Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 379-387
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.36058 Published Online November 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Boundedness of Solutions for a Class of Second-Order Periodic Systems

Shunjun Jiang

College of Sciences, Nanjing University of Technology, Nanjing
Email: jiangshunjun@njut.edu.cn

Received: Sep. 27th, 2013; revised: Oct. 8th, 2013; accepted: Oct. 11th, 2013

Abstract: In this paper, we study the following second-order periodic system: $x''+V'(x)+p(t)|x|^{\alpha}=F_x(x,t)$ where $V(x)$ has a singularity. Under some assumptions on the $V'(x)$, $p(x,t)$, $F_x(x,t)$ by Ortega small twist theorem (Lemma 9), we obtain the existence of quasi-periodic solutions and boundedness of all the solutions.

Keywords: Boundedness of Solutions; Singularity; Small Twist Theorem

一类二阶微分方程的解的有界性

江舜君

南京工业大学理学院，南京
Email: jiangshunjun@njut.edu.cn

收稿日期：2013 年 9 月 27 日；修回日期：2013 年 10 月 8 日；录用日期：2013 年 10 月 11 日

摘　要：本文我们将研究下面的二阶周期系统：$x''+V'(x)+p(t)|x|^{\alpha}=\mathrm{F}_x(x,t)$，其中 $V(x)$ 含有一个奇点。通过 Ortega 的小扭转定理(引理 9)，对 $V'(x)$ 和 $p(x,t),F_x(x,t)$ 做恰当的假设，我们得到拟周期解的存在性，从而得出所有解的有界性。

关键词：解的有界性；奇点；小扭转定理

1. 引言

最近，Capietto, Dambrosio 和 Liu[1]研究以下方程：

$$x''+V'(x)=F(x,t), \tag{1.1}$$

$F(x,t)=p(t)$ 是以 π 为周期的函数，并且 $V(x)=\frac{1}{2}x_+^2+\frac{1}{\left(1-x_-^2\right)^{\nu}}-1$，$x_+=\max\{x,0\}$，$x_-=\max\{-x,0\}$，$\nu$ 是正整数。在 Lazer-Leach 假设下

$$1+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}p(t_0+\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta>0,\ \ \forall t_0\in R,$$

他们用 Moser 扭转定理证明了周期解的有界性与存在性。

受到[2-6]的启发，我们发现在(1.1)中的 $F(x,t)=p(t)$ 光滑且有界的。本文将研究，当 $F(x,t)$ 无界时，(1.1)的所有解是否能够有界。

我们研究一下方程：

$$x''+V'(x)+p(t)|x|^{\alpha}=F_x(x,t), \tag{1.2}$$

$$V=\frac{1}{2}x_+^2+\frac{1}{1-x_-^2}-1,\ \ x>-1 \tag{1.3}$$

我们有 Lazer-Leach 条件满足：

$$\int_0^{\pi}p(t_0+\theta)(\sin\theta)^{1+\alpha}\,\mathrm{d}\theta>0,\ \ \forall t_0\in R. \tag{1.4}$$

本文主要结论是：

定理 1 如果(1.3)，(1.4)满足，(1.2)每一个解 $x(t)$ 都是有界的，亦即 $\sup\limits_{t\in R}\left(|x(t)|+|x'(t)|\right)<+\infty$ 。

注：下文将对定理 1 进行证明，我们将把(1.2)转化成一个近可积哈密顿系统，通过一系列的技巧，将这个近可积系统中的主项与小项分离出来，使它们的估计能够满足 Ortega 的小扭转定理(Lemma 9)的条件，从而得到拟周期解的存在性，进而可以得出所有解的有界性。

2. 定理的证明

观察到(1.2)等价以下的 Hamiltonian 系统

$$x'=\frac{\partial H}{\partial y},\ y'=-\frac{\partial H}{\partial x}\ , \tag{2.1}$$

其中 Hamiltonian 函数

$$H(x,y,t)=\frac{1}{2}y^2+V(x)+\frac{p(t)}{\alpha+1}|x|^{\alpha}x-F(x,t)$$

为了便于研究，我们先研究辅助方程：

$$x'=y,\ y'=-V'(x), \tag{2.2}$$

它是由 Hamiltonian 函数组成的可积 Hamiltonian 系统。

$$H_1(x,y,t)=\frac{1}{2}y^2+V(x)\ ,$$

其中封闭曲线 $H_1(x,y,t)=h>0$ 是(2.2)的积分曲线。

当 x 满足在 $-1<-\alpha_h<0<\beta_h$ 时，$V(-\alpha_h)=V(\beta_h)=h$ 。易得，

$$I_0(h)=2\int_{\alpha_h}^{\beta_h}\frac{1}{\sqrt{2(h-V(s))}}\mathrm{d}s,\ \ \forall h>0$$

$$T_0(h)=I_0'(h)=2\int_{\alpha_h}^{\beta_h}\frac{1}{\sqrt{2(h-V(s))}}\mathrm{d}s,\ \ \forall h>0\ 。$$

通过直接计算我们有

$$I_0(h)=2\int_0^{\beta_h}\sqrt{2(h-V(s))}\mathrm{d}s+2\int_{-\alpha_h}^{0}\sqrt{2(h-V(s))}\mathrm{d}s=\pi h+2\int_0^{\alpha_h}\sqrt{2(h-V(-s))}\mathrm{d}s,$$

因此

$$T_0(h) = \pi + \int_0^{\alpha_h} \frac{1}{\sqrt{2(h - V(-s))}} \mathrm{d}s.$$

我们还有

$$I_0(h) = I_-(h) + I_+(h),\ T_0(h) = T_-(h) + T_+(h),$$

其中

$$I_-(h) = 2\int_0^{-\alpha_h} \sqrt{2(h - V(s))} \mathrm{d}s,\ I_+(h) = \pi h\ ,\ \ T_-(h) = 2\int_0^{-\alpha_h} \frac{1}{\sqrt{2(h - V(-s))}} \mathrm{d}s,\ T_+(h) = \pi.$$

类似[1]中的证明，我们有函数 I_- 和 T_- 的估计：

引理 1 我们有

$$h^n \left| \frac{\mathrm{d}^n T_-(h)}{\mathrm{d}h^n} \right| \le Ch^{-\frac{1}{2}}$$

$$h^n \left| \frac{\mathrm{d}^n I_-(h)}{\mathrm{d}h^n} \right| \le Ch^{\frac{1}{2}}$$

其中 $n = 0,1,\cdots,6,\ \ h \to +\infty$ 。以下我们用 C, C_0, C_0' 来代指某些常数。

我们将把方程化为规范型。为此，我们定义生成函数

$$S(x, I) = \int_C \sqrt{2(h - V(s))} \mathrm{d}s\ ,$$

其中 C 是封闭曲线 Γ_h 点 (x, y) 连接 y 轴的一部分。

我们定义映射 $(\theta, I) \to (x, y)$，其中

$$y = \frac{\partial S}{\partial x}(x, I),\ \ \theta = \frac{\partial S}{\partial I}(x, I),$$

是辛的，因为

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \wedge (S_{xx}\mathrm{d}x + S_{xI}\mathrm{d}I) = S_{xI}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}I,\ \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}I = (S_{Ix}\mathrm{d}x + S_{II}\mathrm{d}I) \wedge \mathrm{d}I = S_{Ix}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}I.$$

通过上面的讨论，我们很容易得到

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{T_0(h(x,y))}\left(\dfrac{T_-(h(x,y))}{2} + \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2(h(x,y))}} \right), & x > 0, y > 0 \\ \dfrac{\pi}{T_0(h(x,y))}\left(\dfrac{T_-(h(x,y))}{2} + \pi + \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2(h(x,y))}} \right), & x > 0, y < 0 \\ \dfrac{\pi}{T_0(h(x,y))}\left(\displaystyle\int_{-\alpha_h}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\left(h(x,y) + 1 - (1 - s^2)^{-1}\right)}} \mathrm{d}s \right), & x < 0, y > 0 \\ \dfrac{\pi}{T_0(h(x,y))}\left(T_0(h(x,y)) - \displaystyle\int_{-\alpha_h}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\left(h(x,y) + 1 - (1 - s^2)^{-1}\right)}} \mathrm{d}s \right), & x < 0, y < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

并且

$$I(x,y)=I_0\left(h(x,y)\right)=2\int_{-\alpha_h}^{\beta_h}\sqrt{2\left(h(x,y)-V(s)\right)}\mathrm{d}s. \tag{2.4}$$

在新的变量(θ,I)下，系统(2.1)变为

$$\theta'=\frac{\partial H}{\partial I},\ I'=-\frac{\partial H}{\partial \theta}, \tag{2.5}$$

其中

$$H(\theta,I,t)=\pi h_0(I)+\pi\frac{p(t)}{\alpha+1}|x|^{\alpha}x-\pi F\left(x(I,\theta),t\right), \tag{2.6}$$

令$\Psi(\theta,I,t)=\pi P\left(x(I,\theta),t\right)-\pi F\left(x(I,\theta),t\right)$。

为了估计$\Psi(\theta,I,t)$，我们需要估计函数$x(I,\theta)$。

引理 2 当I足够大并且$-\alpha_h\le x<0$，以下给出不等式成立：

$$\left|I^n\frac{\partial^n x(I,\theta)}{\partial I^n}\right|\le c\sqrt{I},\ 0\le n\le 6.$$

[1]给出了证明，为了简洁起见，我们略去证明。

我们现在研究 Hamiltonian 系统(2.5)，注意到

$$I\mathrm{d}\theta-H\mathrm{d}t=-\left(H\mathrm{d}t-I\mathrm{d}\theta\right).$$

这就意味着如果能求出(2.6)中以θ和t作为参数的函数$H(\theta,I,t)$中的I，

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\partial I}{\partial t}(t,H,\theta),\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\partial I}{\partial H}(t,H,\theta), \tag{2.7}$$

仍然是一个 Hamiltonian 系统，其中作用变量、角变量、时间变量分别是H、t、θ。

从(2.6)和引理 1，我们有

$$\frac{\partial H}{\partial I}\to 1,\ I\to+\infty.$$

因此，我们假设I可以写成

$$I=I_0\left(\frac{H}{\pi}+R(H,t,\theta)\right),$$

其中R满足$|R|<\dfrac{H}{\pi}$。已知h_0是I_0的反函数，我们有

$$\frac{H}{\pi}+R(H,t,\theta)=h_0(I),$$

所以

$$R(H,t,\theta)=\Psi\left(x(I,\theta),t\right).$$

因此，R被定义为

$$R(H,t,\theta)=\Psi\left(x\left(\left(\frac{H}{\pi}+R(H,t,\theta)\right),\theta\right),t\right) \tag{2.8}$$

我们需要以下引理对 R 进行估计。

通过引理 4，和[1]中的引理 2.3 一样，我们得到下面的引理。

引理 3 函数 $R(H,t,\theta)$ 满足下面的估算：

$$\left|\frac{\partial^{m+l}R(H,t,\theta)}{\partial H^m \partial t^l}\right| \le H^{\frac{\alpha+1}{2}},\quad m+l \le 6$$

通过隐函数定理，存在一个函数 $R_1 = R_1(t,H,\theta)$ 满足

$$R(H,t,\theta) = \Psi(x(H,\theta),t) + R_1(H,t,\theta)$$

故我们有

$$\begin{aligned} R_1(H,t,\theta) &= R(H,t,\theta) - \Psi(x(H,\theta),t) \\ &= \Psi\left\{x\left[I_0\left(\frac{H}{\pi}+R(H,t,\theta)\right),\theta\right],t\right\} - \Psi(x(H,\theta),t) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\left\{x\left[H+s(\pi R+I_-),\theta\right],t\right\}\cdot\frac{\partial x}{\partial I}\left(H+s(\pi R+I_-),\theta\right)\cdot(\pi R+I_-)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

通过引理 1 和引理 5，我们得到对 $R_1(H,t,\theta)$ 的估算。

引理 4 $\left|\frac{\partial^{k+l}R_1(H,t,\theta)}{\partial^k H \partial^l t}\right| < H^{\frac{\alpha}{2}}$，$k+l<6$，为了对 $I\left(\frac{H}{\pi}+R\right)$ 进行估计，我们需要对 $I_-\left(\frac{H}{\pi}+R\right)$ 的估计。由引理 1，注意到 $|R| < \frac{H}{\pi}$，我们有以下引理：

引理 5 $\left|\frac{\partial^{k+l}I_-\left(\frac{H}{\pi}+R\right)}{\partial^k H \partial^l t}\right| < H^{\frac{1}{2}}$，$k+l \le 6$，

现在新 Hamiltonian 函数 $I = I(t,H,\theta)$ 写为下面的形式

$$\begin{aligned} I = I_0\left(\frac{H}{\pi}+R\right) &= I_+\left(\frac{H}{\pi}+R\right) + +I_-\left(\frac{H}{\pi}+R\right) \\ &= H + \pi R(H,t,\theta) + I_-\left(\frac{H}{\pi}+R\right) \\ &= H + \pi\Psi(x(H,\theta),t) + R_1(H,t,\theta) I_-\left(\frac{H}{\pi}+R\right) \end{aligned}$$

系统(2.7)可写为下面形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\partial I}{\partial H} = 1 + \pi\dfrac{\partial x}{\partial H}(H,\theta)\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(x(H,\theta),t) + \dfrac{\partial R_1}{\partial H}(H,t,\theta) + \dfrac{\partial I_-}{\partial H}(H,t,\theta) \\ \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{\partial I}{\partial t} = -\pi\dfrac{\partial \Psi}{\partial t}(x(\theta,H),t) - \dfrac{\partial R_1}{\partial t}(t,H,\theta) - \dfrac{\partial I_-}{\partial t}(H,t,\theta) \end{cases} \tag{2.9}$$

引入一个新的变量 $\rho \in [1,2]$ 和一个参数 ε，其中 $H = \varepsilon^{-2}\rho$。然后有 $H \gg 1 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon \ll 1$。因此，系统(2.9)变为下面的形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\partial I}{\partial H} = 1 + \pi\dfrac{\partial x}{\partial H}(H,\theta)\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(x(H,\theta),t) + \dfrac{\partial R_1}{\partial H}(H,t,\theta) + \dfrac{\partial I_-}{\partial H}(H,t,\theta) \\ \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{\partial I}{\partial t} = -\varepsilon^2\left[\pi\dfrac{\partial \Psi}{\partial t}(x(\theta,H),t) + \dfrac{\partial R_1}{\partial t}(H,t,\theta) + \dfrac{\partial I_-}{\partial t}(H,t,\theta)\right] \end{cases} \tag{2.10}$$

它仍然是一个 Hamiltonian 系统，其中

$$\Gamma(t,\rho,\theta;\varepsilon)=\rho+\pi\varepsilon^{-2}\Psi\left(x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right),t\right)+\varepsilon^{-2}R_1\left(\varepsilon^{-2}\rho,\theta,t\right)+\varepsilon^{-2}I_-\left(\varepsilon^{-2}\rho,.\theta,t\right)$$

很明显如果 $\varepsilon\ll 1$，(2.10)的解 $\left(t\left(\theta,t_0,\rho_0\right),\rho\left(\theta,t_0,\rho_0\right)\right)$ 和初始解 $\left(t_0,\rho_0\right)\in R\times[1,2]$ 在区间 $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho\left(\theta,t_0,\rho_0\right)\in\left[\frac{1}{2},3\right]$ 有定义。所以，(2.10)的庞加莱映射在定义域 $R\times[1,2]$ 是有定义的。

我们假设(2.10)的解和初始条件 $\left(t(0),\rho(0)\right)=\left(t_0,\rho_0\right)$ 是以下形式

$$t=t_0+\theta+\varepsilon^{1-\partial}\sum\nolimits_1\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right),\ \ \rho=\rho_0+\varepsilon^{1-\alpha}\sum\nolimits_2\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right)$$

然后，(2.10)的庞加莱映射就为

$$P:t_1=t_0+2\pi+\varepsilon^{1-\alpha}\sum\nolimits_1\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right),\ \ \rho_1=\rho_0+\varepsilon^{1-\alpha}\sum\nolimits_2\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right)$$

其中 $\sum_1$ 和 $\sum_2$ 满足

$$\begin{cases}\sum_1=\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_0^\theta\frac{\partial x}{\partial H}\left(\varepsilon^{-2}\rho,\theta\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho,\theta\right),t\right)\mathrm{d}\theta+\varepsilon^{\alpha-1}\int_0^\theta\left(\frac{\partial R_1}{\partial H}\left(\varepsilon^{-2}\rho,t,\theta\right)+\frac{\partial I_-}{\partial H}\left(\varepsilon^{-2}\rho,t,\theta\right)\right)\mathrm{d}\theta\\ \sum_2=-\pi\varepsilon^{\alpha+1}\int_0^\theta\frac{\partial\Psi}{\partial t}\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho,\theta\right),t\right)\mathrm{d}\theta-\varepsilon^{\alpha+1}\int_0^\theta\left(\frac{\partial R_1}{\partial t}\left(\varepsilon^{-2}\rho,t,\theta\right)-\frac{\partial I_-}{\partial t}\left(\varepsilon^{-2}\rho,t,\theta\right)\right)\mathrm{d}\theta\end{cases}\tag{2.11}$$

其中 $t=t_0+\theta+\varepsilon^{1-\alpha}\sum_1$， $\rho=\rho_0+\varepsilon^{1-\alpha}\sum_2$。通过引理 4，6，7，我们知道

$$\left|\sum\nolimits_1\right|+\left|\sum\nolimits_2\right|\le C,\theta\in[0,2\pi]\tag{2.12}$$

因此，对于 $\rho_0\in[1,2]$，我们可以令 ε 足够小，从而有

$$\rho_0+\varepsilon\sum\nolimits_2\ge\frac{\rho_0}{2}\ge\frac{1}{2}\tag{2.13}$$

而且，我们可以证明

$$\sum\nolimits_1,\sum\nolimits_2\in O_6(1)\tag{2.14}$$

类似于计算 R_1 的方法，通过直接计算我们可以得到结果。

引理 6 以下是计算方法：

$$\frac{\partial x}{\partial H}\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho,\theta\right),t\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial H}\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho_0,\theta\right),t_0\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\in\varepsilon^{-\alpha}O_6(1),$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho,\theta\right),t\right)-\frac{\partial\Psi}{\partial t}\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho_0,\theta\right),t_0\right)\in\varepsilon^{2-\alpha}O_6(1)$$

现在我们给出(2.9)庞加莱映射的渐进表示式，也就是当 $\varepsilon\to 0$ 时，我们研究的函数 $\sum_1$， $\sum_2\ (\theta=\pi)$。为了计算 $\sum_1$ 和 $\sum_2$，我们需要引入以下定义和引理。

令

$$\Theta_+(I)=meas\left\{\theta\in[0,\pi],x\left(H_0,\theta\right)>0\right\},\qquad\Theta_-(I)=T_0-\Theta_+(I),$$

其中 $H_0=\varepsilon^{-2}\rho_0$。

引理 7

$$\Theta_+(I)=\pi+\varepsilon O_6(I),\qquad\Theta_-(I)=\varepsilon O_6(1)$$

证明. 这个引理在[1]中有证明，所以我们略去证明。

为了计算 $\sum_1$ 和 $\sum_2$，我们先要求出 x 和 x_H。我们记得当 $x<0$，我们有

$$\left|x\left(H_0,\theta\right)\right|=O_6\left(1\right),\quad \left|x_H\left(H_0,\theta\right)\right|=\varepsilon^2 O_5\left(1\right)$$

当 $x>0$，通过定义 θ，我们有

$$\arcsin\frac{x\left(H_0,\theta\right)}{\sqrt{2h}}=\frac{T_0\left(h\right)}{\pi}\theta-\frac{T_-\left(h\right)}{2}=\theta+\varepsilon^2 O_5\left(1\right)$$

从而有

$$x\left(H_0,\theta\right)=\sqrt{\frac{2H_0}{\pi}}\sin\theta+O\left(1\right),\quad x_H\left(H_0,\theta\right)=\sqrt{\frac{1}{2H_0\pi}}\sin\theta+\varepsilon^2 O_5\left(1\right)$$

这样，我们就得到了对 $\sum_1$ 和 $\sum_2$ 的估算。

引理 8 以下有

$$\sum\nolimits_1\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right)=\left(\frac{\pi}{2\rho_0}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}}\int_0^{\pi}\left(\sin\theta\right)^{1+\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+o_6\left(1\right),$$

$$\sum\nolimits_2\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right)=-\pi^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(2\rho_0\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\int_0^{\pi}\left(\sin\theta\right)^{1+\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+o_6\left(1\right)$$

其中 $\varepsilon\to 0$。

证明. 首先我们求 $\sum_1$，通过引理 6,7 和(2.14)，我们有

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right)&=\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_0^{\pi}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\varepsilon^{-2}\rho,\theta\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho,\theta\right),t\right)\mathrm{d}\theta\\&\quad+\varepsilon^{\alpha-1}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial R_1}{\partial H}\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho,\theta\right),t\right)+\frac{\partial I_-}{\partial H}\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho,\theta\right),t\right)\right)\mathrm{d}\theta\\&=\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_0^{\pi}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\varepsilon^{-2}\rho_0,\theta\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho_0,\theta\right),t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+\varepsilon^{\alpha}O_6\left(1\right)\\&=\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_{\Theta_+}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\varepsilon^{-2}\rho_0,\theta\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho_0,\theta\right),t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta\\&\quad+\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_{\Theta_-}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\varepsilon^{-2}\rho_0,\theta\right)p\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho_0,\theta\right),t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+\varepsilon^{\alpha}O_6\left(1\right)\end{aligned}$$

通过引理 4 的结论 2，当 $\varepsilon\to 0,x\to\infty$ 时，我们有

$$\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_{\Theta_+}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\varepsilon^{-2}\rho_0,\theta\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho_0,\theta\right),t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta=\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_{\Theta_+}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\left|x\right|^{\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+o_6\left(1\right)\tag{2.15}$$

由 Θ_- 的定义，我们有

$$\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_{\Theta_-}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\varepsilon^{-2}\rho_0,\theta\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\left(x\left(\varepsilon^{-2}\rho_0,\theta\right),t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta=\varepsilon^{\alpha}O_6\left(1\right).\tag{2.16}$$

由(2.15)和(2.16)，我们有

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right)&=\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_{\Theta_+}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\left|x\right|^{\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+o_6\left(1\right)\\&=\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_0^{\pi}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\left|x\right|^{\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+o_6\left(1\right)\\&=\left(\frac{\pi}{2\rho_0}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_0^{\pi}\left(\sin\theta\right)^{\alpha+1}p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+o_6\left(1\right)\end{aligned}$$

类似可以证明，$\sum_2\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right)=-\pi^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(2\rho_0\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\int_0^{\pi}\left(\sin\theta\right)^{1+\alpha}p'\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+o_6\left(1\right)$，这样，引理 8 就得到了证明。

令

$$\Psi_1\left(t_0,\rho_0\right)=\left(\frac{\pi}{2\rho_0}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_0^{\pi}\left(\sin\theta\right)p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta,$$

$$\Psi_2\left(t_0,\rho_0\right)=-\frac{1}{\alpha+1}\pi^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(2\rho_0\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\int_0^{\pi}\left(\sin\theta\right)^{1+\alpha}p'\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

然后，存在两个函数 Φ_1 和 Φ_2 使得(2.16)中的庞加莱映射有以下形式

$$P:t_1=t_0+2\pi+\varepsilon^{1-\alpha}\Psi_1\left(t_0,\rho_0\right)+\varepsilon^{1-\alpha}\Phi_1,\ \rho_1=\rho_0+\varepsilon^{1-\alpha}\Psi_2\left(t_0,\rho_0\right)+\varepsilon^{1-\alpha}\Phi_2,$$

其中 $\Phi_1,\Phi_2\in o_6\left(1\right)$。

由于 $\int_0^{\pi}p\left(t_0+\theta\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta>0,\forall t_0\in R$，我们有

$$\Psi_1>0,\quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial\rho_0}\neq 0.$$

令

$$L=\frac{\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{\int_0^{\pi}\left(\sin\theta\right)^{1+\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta}$$

然后有

$$\frac{\partial L}{\partial t_0}\Psi_1\left(t_0,\rho_0\right)+\frac{\partial L}{\partial\rho_0}\Psi_2\left(t_0,\rho_0\right)=0$$

其他 Ortega 定理(见附录)的假设很容易得到证明。因此，在环面 $\left(t_0,\rho_0\right)\in S^1\times\left[1,2\right]$ 上，存在一个不变曲线 P 使得初始方程(1.4)有界。这样定理 1 就得到了证明。

3. 致谢

本文由国家自然基金青年基金资助，基金号 11301263。

参考文献 (References)

[1] Capietto, A., Dambrosio, W. and Liu, B. (2009) On the boundedness of solutions to a nonlinear singularoscillator. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **60**, 1007-1034.

[2] Morris, G.R. (1976) A case of boundedness of Littlewood's problem on oscillatory differential equations. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **14**, 71-93.

[3] Levi, M. (1991) Quasiperiodic motions in superquadratic time-periodic potential. *Communications in Mathematical Physics*, **143**, 43-83.

[4] Liu, B. (1989) Boundedness for solutions of nonlinear Hill's equations with periodic forcing terms via Moser's twist theorem. *Journal of Differential Equations*, **79**, 304-315.

[5] Kunze, M., Kupper, T. and Liu, B. (2001) Boundedness and unboundedness of solutions for reversible oscillatorsat resonance. *Nonlinearity*, **14**, 1105-1122.

[6] Liu, B. (2005) Quasiperiodic solutions of semilinear lienard reversible oscillators. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **12**, 137-160.

[7] Ortega, R. (1999) Boundedness in a piecewise linear oscillator and a variant of the small twist theorem. *Proceedings London Mathematical Society*, **79**, 381-413.

附录

介绍引文[7]中的扭转定理

引理 9[Ortega 定理]

定义 $A=\mathbb{S}^1\times[a,b]$ 有封面 $\mathbb{A}=\mathbb{R}\times[a,b]$ 是一个有限的柱面。$\mathbb{A}$ 用 (T,V) 表示，考虑到映射 $\bar{f}:A\to\mathbb{S}\times\mathbb{R}$。

我们假设映射有交叉点。假设 f： $A\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，$(T_0,V_0)\to(T_1,V_1)$ 是 $\bar{f}$ 的具体形式

它的形式如下

$$\begin{cases}T_1=T_0+2N\pi+\delta l_1(T_0,V_0)+\delta\tilde{g}_1(T_0,V_0)\\ V_1=V_0+\delta l_2(T_0,V_0)+\delta\tilde{g}_2(T_0+V_0)\end{cases}\tag{1}$$

其中 N 是整数，$\delta\in(0,1)$ 是参数。函数 $l_1,l_2,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2$ 满足

$$\begin{aligned}&l_1\in C^6(A),l_1(T_0,V_0)>0,\frac{\partial l_1}{\partial V_0}(T_0,V_0)>0,\forall(T_0,V_0)\in A\\ &l_2(\cdot,\cdot),\tilde{g}_1(\cdot,\cdot,\varepsilon),\tilde{g}_2(\cdot,\cdot,\varepsilon)\in C^5(A)\end{aligned}\tag{2}$$

此外，我们假设有一函数 $I:A\to R$ 满足

$$I\in C^6(A),\frac{\partial I}{\partial V_0}(T_0,V_0)>0,\ \forall(T_0,V_0)\in A\tag{3}$$

并且

$$l_1(T_0,V_0)\cdot\frac{\partial I}{\partial T_0}(T_0,V_0)+l_2(T_0,V_0)\cdot\frac{\partial I}{\partial T_0}(T_0,V_0)=0,\ \forall(T_0,V_0)\in A\tag{4}$$

而且，假设有两个数 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 且 $a<\tilde{a}<\tilde{b}<b$，有

$$I_M(a)<I_m(\tilde{a})\le I_M(\tilde{a})<I_m(\tilde{b})\le I_M(\tilde{b})<I_m(b)\tag{5}$$

其中

$$I_M(a)=\max_{\rho\in S^1}I(\rho_0,T_0),\ I_m(r)=\min_{\rho\in S^1}I(\rho_0,T_0)$$

那么，存在 $\varepsilon>0,\Delta>0$，如果 $\delta<0$ 且

$$\|\tilde{g}_1(\cdot,\cdot,\varepsilon)\|C^5(A)+\|\tilde{g}_2(\cdot,\cdot,\varepsilon)\|C^5(A)<\varepsilon$$

映射 $\bar{f}$ 在 Γ_A 中有不变环面，常数 ε 与 δ 无关。