Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 347-353
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.36053 Published Online November 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Existence and Multiplicity of Positive Solutions for a Fourth-Order Two-Point Boundary Value Problem*

Li Yu

College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing
Email: bloodwolf0828@126.com

Received: Sep. 3rd, 2013; revised: Sep. 17th, 2013; accepted: Sep. 24th, 2013

Abstract: In this paper, using the lower and upper solution methods and the topological degree theory, we study the fourth-order two-point boundary value problem $u^{(4)}(t)=\varphi(t)f(u(t))$, $t\in(0,1)$, $u(0)=\lambda$, $u(1)=0$, $u''(0)=u''(1)=0$ with nonhomogeneous boundary condition, where $\lambda>0$ is a parameter, $\varphi(t)\in C([0,1],[0,+\infty))$, $f\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$. Under a weaker condition on f, we obtain the existence of a positive solution and multiple positive solutions for this class of problems.

Keywords: Two-Point Boundary Problem; Positive Solutions; Lower and Upper Solutions; Topological Degree

一类四阶两点边值问题正解的存在性与多解性*

余　立

南京航空航天大学理学院，南京
Email: bloodwolf0828@126.com

收稿日期：2013 年 9 月 3 日；修回日期：2013 年 9 月 17 日；录用日期：2013 年 9 月 24 日

摘　要：本文讨论非线性四阶两点边值问题 $u^{(4)}(t)=\varphi(t)f(u(t))$, $t\in(0,1)$, $u(0)=\lambda$， $u(1)=0$， $u''(0)=u''(1)=0$。正解的存在性与多解性，其中 $\varphi(t)\in C([0,1],[0,+\infty))$， $f\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$， $\lambda>0$ 为参数。运用上下解方法和拓扑度理论，在非线性项满足较弱条件时，获得了上述问题正解及多个正解的存在性。

关键词：两点边值问题；正解；上下解方法；拓扑度

1. 引言

四阶常微分方程边值问题是熟知的刻画弹性梁状态的数学模型，在弹性力学和工程物理中有着广泛的应用。因此，非线性四阶常微分方程边值问题正解的存在性备受众多学者关注，见文献[1-4]。但这些结果都是在齐次边界条件下获得的，而实际问题中采用的数值计算方法，数据难免会有些误差，因此考虑带非齐次边界条件的常微分方程边值问题对解决实际问题具有重要意义。

*基金项目：国家自然科学基金资助项目(11172125)。

文献[5]研究了问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=f(u(t)), t\in(0,1), \\ u(0)=u''(0)=u''(1)=0, u(1)=\lambda, \end{cases} \tag{1.1}$$

当正参数λ变化时正解的存在性，其中$f\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$。证明了在$f$连续且非减的条件下，若$\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{f(u)}{u}=0$且$\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}=\infty$，$\exists\lambda^*>0$，当$0<\lambda<\lambda^*$时，问题(1.1)至少存在两个正解；当$\lambda=\lambda^*$时，问题(1.2)至少存在一个正解；当$\lambda>\lambda^*$时，问题(1.2)无正解。若$\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}=0$，对$\forall\lambda\in(0,+\infty)$，问题(1.1)至少存在一个正解。

受以上启发，本文运用上下解方法[6]、Schauder 不动点定理[7]以及拓扑度理论[8]讨论非齐次边界条件的四阶常微分方程边值问题

$$u^{(4)}(t)=\varphi(t)f(u(t)), t\in(0,1), u(0)=\lambda, u(1)=0, u''(0)=u''(1)=0, \tag{1.2}$$

当正参数λ变化时正解的存在性和多解性。相对于文献[5]，本文使用了较弱的条件。

2. 预备知识

设$C[0,1]$，$C^4[0,1]$为 Banach 空间，在$C[0,1]$取范数为$\|\cdot\|$，即$\|u\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|u(t)|$。

定义 2.1 设$\alpha(t)\in C^4[0,1]$，若$\alpha(t)$满足$\alpha^{(4)}(t)\le\varphi(t)f(\alpha(t))$，$t\in(0,1)$，$\alpha(0)\le\lambda$，$\alpha(1)\le 0$，$\alpha''(0)\ge 0$，$\alpha''(1)\ge 0$，则称$\alpha(t)$为问题(1.2)的一个下解；设$\beta(t)\in C^4[0,1]$若$\beta(t)$满足$\beta^{(4)}\ge\varphi(t)f(\beta(t))$，$t\in(0,1)$，$\beta(0)\ge\lambda$，$\beta(1)\ge 0$，$\beta''(0)\le 0$，$\beta''(1)\le 0$，则称$\beta(t)$为问题(1.2)的一个上解。

引理 2.1[2] 若$u^{(4)}(t)\ge 0$且$u(0)\ge 0$，$u(1)\ge 0$，$u''(0)\le 0$，$u''(1)\le 0$，则$u(t)\ge 0$，$t\in[0,1]$。

引理 2.2[9] 若$f\in C[0,1]$，则问题$u^{(4)}(t)=f(t)$，$t\in(0,1)$，$u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0$有唯一解

$$u(t)=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)f(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s, t\in[0,1],$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases} s(1-t), & 0\le s\le t\le 1, \\ t(1-s), & 0\le t\le s\le 1, \end{cases}$$

进一步，若$f\ge 0$，则$u\ge 0$，且$\min\limits_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}u(t)\ge\frac{1}{4}\|u\|$。

引理 2.3 若u是问题(1.2)的正解当且仅当$v=u-\lambda l$是

$$v^{(4)}=\varphi(t)f(v(t)+\lambda l(t)), t\in(0,1), v(0)=v(1)=v''(0)=v''(1)=0, \tag{2.1}$$

非负解，其中$l(t)$为问题$l^{(4)}(t)=0$，$t\in(0,1)$，$l(1)=l''(0)=l''(1)=0$，$l(0)=1$的唯一解，且$l(t)=1-t$，$t\in[0,1]$。

定义算子$A:C[0,1]\to C[0,1]$，

$$(Av)(t)=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x)f(v(x)+\lambda l(x))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s,\ t\in[0,1]。$$

不难验证，算子A全连续，且v是问题(2.1)的解当且仅当v是A的不动点。

为方便，记

$$\overline{f_0}=\overline{\lim_{u\to 0}}\frac{f(u)}{u},\quad \overline{f_\infty}=\overline{\lim_{u\to\infty}}\frac{f(u)}{u},\quad \underline{f_\infty}=\underline{\lim_{u\to\infty}}\frac{f(u)}{u}。$$

$$\delta_0=\frac{1}{2\int_0^1\int_0^1 s(1-s)G(s,x)\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s}，\quad \eta_0=\frac{16}{\int_0^1\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} s(1-s)G\left(\frac{1}{4},s\right)\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s}。$$

本文总假定：

(H_1) $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续且非减；

(H_2) $\overline{f_0}<\delta_0$， $\underline{f_\infty}>\eta_0$；

(H_3) $\overline{f_\infty}<\delta_0$。

引理 2.4 假定(H_1)成立，若问题(1.2)有非负下解 $\alpha(t)$ 和非负上解 $\beta(t)$，且满足 $\alpha(t)\le\beta(t)$，则问题(1.2)至少存在一个解 $u(t)$，且 $\alpha(t)\le u(t)\le\beta(t)$， $t\in[0,1]$。

证明 定义辅助函数

$$F(u(t))=\begin{cases} f(\alpha(t)), & u(t)<\alpha(t), \\ f(u(t)), & \alpha(t)\le u(t)\le\beta(t), \\ f(\beta(t)), & u(t)>\beta(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

则 F 有界，根据引理 2.3，问题

$$u^{(4)}(t)=\varphi(t)F(u(t)), t\in(0,1), u(1)=u''(0)=u''(1)=0, u(0)=\lambda, \tag{2.3}$$

等价于问题 $v^{(4)}=\varphi(t)F(v(t)+\lambda l(t))$， $t\in(0,1)$， $v(0)=v(1)=v''(0)=v''(1)=0$。

定义算子 $B:C[0,1]\to C[0,1]$，

$$(Bv)(t)=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x)F(v(x)+\lambda l(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}s, t\in[0,1]。$$

不难验证，算子 B 全连续，所以根据 Schauder 不动点定理，算子 B 在 $C[0,1]$ 中至少存在一个不动点 v，从而 $u=v+\lambda l$ 是问题(2.3)的解且 $l(t)=1-t, t\in[0,1]$。

下面证明： $\alpha(t)\le u(t)\le\beta(t)$， $t\in[0,1]$。

首先，证明 $u(t)\le\beta(t)$。令 $\omega(t)=\beta(t)-u(t)$， $t\in[0,1]$，

由上解的定义及 f 的单调性，有

$$\omega^{(4)}(t)=\beta^{(4)}(t)-u^{(4)}(t)\ge\varphi(t)f(\beta(t))-\varphi(t)F(u(t))\ge\varphi(t)f(\beta(t))-\varphi(t)f(\beta(t))=0,$$

$$\omega(0)\ge0，\quad \omega(1)\ge0，\quad \omega''(0)\le0，\quad \omega''(1)\le0，$$

根据引理 2.1，有 $\omega(t)\ge0$，即 $u(t)\le\beta(t)$。

同理可证 $\alpha(t)\le u(t)$，即 $\alpha(t)\le u(t)\le\beta(t)$， $t\in[0,1]$。由 F 的定义可知， $u(t)$ 是问题(1.2)的解。

引理 2.5 若(H_1)，(H_2)成立，设 $E\subset(0,+\infty)$ 是一有界集，则当 $\lambda\in E$ 时，问题(1.2)的所有可能解 $u(t)$ 都满足 $|u(t)|<c_0$， $t\in[0,1]$。其中， c_0 是仅依赖于 E 的正常数。

证明 根据引理 2.3，若 $u(t)$ 是问题(1.2)的正解，则 $v=u-\lambda l$ 是问题(2.1)的非负解。

由于 $\underline{f_\infty}>\eta_0$，故存在 $R_0>0$，使得当 $u\ge R_0$ 时，有 $f(u)>\eta_0 u$。

当 $t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ 时，若 $s\in[0,t]$，则 $G(t,s)=s(1-t)\ge\frac{1}{4}s\ge\frac{1}{4}s(1-s)$；若 $s\in[t,1]$，则

$G(t,s)=t(1-s)\ge\frac{1}{4}(1-s)\ge\frac{1}{4}s(1-s)$。故有 $G(t,s)\ge\frac{1}{4}s(1-s)$， $t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$， $s\in[0,1]$。

同理可得， $G(t,s)\ge\frac{1}{4}t(1-t)$， $s\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$， $t\in[0,1]$。

显然$|v|<4R_0$，若不然，存在$t_0\in[0,1]$，使得$v(t_0)\geq 4R_0$，从而$\min\limits_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}v(t)\geq\frac{1}{4}\|v\|\geq R_0$。故

$$
\begin{aligned}
v\left(\frac{1}{4}\right)&=\int_0^1\int_0^1 G\left(\frac{1}{4},s\right)G(s,x)\varphi(x)f\left(v(x)+\lambda l(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\geq\int_0^1\int_0^1 G\left(\frac{1}{4},s\right)G(s,x)\varphi(x)f\left(v(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\geq\int_0^1\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\left(\frac{1}{4},s\right)G(s,x)\varphi(x)f\left(v(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\geq\int_0^1 G\left(\frac{1}{4},s\right)\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{1}{4}s(1-s)\varphi(x)\eta_0 v(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\geq\int_0^1\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{1}{4}s(1-s)G\left(\frac{1}{4},s\right)\varphi(x)\eta_0\frac{1}{4}\|v\|\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\|v\|
\end{aligned}
,\tag{2.4}
$$

与$\|v\|=\max\limits_t|v(t)|$矛盾，因此$|v|<4R_0$，即$|u|=|v+\lambda l|\leq|v|+\lambda<4R_0+\lambda$，取$c_0=4R_0+\lambda$。故结论成立。

3. 主要结果和证明

定理 3.1 若(H_1)，(H_2)成立，则存在$\lambda^*>0$，满足

当$0<\lambda<\lambda^*$时，问题(1.2)至少存在两个正解；

当$\lambda=\lambda^*$时，问题(1.2)至少存在一个正解；

当$\lambda>\lambda^*$时，问题(1.2)无正解。

证明 先证明当$\lambda>0$充分小时，问题(1.2)存在正解。

由于$\overline{f_0}<\delta_0$，所以存在充分小的$\lambda_1>0$，当$u\leq\lambda_1$时，$f(u)<\delta_0\lambda_1$。

定义凸闭集$D=\left\{v\in C[0,1]\,\middle|\,0\leq v(t)\leq\lambda_1,t\in[0,1]\right\}$。

由于$G(t,s)\leq s(1-s)$，$\forall t,s\in[0,1]$。取$\lambda<\lambda_1$，则$T:D\to D$。事实上，对$\forall v\in D$，由f的单调性可得，

$$
\begin{aligned}
0\leq(Tv)(t)&=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x)f\left(v(x)+\lambda l(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\leq\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x)f(2\lambda_1)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\leq\int_0^1\int_0^1 s(1-s)G(s,x)\varphi(x)2\delta_0\lambda_1\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\lambda_1
\end{aligned}
。
$$

由 Schauder 不动点定理可得，T在D中存在不动点v，即$u=v+\lambda l$是问题(1.2)的正解。

然后，证明当λ充分大时，问题(1.2)无正解。

反证法，假设存在充分大的λ_0，使得问题(1.2)存在正解u_0，则$v=u_0-\lambda_0 l$是问题(2.1)的非负解，类似(2.4)式的证明可以得到矛盾，因此λ必有界。

记$\lambda^*=\sup\left\{\lambda\,\middle|\,\lambda\in(0,+\infty)\text{且使问题}(1.2)\text{存在正解}\right\}$，由上可知$0<\lambda^*<+\infty$。

下证对$\forall\lambda\in(0,\lambda^*)$，问题(1.2)存在正解。

由λ^*的定义可知，对$\lambda\in(0,\lambda^*)$，可选取$\tilde{\lambda}>\lambda$，使得$\tilde{\lambda}$所对应的问题(1.2)存在正解

$$
\tilde{u}(t)=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x)f\left(\tilde{u}(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\tilde{\lambda}(1-t),\ t\in[0,1]。
$$

下证对$\forall\lambda\in(0,\tilde{\lambda}]$，问题(1.2)存在正解。令$\Phi(\tilde{u})=\left\{u\in C[0,1]\,\middle|\,u(t)\leq\tilde{u}(t),t\in[0,1]\right\}$。

定义算子$P:C[0,1]\to C[0,1]$,

$$
(Pu)(t)=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x)f\left(u(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\lambda(1-t),\ t\in[0,1]
$$

不难验证，算子 P 全连续。对 $\forall\lambda\in\left(0,\tilde{\lambda}\right]$，$u\in\Phi(\tilde{u})$，根据 f 的单调性，有

$$\begin{aligned}(Pu)(t)&=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x)f\left(u(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\lambda(1-t)\\&\le\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x)f\left(\tilde{u}(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\tilde{\lambda}(1-t)=\tilde{u}(t)\end{aligned}。$$

由 Schauder 不动点定理，算子 P 在 $\Phi(\tilde{u})$ 中存在不动点，即问题(1.2)存在正解。

接下来，证明当 $\lambda\in\left(0,\lambda^*\right)$ 时，问题(1.2)至少存在两个正解。

取 $\lambda\in\left(0,\lambda^*\right)$，则存在 $\hat{\lambda}\in\left(0,\lambda^*\right)$，使得 $\hat{\lambda}>\lambda$，且 $\hat{\lambda}$ 对应的问题(1.2)至少存在一个正解，记为 $\hat{u}$。则 $v=\hat{u}-\hat{\lambda}l$ 是问题(2.1)的解。再由引理 2.2 知 $\lambda l<\hat{\lambda}l\le\hat{u}$。

定义 $\hat{\alpha}(t)=\lambda l$，$\hat{\beta}(t)=\hat{u}(t)$，$t\in[0,1]$。易知 $\hat{\alpha}(t)$，$\hat{\beta}(t)$ 分别是问题(1.2)的下解和上解，且满足 $\hat{\alpha}(t)\le\hat{\beta}(t)$。由引理 2.4 可知，$\lambda$ 对应的问题(1.2)至少存在一个正解 u_0，且 $\hat{\alpha}(t)\le u_0(t)\le\hat{\beta}(t)$，即 $u_0\le\hat{u}$。同理可得，存在 $\breve{\lambda}\in\left(0,\lambda^*\right)$，使得 $\breve{\lambda}<\lambda$，$u_0\ge\breve{u}$，其中 $\breve{u}$ 为 $\breve{\lambda}$ 对应的问题(1.2)的解，故 $\breve{u}\le u_0\le\hat{u}$。

进一步，证明 u_0 满足

$$\breve{u}(t)<u_0(t)<\hat{u}(t),t\in[0,1) \tag{3.1}$$

令 $g(t)=u_0(t)-\breve{u}(t)$，$t\in[0,1]$，则 $g(1)=0$，$g(0)>0$，由 f 的单调性，有

$$g''(t)=u_0''(t)-\breve{u}''(t)=-\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)f\left(u_0(s)\right)\mathrm{d}s+\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)f\left(\breve{u}(s)\right)\mathrm{d}s\le 0,\ t\in[0,1]。$$

则 $g(t)>0$，$t\in[0,1)$。故 $u_0(t)>\breve{u}(t)$，同理可证 $u_0(t)<\hat{u}(t)$，故(3.1)式成立。

选取 $\lambda^N>\lambda^*$，对固定的 $\lambda\in\left(0,\lambda^*\right)$，定义算子 $K:\left[\lambda,\lambda^N\right]\times C[0,1]\to C[0,1]$，

$$K(\mu,u)=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x)f\left(u(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\mu(1-t),t\in[0,1]。$$

不难验证，算子 K 全连续，且 u 是问题(1.2)的解当且仅当 $u=K(\lambda,u)$。

记 $E=\left[\lambda,\lambda^*\right)$，根据引理 2.5，当 $\mu\in E$ 时，存在仅依赖于 E 的正常数 c_0，使得算子 K 的所有可能不动点 u 都满足

$$\left|u(t)\right|<c_0,t\in[0,1]。 \tag{3.2}$$

令

$$\Omega=\left\{u(t)\in C[0,1]\,\middle|\,\left|u(t)\right|<c_0,\alpha(t)<u(t)<\beta(t),t\in(0,1]\right\},$$

其中 $\alpha(t)=\breve{u}(t)$，$\beta(t)=\hat{u}(t)$。易证 $\alpha(t)$，$\beta(t)$ 分别是问题(1.2)的下解和上解，且满足 $\hat{\alpha}(t)\le\hat{\beta}(t)$。由(3.1)，(3.2)式知，$u_0\in\Omega$，故 Ω 是 $C[0,1]$ 中的非空开集。

定义算子 $\tilde{K}:\left[\lambda,\lambda^N\right]\times C[0,1]\to C[0,1]$，

$$\tilde{K}(\mu,u)=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x)F\left(u(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\mu(1-t),t\in[0,1].$$

其中 F 由(2.2)式定义，则 $\tilde{K}$ 在 $C[0,1]$ 中有界。因此存在 $R>c_0$，使对 $\forall u\in C[0,1]$，有 $\left|\tilde{K}(\lambda,u)\right|<R$。

记 $D(\theta,R)=\left\{u\in C[0,1]\,\middle|\,\|u\|<R\right\}$，$\partial D(\theta,R)=\left\{u\in C[0,1]\,\middle|\,\|u\|=R\right\}$。由拓扑度的正规性，有

$$\deg\left(I-\tilde{K}(\lambda,\cdot),D(\theta,R),0\right)=1。 \tag{3.3}$$

由(3.2)式及引理 2.5 可知，$\tilde{K}(\lambda,\cdot)$ 在 $\overline{D(\theta,R)}\setminus\Omega$ 中没有不动点。由于在 Ω 中 $K(\lambda,\cdot)=\tilde{K}(\lambda,\cdot)$，因此根据(3.3)式及拓扑度的切除性，有

$$\deg\left(I-K(\lambda,\cdot),\Omega,0\right)=\deg\left(I-\tilde{K}(\lambda,\cdot),\Omega,0\right)=\deg\left(I-\tilde{K}(\lambda,\cdot),D(\theta,R),0\right)=1。 \tag{3.4}$$

由于 $\lambda^N > \lambda^*$，因此对 $\forall u \in C[0,1]$，$K(\lambda^N, u) \neq u$，于是

$$\deg\left(I - K(\lambda^N, \cdot), D(\theta, R), 0\right) = 0 \text{。} \tag{3.5}$$

定义 $H:[0,1]\times\overline{D(\theta,R)} \to C[0,1]$ 为 $H(t,\cdot) = K((1-t)\lambda + t\lambda^N, \cdot)$。

显然，当 $(t,u) \in [0,1]\times\partial D(\theta,R)$ 时，$H(t,u) \neq u$。若不然，存在 $(t_0, \overline{u_0}) \in [0,1]\times\partial D(\theta,R)$，使得 $H(t_0,\overline{u_0}) = \overline{u_0}$。因此，$\overline{u_0}$ 是 $\overline{\mu} = (1-t_0)\lambda + t_0\lambda^N$ 对应问题(1.2)的解，故 $\overline{\mu} \in E$。由(3.2)式可知，$\left|\overline{u_0}\right| < c_0$，而 $\overline{u_0} \in \partial D(\theta,R)$，这与 $R > c_0$ 矛盾。于是，根据(3.5)式及拓扑度的同伦不变性，有

$$\begin{aligned}&\deg\left(I - K(\lambda,\cdot), D(\theta,R), 0\right) = \deg\left(I - H(0,\cdot), D(\theta,R), 0\right)\\ &= \deg\left(I - H(1,\cdot), D(\theta,R), 0\right) = \deg\left(I - K(\lambda^N,\cdot), D(\theta,R), 0\right) = 0\end{aligned} \text{。} \tag{3.6}$$

由(3.2)式可知，$K(\lambda,\cdot)$ 在 $\partial\Omega$ 上没有不动点，由拓扑度的区域可加性及(3.4),(3.6)式，有

$$\deg\left(I - K(\lambda,\cdot), D(\theta,R)\setminus\overline{\Omega}, 0\right) = -1 \text{。}$$

因此，问题(1.2)在 $D(\theta,R)\setminus\overline{\Omega}$ 中存在解 u_1，因为 $u_0 \in \Omega$，故 $u_0 \neq u_1$，即 $v_i = u_i - \lambda l\ (i=1,2)$ 是问题(2.1)的解，因 $v_i \geq 0\ (i=1,2)$，所以 $u_i \geq \lambda l\ (i=1,2)$。

最后，证明当 $\lambda = \lambda^*$ 时，问题(1.2)至少存在一个正解。

由 λ^* 的定义可知，存在 $\lambda_n \in (0,\lambda^*)$，使得 $\lambda_n \to \lambda^*\ (n \to +\infty)$。于是对 $n \in N$，λ_n 对应的问题(1,2)存在正解

$$u_{\lambda_n}(t) = \int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x) f\left(u_{\lambda_n}(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \lambda_n(1-t),\ u_{\lambda_n}(t) \geq \lambda_n(1-t),\ t\in[0,1]. \tag{3.7}$$

由 Arzela-Ascoli 定理可知，$\left\{u_{\lambda_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $C[0,1]$ 中相对紧，故一定存在收敛子列，不妨仍记为 $\left\{u_{\lambda_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$，且 $u_{\lambda_n} \to u_{\lambda^*} \in C[0,1]\ (n\to+\infty)$。当 $n \to +\infty$ 时，(3.7)式可变为

$$u_{\lambda^*}(t) = \int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x) f\left(u_{\lambda^*}(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \lambda^*(1-t),\ u_{\lambda^*}(t) \geq \lambda^*(1-t),\ t\in[0,1].$$

因此 u_{λ^*} 是 λ^* 对应问题(1.2)的正解。

定理 3.2 若(H_1)，(H_3)成立，则对 $\forall\lambda \in (0,+\infty)$，问题(1.2)至少存在一个正解。

证明 分 f 有界和 f 无界两种情况

当 f 有界时，对 $\forall u \in [0,+\infty)$，存在 $M > 0$，使得 $f(u) \leq M$。根据 Schauder 不动点定理，对 $\forall\lambda \in (0,+\infty)$，问题(2.1)至少存在一个非负解，因此问题(1.2)至少存在一个正解。

当 f 无界时，因为 $\varphi(t) \geq 0$ 且有界，$t \in (0,1)$，所以存在正实数 N，使得 $N \geq \|\varphi(t)\|$。因为 $\overline{f_\infty} < \delta_0$，所以存在 $r_0 > 0$，使得对 $\forall u \in [r_0,+\infty)$，有 $f(u) < \delta_0 u$。又 f 无界，因此对 $\forall\lambda \in (0,+\infty)$，存在 Q_λ，使得 $Q_\lambda > \max\{r_0,\lambda\}$。

定义有界凸闭集 $\Omega = \left\{v \in C[0,1] \middle| 0 \leq v(t) \leq Q_\lambda, t\in[0,1]\right\}$。

定义算子 $A:\Omega\to\Omega$。对 $\forall v\in\Omega$，有 $0 \leq v + \lambda l \leq 2Q_\lambda$，根据 f 的单调性，有

$$\begin{aligned}0 &\leq (Av)(t) = \int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x) f\left(v(x)+\lambda l(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &\leq \int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,x)\varphi(x) f(2Q_\lambda)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &\leq \int_0^1\int_0^1 s(1-s)G(s,x)\varphi(x)2\delta_0 Q_\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}s = Q_\lambda\end{aligned} \text{。}$$

即 $Av\in\Omega$，由 Schauder 不动点定理可得 A 在 Ω 中至少存在一个不动点 v，因此，$u = v + \lambda l$ 是问题(1.2)的正解。

注：相对文献[5]，这里使用了较弱的条件，显然本文中条件(H_2)，(H_3)比[5]中相应的(H_2)，(H_3)要弱。

4. 致谢

作者感谢导师陈芳启教授的悉心指导和热情鼓励，同时，感谢国家自然科学基金的支持。

参考文献 (References)

[1] 吴红萍, 马如云 (2000) 一类四阶两点边值问题正解的存在性. *应用泛函分析学报*, **2**, 342-348.
[2] Ma, R.Y., Zhang, J.H. and Fu, S.M. (1997) The method of lower and upper solutions for fourth-order two-point boundary value problem. *Journal of Mathematics Analysis and Application*, **215**, 415-422.
[3] 姚庆六 (2006) 一类非线性四阶三点边值问题的可解性. *山东大学学报: 理学版*, **1**, 11-15.
[4] 赵增勤, 孙忠民 (2009) 一类四阶奇异半正 Sturm-Liouville 边值问题的正解. *系统科学与数学*, **3**, 378-388.
[5] 杨变霞, 路艳琼，陈瑞鹏 (2011) 一类四阶两点边值问题正解的存在性. *纯粹数学与应用数学*, **2**, 273-280.
[6] 郭大钧, 孙经先, 刘兆理 (2006) 非线性常微分方程的泛函方法.山东科技出版社, 济南.
[7] 徐登洲, 马如云 (2008) 线性微分方程的非线性扰动.科学出版社, 北京.
[8] 郭大钧 (2003) 非线性泛函分析(第 2 版). 山东科学技术出版社, 济南.
[9] Wang, H.Y. (1994) Multiple positive solutions of some boundary value problems. *Journal of Mathematics Analysis and Application*, **184**, 640-648.