Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 14-20
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.41003 Published Online January 2014 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Application of a Four Quadratic Rational Interpolation Spline Curve

Lin Fu

Anhui University of Science & Technology, Huainan
Email: fulin07211208@163.com

Received: Dec. 16th, 2013; revised: Dec. 27th, 2013; accepted: Dec. 29th, 2013

Abstract: A four quadratic rational spline interpolation for non closed curves was well described. This paper presents an approach of four quadratic rational interpolation spline and explores the interpolation function monotonicity and continuity. Error estimates confirm the conformality and numerical practical examples illustrate the effectiveness of the method.

Keywords: Curve; Shape Preserving; Effective

一元四次有理插值样条曲线的应用

符 琳

安徽理工大学，淮南
Email: fulin07211208@163.com

收稿日期：2013 年 12 月 16 日；修回日期：2013 年 12 月 27 日；录用日期：2013 年 12 月 29 日

摘 要：一元四次有理插值样条对于非封闭曲线进行了很好地数学描述。本文提出了一元四次有理插值样条的方法，探究了这种插值函数的单调性，连续性，误差估计证实其保形性，最后用实际的数值实例来说明该方法的有效性。

关键词：曲线；保形；有效

1. 引言

随着航空、造船、机械设计和制造等现代工业的蓬勃发展，计算机辅助几何设计，简称 CAGD (Computer Aided Geometric Design)，逐步成为的一门新兴的交叉学科与边缘学科。作为 CAGD 系统基本几何元素，自由曲线、曲面的表示、设计、显示、分析以及规格、处理(包括数据结构、数据库、图形的信息形式和调整方式等)问题，是 CAGD 的主要研究对象和内容，而用插值与逼近方法解决曲线、曲面造型问题是 CAGD 最基础的研究课题。所谓插值问题就是从给定的离散点的值，去构造一个连续定义的(简单)函数，使得它与被逼近的函数在给定点的值完全一致。插值法是数值逼近的一种最简单的重要方法，利用插值法可以通过函数在有限个点处的取值情况估算出函数在其它点处的值。插值法是整个数值逼近的基础。它被广泛应用于方程求根、函数逼近、数值微分、数值积分、积分和微分方程数值解等。有理样条由于其极好的保形性，光滑性已经成为一种广泛应用的曲线曲面设计方法。

近些年来，不少学者在有理二次，三次有理样条以及他们的性质和应用上做了研究[1-8]。如：Gregory，Delbourgo 在文献[1]构造了 2/2 型有理插值样条，探究了它的保单调问题。王强在文献[7]构造了双参数 3/1 型的有理插值样条，探究了其光滑性。Delbourgo 在文献[2]构造了 2/1 型有理插值样条，并探究了它的保凸问题。王仁宏，吴顺唐在文献[3]从实际的课题着手，构造了几种具有线性结构的有理插值样条并讨论了它们的解析。王强，段奇、Hussain 等在文献[4-7]也是用含参数的分段三次有理函数构造了满足约束条件插值样条。

本文构造四次分段有理插值曲线即分子、分母分别为四次、一次多项式的插值函数，并讨论了该函数的一阶、二阶连续性和保单调的条件。该函数含有二族参数 α，β 可自由调节以改变曲线的形状，并可通过导数 d 赋值，无需求解线性方程组使得插值函数二阶连续。从理论上证实插值样条函数的保形性。

它具有以下优点：1) 局部性，每个区间的函数表达式只与相邻的若干节点取值有关；2) 保形性，无需增加中间节点，通过参数选取可实现保形要求；3) 具有显式表达式，便于计算分析；4) 含有参数，便于交互式修改，可以通过参数的改变而不是点的变动来修改插值函数。

本文结构如下：第一部分的引言介绍了该插值方法存在的背景，目前的研究领域以及本方法的优点之处。第二部分具体讲述了这种方法。第三部分从单调性，连续性和误差估计三方面探究了其的保形性。第四部分用数值例子证实了这种方法的可行性。第五部分是对文章的小结。

2. 一元四次有理插值样条曲线的构造

给定数据 $(x_i, f_i), i=1,2,\cdots,n$，其中 f_i 为被插函数在分划点 x_i 上的函数值，此处 $x_1<x_2<\cdots<x_n$。记 $h_i=x_{i+1}-x_i$，$\Delta_i=(f_{i+1}-f_i)$，当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$ 时，$t\in[0,1]$，$i=1,2,\cdots,n-1$，定义：

$$w(x)=w(x_i+h_it)\equiv W(t)=\begin{cases}Q_i(t)/P_i(t) & \text{if } \Delta_i\neq 0\\ f_i & \text{if } \Delta_i=0\end{cases} \tag{1}$$

$$Q_i(t)=\alpha_i f_i(1-t)^4+Z_1(1-t)^3t+Z_2(1-t)^2t^2+Z_3(1-t)t^3+\beta_i f_{i+1}t^4$$

$$P_i(t)=\alpha_i(1-t)+\beta_i t$$

且

$$\begin{aligned}Z_1&=(3\alpha_i+\beta_i)f_i+\alpha_i d_i h_i\\ Z_2&=3\alpha_i f_{i+1}+3\beta_i f_i\\ Z_3&=(\alpha_i+3\beta_i)f_{i+1}-\beta_i d_{i+1}h_i\end{aligned}$$

α_i，β_i 称为形状参数都取正数，d_i 表示函数在点 x_i 处的导数值，对(1)定义的函数求导可得：

$$w^{(1)}(x)=W^{(1)}(t)h_i^{-1}=\frac{\sum_{j=0}^{4}A_{ij}(1-t)^{4-j}t^j}{\left[\alpha_i(1-t)+\beta_i t\right]^2} \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned}A_{i0}&=\alpha_i^2 d_i\\ A_{i1}&=2\alpha_i^2(3\Delta_i-d_i)\\ A_{i2}&=3\alpha_i\beta_i(4\Delta_i-d_i-d_{i+1})\\ A_{i3}&=2\beta_i^2(3\Delta_i-d_{i+1})\\ A_{i4}&=\beta_i^2 d_{i+1}\end{aligned}$$

由(1)、(2)容易验证函数满足下列插值性质：

$$w(x_i) = f_i, \quad w(x_{i+1}) = f_{i+1};$$

$$w^{(1)}(x_i) = d_i, \quad w^{(1)}(x_{i+1}) = d_{i+1}$$

因此，函数 $w(x) \in C^1[x_1, x_n]$ 是在 x_i 和 x_{i+1} 处的 Hermite 插值。

3. 一元四次有理插值曲线的保形性

下面从插值函数单调性、插值函数二阶连续性和插值函数误差估计来说明其保形性。

3.1. 插值函数单调性

下面我们讨论(1)式定义的一元四次有理样条插值函数的单调性。假设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 单调递增，因此设 $f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_n$，或 $\Delta_i \ge 0$。

选取导数值 d_i 满足：

$$d_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

在区间 $[x_i, x_{i+1}]$，$w(x)$ 单调递增的充要条件为：

$$w^{(1)}(x) \ge 0$$

注意到由(1)式给出的插值函数，$w(x)$ 的导数 $w^{(1)}(x)$ 的分母恒正，因此只需 $w^{(1)}(x)$ 的分子大于零。当 $d_i \ge 0$ 时，如果 $A_{i1} \ge 0$，$A_{i2} \ge 0$，$A_{i3} \ge 0$ 成立，则 $w^{(1)}(x) \ge 0$，因此，我们得到插值函数 $w(x)$ 单调的充分条件为：

$$A_{ij} \ge 0, \quad j = 1, 2, 3$$

即

$$d_i \le 3\Delta_i \tag{3}$$

$$d_{i+1} \le 3\Delta_i \tag{4}$$

$$d_i + d_{i+1} \le 4\Delta_i \tag{5}$$

因此，我们就得到下述定理：

定理 1：已知数据 $(f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_n)$ 单调递增，导数值 $d_i \ge 0$，当 d_i 满足(3)、(4)、(5)时，则存在二族含有参数 α_i，β_i 的四次有理插值函数 $w(x) \in C^1[a,b]$ 并且是单调递增的。

3.2. 插值函数二阶连续性

对任意 $x \in [x_i, x_{i+1}]$，由(1)式定义的一元四次有理样条插值函数 $w(x)$ 求二阶导数可得：

$$w^{(2)}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{4} B_{ij}(1-t)^{4-j} t^j}{h_i\left[\alpha_i(1-t) + \beta_i t\right]^3},$$

其中

$$B_{i0} = 6\alpha_i^3\Delta_i - 4\alpha_i^3 d_i - 2\alpha_i^2\beta_i d_i$$

$$B_{i1} = 18\alpha_i^2\beta_i\Delta_i - 6\alpha_i^3\Delta_i - 8\alpha_i^2\beta_i d_i - 6\alpha_i^2\beta_i d_{i+1} + 2\alpha_i^3 d_i$$

$$B_{i2} = 18\alpha_i\beta_i^2\Delta_i - 18\alpha_i^2\beta_i\Delta_i + 6\alpha_i^2\beta_i d_i - 6\alpha_i\beta_i^2 d_{i+1}$$

$$B_{i3} = 6\beta_i^3\Delta_i + 8\alpha_i\beta_i^2 d_{i+1} + 6\alpha_i\beta_i^2 d_i - 18\alpha_i\beta_i^2\Delta_i - 2\beta_i^3 d_{i+1}$$

$$B_{i4}=4\beta_i^3 d_{i+1}+2\alpha_i\beta_i^2 d_{i+1}-6\beta_i^3\Delta_i$$

因此有

$$w^{(2)}\left(x_{i-}\right)=\frac{4\beta_{i-1}^3 d_i+2\alpha_{i-1}\beta_{i-1}^2 d_i-6\beta_{i-1}^3\Delta_{i-1}}{h_{i-1}\beta_{i-1}^3}$$
$$=\frac{4\beta_{i-1}d_i+2\alpha_{i-1}d_i-6\beta_{i-1}\Delta_{i-1}}{h_{i-1}\beta_{i-1}}$$

及

$$w^{(2)}\left(x_{i+}\right)=\frac{6\alpha_i^3\Delta_i-4\alpha_i^3 d_i-2\alpha_i^2\beta_i d_i}{h_i\alpha_i^3}$$
$$=\frac{6\alpha_i\Delta_i-4\alpha_i d_i-2\beta_i d_i}{h_i\alpha_i}.$$

由函数 $w(x)$ 在点 x_i 二阶连续，可得

$$d_i=\frac{h_i\Delta_{i-1}+h_{i-1}\Delta_i}{\frac{2}{3}\left(h_{i-1}+h_i\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}h_{i-1}+\frac{\alpha_{i-1}}{\beta_{i-1}}h_i\right)}\tag{6}$$

由以上推导可得下述定理

定理 2：当 d_i 满足(6)式时，含有参数 α_i， β_i 的四次有理插值函数族 $w(x,\alpha_i,\beta_i)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶连续。

3.3. 插值函数误差估计

对于分片函数(1)只需考虑在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的情形。

定理 3：假设 $f(x)\in C^4[a,b]$， $w(x)$ 是由(1)式定义的在区间 $[x_1,x_n]$ 上的分片有理插值样条函数，则对任意 $[x_i,x_{i+1}]$ 下式成立：

$$\left|w(x)-f(x)\right|\le\frac{h_i^4}{384}\left\|f^{(4)}\right\|+\frac{k_ih_i}{4}+\frac{\lambda_ic_ih_i}{16\mu_i}$$

其中

$$\lambda_i=\max\left\{\alpha_i,\beta_i\right\},\qquad \mu_i=\min\left\{\alpha_i,\beta_i\right\}$$
$$k_i=\max\left\{\left|f_i^{(1)}-d_i\right|,\left|f_{i+1}^{(1)}-d_{i+1}\right|\right\},\qquad c_i=\left|d_i+d_{i+1}\right|$$

证明：对于 $x\in[x_i,x_{i+1}]$，令 $t=(x-x_i)/h_i$， $F_i(t)=f(x_i(t))$，记 $W_i(t)=w(x_i(t))$，其中 $x_i(t)=x_i+h_it$。将由(1)式定义的函数 $W_i(t)$ 改写成下列形式：

$$W_i(t)=H_i(t)+K_i(t)$$

其中

$$H_i(t)=f_i(1-t)^3+(3f_i+d_ih_i)(1-t)^2t+(3f_{i+1}-d_{i+1}h_i)(1-t)t^2+f_{i+1}t^3$$

令

$$H_i^*(t)=f_i(1-t)^3+\left(3f_i+f_i^{(1)}h_i\right)(1-t)^2t+\left(3f_{i+1}-f_{i+1}^{(1)}h_i\right)(1-t)t^2+f_{i+1}t^3$$

$$K_i(t)=\frac{\alpha_id_{i+1}h_i-\beta_id_ih_i}{\alpha_i(1-t)+\beta_it}(1-t)^2t^2$$

则有

$$\left|F_i(t)-Q_i(t)/P_i(t)\right|=\left|F_i(t)-H_i(t)-K(t)\right|\le\left|F_i(t)-H_i^*(t)\right|+\left|H_i^*(t)-H_i(t)\right|+\left|K_i(t)\right| \tag{7}$$

因为函数 $H_i^*(t)$ 是关于 $F_i(t)$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的两点 Hermite 插值，所以有：

$$\left|F_i(t)-H_i^*(t)\right|\le\frac{1}{384}\mathrm{Max}_{t\in[0,1]}\left|\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}F_i(t)\right|\le\frac{h_i^4}{384}\left\|f^{(4)}\right\| \tag{8}$$

由函数 $H_i^*(t)$， $H(t)$， $K_i(t)$ 的定义并将其带入化简可得：

$$\left|H_i^*(t)-H_i\right|=h_i(1-t)t\left|\left(f_i^{(1)}-d_i\right)(1-t)-\left(f_{i+1}^{(1)}-d_{i+1}\right)t\right|\le\frac{k_ih_i}{4} \tag{9}$$

及

$$\left|K_i(t)\right|=\frac{h_i\left|\alpha_id_i-\beta_id_i\right|}{\alpha_i(1-t)+\beta_it}(1-t)^2t^2\le\frac{h_i\lambda_ic_i}{16\mu_i} \tag{10}$$

将(8)式，(9)式和(10)式带入(7)式，即可得定理的结论。

4. 数值实例

下面通过一个例子来验证本文所述的方法。

表 1、表 2 的数据分别取自 Akima (1970)和 Sarfraz (2000)。

Table 1. Akima data
表 1. Akima 数据

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15
y_i	10	10	10	10	10	10	10.5	15	30	60	85

Table 2. Sarfraz data
表 2. Sarfraz 数据

i	1	2	3	4	5
x_i	0	6	10	29. 5	30
y_i	1	15	15	25	30

导数值 $\{d_i\}$ 通过已知数据 $(x_i,f_i), i=1,2,\cdots,n$， 由下式确定：

$$d_i=\frac{h_i\Delta_{i-1}+h_{i-1}\Delta_i}{\frac{2}{3}(h_{i-1}+h_i)+\frac{1}{3}\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}h_{i-1}+\frac{\alpha_{i-1}}{\beta_{i-1}}h_i\right)},\quad i=2,3,\cdots,n$$

$$d_1=\begin{cases}0 & \text{if } \Delta_1=0\\ \Delta_1+(\Delta_1-\Delta_2)h_1/(h_1+h_2) & \text{otherwise}\end{cases}$$

用(1)定义的保形样条可绘制出相应的插值曲线，形状参数 α_i， β_i 可根据需要交互式选取，以调整曲线的形状。图 1 和图 2 为取 $\alpha_i=1$， $\beta_i=2$ 的插值曲线，曲线保持了被插数据的单调性且具有较好的视觉效果。

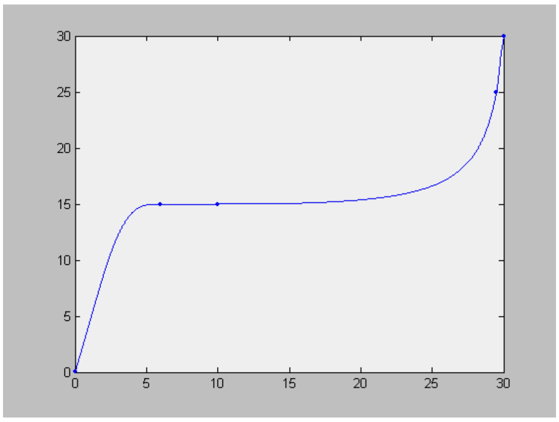

Figure 1. **Shape preserving interpolation curves of Akima data**
图 1. Akima 数据的保形插值曲线

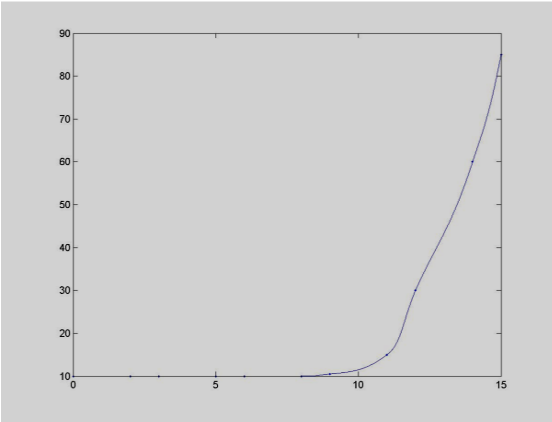

Figure 2. **Shape preserving interpolation curves of Sarfraz data**
图 2. Sarfraz 数据的保形插值曲线

5. 小结

本文构造了四次分段有理插值曲线即分子、分母分别为四次、一次多项式的插值函数，并讨论了该函数的一阶、二阶连续性和保单调的条件。该函数含有二族参数 α_i，β_i 可自由调节以改变曲线的形状，并可通过导数 d_i 赋值，无需求解线性方程组使得插值函数二阶连续。

致谢

本课题在选题和研究过程得到了王强老师的亲切关怀和悉心指导。在此向王老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意。同时感谢编者对文章提出宝贵意见，使文章更加的完整。

参考文献 (References)

[1] Gregory, J.A. and Delbourgo. R. (1982) Piecewise rational quadratic interpolation to monotonic data. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **2**, 123-130.

[2] Delbourgo, R. (1989) Shape preserving interpolation to convex data by rational functions with quadratic numerator and linear denominator. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **9**, 123-136.

[3] 王仁宏, 吴顺唐 (1978) 关于有理 spline 函数. *吉林大学自然科学学报*, **1**, 58-70.

[4] Duan, Q, Djidjeli, K, Price, W.G. and Twizell, E.H. (1998) A rational cubic spline based on function values. *Computers & Graphics*, **22**, 479-486.

[5] Duan, Q., Wang, L. and Twizell, E.H. (2005) A rational interpolation based on function values and constrained control of the interpolant curves. *Applied Mathematics and Computation*, **1**, 311-322.

[6] Hussain, M.Z. and Hussain, M. (2006) Visualization of data subject to positive constraints. *Information and Computing Science*, **1**, 149-160.

[7] 王强 (2005) 三次保形有理插值. *合肥工业大学学报*(*自然科学版*), **11**, 1461-1464.

[8] 方逵 (2010) 一种新的二元有理插值及其性质. *工程图学学报*, **4**, 117-122.