现行教科书中的定义，可知从圆心出发的射线上，距离圆心为半径的点上且垂直于半径的垂线就是理想圆周的切线，所以，第二种近似圆周即为外切等边多边形。

显然，具有极限性质的理想圆周上理想点的集合是一个不可得到的理想集合，因此仅仅根据定理 18，理想圆周长仍无法计算。但从公理 12 可以看出，我们能够把理想圆周长视看作为：当最大边长无限缩小而趋向于 0 时的、内接多边形或外切多边形周长的极限。这不仅说明了理想圆周长与近似圆周长之间具有相互依赖的辩证关系，而且也给出了理想圆周长的计算方法。

据此，再根据《初等几何学教程》[4]中的"被环抱的凸折线短于环抱凸折线"的定理，就可以说"理想圆周长大于已知圆周的所有内接正多边形周长，且同时小于这个圆周的所有外切正多边形周长"。

有了上述理想圆周长的概念与性质，现在就可以应用求极限的"夹逼准则"，或者只用内接(外切)多边形周长的极限去计算圆周长。具体计算方法是：首先把圆心角分为 n 等份，即得到 n 条射线；然后以这些射线与圆的交点为切点，作圆的外切多边形；再把从圆心出发的射线与圆相交的、两两相邻的交点连接起来，即为圆的内接多边形；最后当 $n \to \infty$ 时，这两个多边形周长序列的极限值，就是理想圆的周长。

从上述定义还可以看到，圆周是凸多边形顶点到定点相等的、边长无限缩小凸多边形序列的极限；这个序列就叫做理想圆周的全能近似圆周，序列中边长足够短的凸多边形叫做足够准近似圆周。这样，就说明了恩格斯的话"在一定条件下直线和曲线是一回事"是正确的。事实上，在准确到整数的条件下，可以把"内接正六边形"看作近似圆周，这时就得到"周三径一"的结果；在准确到一位小数的情况下，可以把"内接正 12 边形"看作近似圆周，这时就得到 $\pi = 3.1$ 的结果；即使在准确到 50 万位小数的情况下，也可以把圆周长近似地看作内接正多边形的周长。

6. 几何理论应用中的"否定之否定式"过程

由于欧几里得几何各个公理中的点、线、面都是理想的。所以，这个理论的应用中，必须有一个"否定之

否定”式的过程。例如：在计算无法直接丈量的 A、B 两点间的距离时，如图 4 所示，可以在其附近先直接丈量出从它的一点(例如 A)引出的一个适当的线段 AC，并测出 AC 的长度及$\angle BAC$、$\angle BCA$ 的大小。这三个数据的测定不能做到绝对准，但由于几何理论是绝对准性质的，所以我们必须在否定这些数据的误差(这是第一次否定)的情况下使用几何理论算出线段 AB 的长度。虽然根据实数理论与三角理论，人们可以算出这个长度是一个绝对准的理想实数，但由于我们无法在“绝对准要求下使理想实数与实践”联系起来，而且原始数据就不是绝对准的，所以又必须将这个绝对准的计算结果看作近似的(这是第 2 次否定)。由此可以得出结论说：不讲误差的几何理论在解决生产实际问题的应用中具有“一过性”；而且还必须知道：在解决这个实际问题时，对于原有的数据的精确性需要使用了前后两次“否定”；这种做法叫做“否定之否定式”方法。

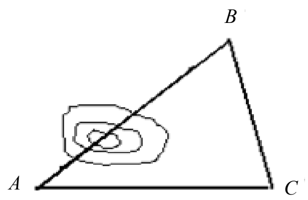

Figure 4. The application of geometry
图 4. 几何学的应用

7. 初等几何的基本研究方法

在前文中，我们给希尔伯特的《几何基础》补充了：1) 点、线、面的概念的阐述；2) 各个公理如何成立的阐述；3) 几何理论如何应用的阐述。从这三个问题的阐述中，我们可以看出：不讲误差的欧几里得几何理论在解决生产实际问题时的作用是“一过性”的；它们的理想性几何元素在与实际结合时必须换为对应的近似几何元素。

从前边谈到的“点有没有大小呢”的问题，可以看出：在只讲理想几何元素的现有几何理论中，存在着“点有没有大小”的无法解说的问题。这个问题应当说是现行几何公理体系中的一个矛盾。从这个矛盾可以看出，我们必须承认：现实线段不是由理想点构成的。只要承认这一点，无法解决的“分球奇论”问题就不存在了。这说明：不讲误差的形式逻辑推导在应用上应当有个限度。同时也说明：实践是检验真理的唯一标准。任何理论的价值在于它能不能与生产实际结合，能不能解决生产实际问题。现在我们已经说明了欧氏几何是误差界趋向于零时近似情形的极限，而且也说明了它在近似代替条件下可以得到应用的道理；几千年来的生产实践也证实了欧几里得几何是有用的，所以欧氏几何是应当被接受的几何理论；但是这个理论应用时，少不了近似方法。

最后应当指出：形式化研究方法不仅无法建立无矛盾性的几何理论，而且也无法说明这个理论与生产实际的关系；“实践是理论的基础”、“对立统一”法则是阐述点、线、面概念和各个公理如何成立问题时必须遵守的法则；任何理论都需要在继续的实践中不断改进，已有的几何理论不仅是可以改革的而且是必须改革的；不改革就不能如实地、恰当地反应实践，也不能消除那些不应有的矛盾。

8. 结论

1) 初等几何中的点、线、面、射线、平行线都是需要使用极限概念提出的理想性事物；2) 欧几里德公理体系是对理想几何元素成立公理体系；罗巴切夫平行线公理是只对近似平行线才成立的公理。

参考文献 (References)

[1] 李云普 (1990) 任国朝, 编. 几何基础. 高等教育出版社, 北京, 53, 54, 59, 111.
[2] 孙小孔 (1963) 裘光明, 译. A. Д. 亚历山大洛夫, 著. 数学——它的内容、方法和意义. 科学出版社, 北京, 24.

[3] 曹俊云 (2009) 杨键辉, 合著. 全能近似分析数学理论基础及其应用. 北京中国水利水电出版社, 北京, 19-42.
[4] 马忠林, 译 (1955) Д.И.ПЕРЕПЁЛКИН, 著[苏]. 初等几何学教程. 高等教育出版社, 北京, 4-5, 39, 141.
[5] 黄宏荃, 彭灏, 译 (1979) [苏]B. И. 瑞德尼克, 著. 量子力学史话. 科学出版社, 北京, 87-90.
[6] H. Jerome Keisler, 著[美] (1976) Elementary calculus. *Printed in the United States of America*, **1**, 28.
[7] 曹俊云, 曹凯 (2012) 无穷的概念与实数理论问题. 理论数学, **4**, 207-215.