Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 5-13
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.41002 Published Online January 2014 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Relation between Meromorphic Solutions of a Class of Higher Order Linear Differential Equations and Functions of Small Growth

Minfeng Chen, Zongxuan Chen

School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou
Email: chenminfeng198710@126.com, chzx@vip.sina.com

Received: Oct. 16th, 2013; revised: Oct. 29th, 2013; accepted: Nov. 5th, 2013

Copyright © 2014 Minfeng Chen, Zongxuan Chen. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. In accordance of the Creative Commons Attribution License all Copyrights © 2014 are reserved for Hans and the owner of the intellectual property Minfeng Chen, Zongxuan Chen. All Copyright © 2014 are guarded by law and by Hans as a guardian.

Abstract: In this paper, we consider the growth of the meromorphic solutions of a class of higher order homogeneous and non-homogeneous linear differential equations with meromorphic coefficients, and further consider the relation between their meromorphic solutions and functions of small growth, where one of these coefficients has a finite deficient value or satisfies some conditions, others satisfy corresponding conditions.

Keywords: Deficient Value; Complex Differential Equations; Meromorphic Function; Functions of Small Growth

一类高阶线性微分方程亚纯解与小函数的关系

陈敏风，陈宗煊

华南师范大学数学科学学院，广州
Email: chenminfeng198710@126.com, chzx@vip.sina.com

收稿日期：2013 年 10 月 16 日；修回日期：2013 年 10 月 29 日；录用日期：2013 年 11 月 5 日

摘　要：本文研究了一类亚纯函数系数高阶齐次和非齐次线性微分方程的亚纯解的增长性，并进一步研究了它们的亚纯解与小函数的关系。其中某一个系数具有有限亏值或满足一定条件，其余系数也满足相应的条件。

关键词：亏值；复域微分方程；亚纯函数；小函数

1. 引言

本文使用值分布论的标准记号[1]，特别地，对亚纯函数 $f(z)$，用 $\sigma(f)$ 和 $\mu(f)$ 表示 $f(z)$ 的级与下级；用 $\lambda(f)$ 和 $\lambda(1/f)$ 分别表示 $f(z)$ 的零点和极点收敛指数；$\overline{\lambda}(f)$ 表示 $f(z)$ 的不同零点收敛指数；$\overline{\lambda}(f-\varphi)$ 表示 $f(z)$ 取小函数的收敛指数。

定义 1[2]：假设 $f(z)$ 为开平面上的亚纯函数，$f(z)$ 的超级 $\sigma_2(f)$ 定义 $\log T(r,f)$ 的级，即

$$\sigma_2(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r}$$

考虑二阶线性微分方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=0 \tag{1}$$

其中 $A(z)$，$B(z)$(不恒为零)都是亚纯数。众所周知，如果 $A(z)$，$B(z)$是整函数，至少有一个是超越的，并且 f_1，f_2 是方程的两个线性无关的解，那么 f_1，f_2 至少有一个必是无穷级。然而，它们也可能具有非零有穷级的解，例如 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 满足方程 $f''+\mathrm{e}^{-z}f'-(\mathrm{e}^{-z}+1)f=0$，因此，我们考虑在 $A(z)$，$B(z)$上赋予什么条件时，可以确保方程(1)的每一个非零解具有无穷级.针对这一问题，已有很多结果，如[3-5]。

伍鹏程和朱军在文献[5]中证明了

定理 A：假设 $A(z)$是一个具有有穷亏值的亚纯函数。如果 $B(z)$是一个超越亚纯函数，满足如下三个条件之一：

1) $\lambda(1/B)<\sigma(B)<\dfrac{1}{2}$;

2) $\lambda(1/B)<\mu(B)<\dfrac{1}{2}$;

3) $\sigma(B)=0$ 且 $B(z)$仅有有限多个极点。

则方程(1)的每一个非零解具有无穷级。

对于高阶齐次和非齐次线性微分方程：

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=0 \tag{2}$$

和

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=F \tag{3}$$

陈宗煊在文献[6]中证明了

定理 B：假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是亚纯函数，且存在某个 $A_s\ (0\le s\le k-1)$，满足：

$$b=\max\left\{\sigma(A_j)(j\ne s),\lambda(1/A_s)\right\}<\mu(A_s)\le\sigma(A_s)<\frac{1}{2}$$

如果微分方程(2)有亚纯解，那么每个超越亚纯解 f 满足：$\sigma_2(f)=\sigma(A_s)$；而每个非超越亚纯解 f 为多项式且 $\deg f\le s-1$。

肖丽鹏和陈宗煊在文献[7]中证明了

定理 C：假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1},F$ 是亚纯函数，存在某个 $A_s\ (0\le s\le k-1)$，满足：

$$b=\max\left\{\sigma(F),\sigma(A_j)(j\ne s),\lambda(1/A_s)\right\}<\mu(A_s)\le\sigma(A_s)<\frac{1}{2}.$$

则微分方程(3)的每一个超越亚纯解 f 满足：$\sigma_2(f)=\sigma(A_s)$。

本文主要考虑微分方程(2)，(3)亚纯解的增长性，~并研究了它们的亚纯解和小函数的关系，得到了以下结论：

定理 1：假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是有限级亚纯函数，存在某个 s 满足：A_s 具有有限亏值，$\sigma(A_s)\ne\sigma(A_0)$，且

$$b=\max\left\{\sigma(A_j)(j\ne 0,s),\lambda(1/A_0)\right\}<\mu(A_0)\le\sigma(A_0)<\frac{1}{2}.$$

如果 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 为有限级亚纯函数，那么方程(2)的每个亚纯解 $f(z)(\not\equiv 0)$ 满足 $\bar{\lambda}(f-\varphi)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$。

定理 2：假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1},F\not\equiv 0$ 是有限级亚纯函数，存在某个 s 满足：

$$\lambda(1/A_s)<\mu(A_s)\le\sigma(A_s)<\frac{1}{2},\ \sigma(A_s)\ne\sigma(A_0),\sigma(A_s)\ne\sigma(F),$$

且

$$b=\max\left\{\sigma(F),\sigma(A_j)(j\neq 0,s),\lambda(1/A_0)\right\}<\mu(A_0)\leq\sigma(A_0)<\frac{1}{2}.$$

假设 f 为(3)的亚纯解，且极点阶数有限，则 $\sigma(f)=\infty$。如果 $\varphi(z)(\neq 0)$ 为有限级亚纯函数，那么方程(3)的每个亚纯解 $f(z)(\neq 0)$ 满足 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$。

2. 引理和注

引理 1[8]：假设 f 是超越亚纯函数，$\sigma(f)=\sigma<\infty$。设 $\Gamma=\left\{(k_1,j_1),\cdots,(k_m,j_m)\right\}$ 表示一个整函数对的集合，满足 $k_i>j_i\geq 0\ (i=1,\cdots,m)$。假定 $\varepsilon>0$ 是任给常数,那么存在子集 $E_1\subset(1,\infty)$ 具有有穷对数测 $lmE_1<+\infty$，满足：对满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 的所有 z 和 $(k,j)\in\Gamma$，我们有

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\leq r^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{4}$$

在介绍下面引理之前，需要一些记号。对集合 $E\subset(1,\infty)$，$m_l(E)=\int_E\frac{\mathrm{d}t}{t}$ 表示 E 的对数测度，

$$\overline{\log dens}E=\limsup_{r\to\infty}\frac{m_l\left(E\cap(0,r]\right)}{\log r}$$

和

$$\underline{\log dens}E=\liminf_{r\to\infty}\frac{m_l\left(E\cap(0,r]\right)}{\log r}$$

分别称为集合 E 的上对数密度和下对数密度。

引理 2[9]：假设 $g(z)$是超越整函数，满足 $0\leq\mu(g)<1$，则对每一个 $\alpha\in(\mu(g),1)$ 存在集合 $E_2\subset(0,\infty)$，使得 $\overline{\log dens}E_2\geq 1-\frac{\mu(g)}{\alpha}$，其中

$$E_2=\left\{r\in[0,\infty):m(r)>M(r)\cos\pi\alpha\right\},\quad m(r)=\inf_{|z|=r}\log|g(z)|,M(r)=\sup_{|z|=r}\log|g(z)|。$$

注 1：在引理 2 中，若 $g(z)$的级 $\sigma(g)<1$，则对每一个 $\alpha\in(\sigma(g),1)$，存在集合 $E_2\subset(0,\infty)$，使得

$$\overline{\log dens}E_2\geq 1-\frac{\sigma(g)}{\alpha},$$

其中 $E_2=\left\{r\in[0,\infty):m(r)>M(r)\cos\pi\alpha\right\}$。

引理 3[5]：假设 $g(z)$是 $0<\mu(g)<\frac{1}{2}$ 的整函数，$A(z)$为级 $\sigma(A)<\infty$ 的亚纯函数，如果 $A(z)$有一个有限亏值 a，亏量 $\delta=\delta(a,A)>0$，则对任给 $\varepsilon>0$ 存在实数序列 $\{R_n\}$，当 $n\to\infty$ 时，$R_n\to\infty$，使得下面两个不等式对充分大的 n 成立：

$$\left|g\left(R_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)\right|>\exp\left\{R_n^{\mu(g)-\varepsilon}\right\},\ \varphi\in[0,2\pi); \tag{5}$$

$$m(F_n)=:m\left\{\theta\in[0,2\pi):\log\left|A\left(R_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-a\right)\right|<-\frac{\delta}{4}T(R_n,A)\right\}\geq d>0, \tag{6}$$

其中 d 是仅依赖于 $\sigma(A),\mu(g)$ 和 δ 的常数。

引理 4[10]：假设 $g(z)$是亚纯函数，级 $\sigma(g)=\beta<+\infty$，那么对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个线测度和对数测度

均为有限的集合 $E_3\subset(1,+\infty)$，使得当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_3, r\to+\infty$ 时

$$|g(z)|\le\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}. \tag{7}$$

引理 5[6]：假设 $f(z)$ 是亚纯函数。满足 $\lambda(1/f)<\mu(f)\le\sigma(f)=\sigma<\frac{1}{2}$，那么对任给 $\varepsilon>0$，存在子集 $H\subset(1,+\infty)$ 具有上对数密度 $\overline{\log dens}H>0$，满足对 $|z|=r\in H$ 的所有 z 有

$$|f(z)|\ge\exp\{(1+o(1))r^{\sigma-\varepsilon}\}. \tag{8}$$

引理 6[6]：假设 s 为一正整数，$f(z)=\frac{g(z)}{d(z)}$ 为超越亚纯函数，其中 $g(z)$，$d(z)$为整函数，满足

$$\mu(g)=\mu(f)=\mu\le\sigma(g)=\sigma(f)\le+\infty,\ \lambda(d)=\sigma(d)=\lambda(1/f)=\beta<\mu.$$

那么存在子集 $E_4\subset(1,+\infty)$ 具有有穷对数测度，取 z 满足

$$|z|=r\notin[0,1]\cup E_4,\ |g(z)|=M(r,g)$$

时，

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right|\le r^{2s}. \tag{9}$$

引理 7[11]：假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1},F\not\equiv0$ 是有限级亚纯函数，如果 $f(z)$ 是

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=F$$

的亚纯解，并且 $\sigma(f)=\infty$，则有 $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty.$

定理 1 的证明

假设 $f(z)(\not\equiv0)$ 为(2)的有理函数解，由于 $\sigma(A_s)\ne\sigma(A_0)$，如果 $f(z)$ 为在 $z_0(|z_0|<\infty)$ 有 $n\ge1$ 阶极点的有理函数或 $f(z)$ 为次数 $\deg f\ge s-1$ 的多项式，那么 $\sigma\left(f^{(k)}+\cdots+A_sf^{(s)}+\cdots+A_0f\right)>0$，矛盾。如果 $f(z)$ 为次数 $\deg f<s-1$ 的多项式，那么 $\sigma\left(f^{(k)}+\cdots+A_sf^{(s)}+\cdots+A_0f\right)=\sigma(A_0)>0$，矛盾。

故 $f(z)(\not\equiv0)$ 为(2)的超越亚纯解。

下面假设 $f(z)(\not\equiv0)$ 为(2)的超越亚纯解，$\sigma(f)=\sigma<\infty$，并设 a 为 $A_s(z)$ 的有限亏值，亏量 $\delta(a,A_s)=\delta>0$。由方程(2)得：

$$\begin{aligned}|A_0(z)|\le&\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|+\cdots+\left|\frac{f^{(s+1)}(z)}{f(z)}\right||A_{s+1}(z)|+\left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right|\left(|A_s(z)-a|+|a|\right)\\&+\left|\frac{f^{(s-1)}(z)}{f(z)}\right||A_{s-1}(z)|+\cdots+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right||A_1(z)|.\end{aligned} \tag{10}$$

由引理 1 存在集合 $E_1\subset(1,\infty)$ 具有有穷对数测度，则对于满足 $|z|=r\notin E_1\cup[0,r_0], r_0>1$ 的所有 z 我们有

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\le r^{j(\sigma-1+\varepsilon)}\quad(j=1,2,\cdots,k). \tag{11}$$

设 $A_0(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$，其中 $g(z)$是整函数，$h(z)$是由 $A_0(z)$ 的极点构成的典型乘积，且 $\lambda(h)=\sigma(h)$，

显然有 $\lambda(1/A_0)=\lambda(h)=\sigma(h)<\sigma(A_0)$。因此 $\sigma(g)=\sigma(A_0)$。

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}(\sigma(A_0)-b)$，由引理 2 注 1 知，存在集合 $E_2\subset(1,\infty)$ 满足 $\overline{\log dens}E_2\geq 1-\frac{\sigma(g)}{\alpha}$, 其中

$$\alpha=\frac{\sigma(g)+\frac{1}{2}}{2},\quad E_2=\{r\in[0,\infty):m(r)>M(r)\cos\pi\alpha\},$$
$$m(r)=\inf_{|z|=r}\log|g(z)|,\quad M(r)=\sup_{|z|=r}\log|g(z)|.$$

由于存在 $R_0(>1)$，使得对所有满足 $|z|=r\in E_2\setminus[0,R_0]$ 的 z 有 $|g(z)|\geq\exp\{r^{\sigma(g)-\varepsilon_0/2}\}$ 且对所有满足 $|z|=r>R_0$ 的 z 有 $|h(z)|\leq\exp\{r^{\sigma(h)+\varepsilon_0}\}$。因此对满足 $|z|=r\in E_2\setminus[0,R_0]$ 的所有 z 有

$$|A_0(z)|\geq\frac{\exp\{r^{\sigma(g)-\varepsilon_0/2}\}}{\exp\{r^{\sigma(h)+\varepsilon_0}\}}>\exp\{r^{\sigma(g)-\varepsilon_0}\}\tag{12}$$

由于 $b=\max\{\sigma(A_j)(j\neq 0,s),\lambda(1/A_0)\}$，由引理 4，可知对上述的 ε_0 存在集合 $E_3\subset(1,\infty)$，其线测度和对数测度均有限，当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_3$ 且 r 充分大时，有

$$|A_j(z)|\leq\exp\{r^{b+\varepsilon_0}\}(j\neq 0,s)\tag{13}$$

由引理 3，可知，存在序列 $\{R_n\}$ 满足

$$m(F_n)=:m\left\{\theta\in[0,2\pi):\log\left|A_s\left(R_n e^{i\theta-a}\right)-a\right|<-\frac{\delta}{4}T(R_n,A_s)\right\}\geq d>0\tag{14}$$

对充分大的 n 取 $\theta_n\in F_n$，由(10)，(11)，(13)，(14)得

$$\begin{aligned}\left|A_0\left(R_n e^{i\theta_n}\right)\right|&\leq R_n^{k\sigma}\left(1+(k-2)\exp\{R_n^{b+\varepsilon_0}\}+\exp\left\{-\frac{\delta}{4}T(R_n,A_s)\right\}+|a|\right)\\&\leq(k-2)R_n^{k\sigma}\exp\{R_n^{b+\varepsilon_0}\}(1+o(1))\end{aligned}\tag{15}$$

再由(12)，(15)得

$$\exp\{R_n^{\sigma(g)-\varepsilon_0}\}\leq(k-2)R_n^{k\sigma}\exp\{R_n^{b+\varepsilon_0}\}(1+o(1))\qquad (1$$

由于 $\sigma(g)-\varepsilon_0>b+\varepsilon_0$，可知(16)式显然矛盾。故 $\sigma(f)=\infty$。

令 $g(z)=f(z)-\varphi(z)$，那么 $\sigma(g)=\sigma(f)=\infty$ 和 $\overline{\lambda}(g)=\overline{\lambda}(f-\varphi)$。将 $f=g+\varphi$ 代入(2)，得到

$$g^{(k)}+A_{k-1}g^{(k-1)}+\cdots+A_0 g=-\left\{\varphi^{(k)}+A_{k-1}\varphi^{(k-1)}+\cdots+A_0\varphi\right\}\tag{17}$$

注意到方程(17)可能具有有限级解，但这里可以仅讨论满足 $g(z)=f(z)-\varphi(z)$ 为无穷级的解。所以仅需对方程(17)的无穷级亚纯解 g 证明 $\overline{\lambda}(g)=\infty$ 成立。由方程(2)的所有非零亚纯解有无穷级及 $\varphi(z)(\neq 0)$ 为有限级亚纯解，可知

$$\varphi^{(k)}+A_{k-1}\varphi^{(k-1)}+\cdots+A_0\varphi\not\equiv 0\tag{18}$$

对方程(17)由引理 5 和(18)可知，$\overline{\lambda}(g)=\overline{\lambda}(f)=\sigma(f)=\infty$。因此 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$。

定理 2 的证明

假设 $f(z)(\not\equiv 0)$ 为(3)的有理函数解，由于 $\sigma(A_s)\neq\sigma(A_0),\sigma(A_s)\neq\sigma(F)$，如果 $f(z)$ 为在 $z_0\left(|z_0|<\infty\right)$ 有 $n\geq 1$ 阶极点的有理函数或 $f(z)$ 为次数 $\deg f\geq s-1$ 的多项式，那么 $\sigma\left(f^{(k)}+\cdots+A_s f^{(s)}+\cdots+A_0 f\right)\neq\sigma(F)$，矛盾。如果 $f(z)$ 为次数 $\deg f<s-1$ 的多项式，那么 $\sigma\left(f^{(k)}+\cdots+A_s f^{(s)}+\cdots+A_0 f\right)=\sigma(A_0)>\sigma(F)$，矛盾。故 $f(z)(\not\equiv 0)$ 为(3)的超越亚纯解。

下面假设 $f(z)(\not\equiv 0)$ 为(3)的超越亚纯解，$\sigma(f)=\sigma<+\infty$。由引理 1，存在集合 $E_1\subset(1,\infty)$ 具有有穷对数测度，则对于满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 的所有 z 我们有

$$\left|\frac{f^{(i)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\leq r^{(i-j)(\sigma-1+\varepsilon)}\quad(0\leq j<i\leq k)\tag{19}$$

由于 $b=\max\left\{\sigma(F),\sigma(A_j)(j\neq 0,s),\lambda(1/A_0)\right\}$，由引理 4，对任给 $\varepsilon_1>0$，存在一个线测度和对数测度均有限的集合 $E_3\subset(1,\infty)$，使得当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_3$ 且 r 充分大时，有

$$\left|A_j(z)\right|\leq\exp\left\{r^{b+\varepsilon_1}\right\}\quad(j\neq 0,s),\quad\left|F(z)\right|\leq\exp\left\{r^{b+\varepsilon_1}\right\}.\tag{20}$$

设 z_0 为 f 的 n 阶极点，但 z_0 不是 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1},F$ 的极点，在(3)中仅有一项即 $f^{(k)}$ 有最高阶的极点，其阶数为 $n+k$，显然矛盾。所以 f 的极点仅发生在 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1},F$ 的极点处。由于的 f 极点阶数是有限的，所以 $\lambda(1/f)\leq b.$ 由 Hadamard 分解定理([12]，定理 7.6)知，$f(z)$ 可表示为 $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$，其中 $p(z)$为整数，$q(z)$是由 $f(z)$ 的极点构成的典型乘积，并满足

$$\lambda(q)=\sigma(q)=\lambda(1/f)\leq b,\quad\sigma(p)=\sigma(f)=\sigma$$

比较(3)各项的增长性，可知 $\mu(f)=\mu(p)>b.$

故有

$$\lambda(q)=\sigma(q)=\lambda(1/f)<\mu(f)=\mu(p)\leq\sigma(p)=\sigma(f)=\sigma.\tag{21}$$

对于整函数 $p(z)$，$q(z)$，取 z 满足 $|z|=r\notin[0,1],\left|p(z)\right|=M(r,p)$，对任意 $\varepsilon_2\left(0<\varepsilon_2<\min\left\{\varepsilon_1,\dfrac{\sigma(p)-\sigma(q)}{2}\right\}\right)$，存在 $R_1(>1)$，当 $r>R_1$ 时有

$$M(r,p)\geq\exp\left\{r^{\sigma(p)-\varepsilon_2}\right\},\quad\left|q(z)\right|\leq\exp\left\{r^{\sigma(q)+\varepsilon_2}\right\}\tag{22}$$

取 z 满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_3\cup E_4$，$\left|p(z)\right|=M(r,p)$，由(20)，(22)得

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|=\left|\frac{F(z)q(z)}{M(r,p)}\right|\leq\exp\left\{r^{b+\varepsilon_1}\right\}.\tag{23}$$

以下分两种情况进行讨论.

1) $\sigma(A_s)<\sigma(A_0)<\dfrac{1}{2}$;

2) $\sigma(A_0)<\sigma(A_s)<\dfrac{1}{2}$.

对于情况 1)，当 $\sigma(A_s)<\sigma(A_0)<\frac{1}{2}$ 时，

由方程(3)得

$$\left|A_0(z)\right| \le \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + \left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right|\left|A_s(z)\right| + \cdots + \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\left|A_1(z)\right| \tag{24}$$

设 $A_0(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$，其中 $g(z)$是整函数，$h(z)$ 是由 $A_0(z)$ 极点构成的典型乘积，且 $\lambda(h)=\sigma(h)$，显然有 $\lambda(1/A_0)=\lambda(h)=\sigma(h)<\sigma(A_0)$。因此 $\sigma(g)=\sigma(A_0)$。取 $\varepsilon_1=\frac{1}{4}\left(\sigma(A_0)-b\right)$，由引理2注1知，存在集合 $E_2\subset[0,\infty)$ 满足 $\overline{\log dens}E_2 \ge 1-\frac{\sigma(g)}{\alpha}$，其中

$$\alpha=\frac{\sigma(g)+\frac{1}{2}}{2},\quad E_2=\left\{r\in[0,\infty): m(r)>M(r)\cos\pi\alpha\right\},$$
$$m(r)=\inf_{|z|=r}\log\left|g(z)\right|,\quad M(r)=\sup_{|z|=r}\log\left|g(z)\right|.$$

由于存在 $R_0(>1)$，使得对所有满足 $|z|=r\in E_2\setminus[0,R_0]$ 的 z 有 $\left|g(z)\right|\ge\exp\left\{r^{\sigma(g)-\varepsilon_1/2}\right\}$ 且对所有满足 $|z|=r>R_0$ 的 z 有 $\left|h(z)\right|\le\exp\left\{r^{\sigma(h)+\varepsilon_1}\right\}$。因此对满足 $|z|=r\in E_2\setminus[0,R_0]$ 的所有 z 有

$$\left|A_0(z)\right| \ge \frac{\exp\left\{r^{\sigma(g)-\varepsilon_1/2}\right\}}{\exp\left\{r^{\sigma(h)+\varepsilon_1}\right\}} > \exp\left\{r^{\sigma(g)-\varepsilon_1}\right\} \tag{25}$$

由引理 4，对任意 $\varepsilon_3\left(0<\varepsilon_3<\min\left\{\varepsilon_1,\frac{\sigma(A_0)-\sigma(A_s)}{2}\right\}\right)$，存在一个线测度和对数测度均为有限的集合 $E_3\subset(1,+\infty)$，使得当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_3$ 且 r 充分大时，

$$\left|A_s(z)\right| \le \exp\left\{r^{\sigma(A_s)+\varepsilon_3}\right\} \tag{26}$$

当 $|z|=r\in E_2\setminus\left([0,1]\cup E_1\cup E_3\cup E_4\right)$ 且 z 满足 $\left|p(z)\right|=M(r,p)$ 时，(19)，(20)，(23)~(26)得

$$\exp\left\{r^{\sigma(g)-\varepsilon_1}\right\} \le r^{k\sigma}\left(1+(k-1)\exp\left\{r^{b+\varepsilon_1}\right\}+\exp\left\{r^{\sigma(A_s)+\varepsilon_3}\right\}\right) \tag{27}$$

由于 $\sigma(g)-\varepsilon_1>b+\varepsilon_1$ 且 $\sigma(g)-\varepsilon_1>\sigma(A_s)+\varepsilon_3$，可知(27)式矛盾。

对于情况 2)，当 $\sigma(A_0)<\sigma(A_s)<\frac{1}{2}$ 时，

由方程(3)得

$$\begin{aligned}\left|A_s(z)\right| \le{} & \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| + \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right| + \cdots + \left|\frac{f^{(s+1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|\left|A_{s+1}(z)\right| \\ & + \left[\left|\frac{f^{(s-1)}(z)}{f(z)}\right|\left|A_{s-1}(z)\right| + \cdots + \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\left|A_1(z)\right| + \left|A_0(z)\right|\right]\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right|.\end{aligned} \tag{28}$$

由引理 4，对任意 $\varepsilon_4\left(0<\varepsilon_4<\min\left\{\varepsilon_1,\frac{\sigma(A_s)-\sigma(A_0)}{2}\right\}\right)$，存在一个线测度和对数测度均为有限的集合 $E_3\subset(1,+\infty)$，使得当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_3$ 且 r 充分大时，

$$\left|A_0(z)\right| \le \exp\left\{r^{\sigma(A_0)+\varepsilon_4}\right\}. \tag{29}$$

由已知 $\lambda(1/A_s) < \mu(A_s) \le \sigma(A_s) < \frac{1}{2}$，由引理 5，对上述 ε_1，存在子集 $H \subset (1,+\infty)$ 具有上对数密度 $\overline{\log dens}H > 0$，满足对 $|z| = r \in H$ 的所有 z 有

$$\left|A_s(z)\right| \ge \exp\left\{(1+o(1))\, r^{\sigma(A_s)-\varepsilon_1}\right\}. \tag{30}$$

由引理 6，存在子集 $E_4 \subset (1,+\infty)$ 具有有穷对数测度，取 z 满足 $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$，$|p(z)| = M(r,p)$ 时，

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \le r^{2s} \tag{31}$$

当 $|z| = r \in H \setminus ([0,1] \cup E_1 \cup E_3 \cup E_4)$，且 z,满足 $|p(z)| = M(r,p)$ 时，由(19)，(20)，(23)，(28)-(31)得

$$\begin{aligned} \exp\left\{r^{\sigma(g)-\varepsilon_1}\right\} &\le r^{2s} \exp\left\{r^{b+\varepsilon_1}\right\} + r^{k\sigma} + (k-s-1) r^{k\sigma} \exp\left\{r^{b+\varepsilon_1}\right\} \\ &\quad + (s-1) r^{k\sigma+2s} \exp\left\{r^{b+\varepsilon_1}\right\} + r^{2s} \exp\left\{r^{\sigma(A_0)+\varepsilon_4}\right\} \\ &\le r^{k\sigma+2s}\left(k \exp\left\{r^{b+\varepsilon_1}\right\} + \exp\left\{r^{\sigma(A_0)+\varepsilon_4}\right\}\right) \end{aligned} \tag{32}$$

由于 $\sigma(A_s) - \varepsilon_1 > \sigma(A_0) - \varepsilon_1 > b + \varepsilon_1$ 且 $\sigma(A_s) - \varepsilon_1 > \sigma(A_0) + \varepsilon_4$，可知(32)式矛盾。综上所述，$\sigma(f) = +\infty$。令 $g(z) = f(z) - \varphi(z)$，那么 $\sigma(g) = \sigma(f) = \infty$ 和 $\overline{\lambda}(g) = \overline{\lambda}(f-\varphi)$。将 $f = g + \varphi$ 代入(3)，得到

$$g^{(k)} + A_{k-1} g^{(k-1)} + \cdots + A_0 g = F - \left\{\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0 \varphi\right\} \tag{33}$$

注意到方程(33)可能具有有限级解，但这里可以仅讨论满足 $g(z) = f(z) - \varphi(z)$ 为无穷级的解。所以仅需对方程(33)的无穷级亚纯解 g 证明 $\overline{\lambda}(g) = \infty$ 成立。

由方程(3)的所有非零亚纯解有无穷级及 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 为有限级亚纯解，可知

$$F - \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0\varphi \not\equiv 0. \tag{34}$$

对方程(33)由引理 5 和(34)可知，$\overline{\lambda}(g) = \overline{\lambda}(f) = \sigma(f) = \infty$。

因此 $\overline{\lambda}(f-\varphi) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty$。

参考文献 (References)

[1] 杨乐 (1982) 值分布论及其新研究. 科学出版社, 北京.

[2] 仪洪勋, 杨重骏 (1988) 亚纯函数唯一性理论. 科学出版社, 北京.

[3] Gundersen, G. (1988) Finite order solutions of second order linear differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **305**, 415-429.

[4] Hellenstein, S., Miles, J. and Rossi, J. (1991) On the growth of solutions of $f'' + gf' + hf = 0$. *Transactions of the American Mathematical Society*, **324**, 693-705.

[5] Wu, P.C. and Zhu, J. (2011) On the growth of solutions of the complex differential equation $f'' + A(z)f' + B(z)f = 0$. *Science China Mathematics*, **54**, 939-947.

[6] 陈宗煊 (1999) 关于高阶线性微分方程亚纯解的增长率. *数学学报*, **3**, 551-558.

[7] 肖丽鹏, 陈宗煊 (2005) 一类高阶微分方程亚纯解得增长性. *数学研究*, **3**, 265-271.

[8] Gundersen, G. (1988) Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates. *London Mathematical Society*, **37**, 88-104.

[9] Barry, P.D. (1970) Some theorems related to the $\cos ?\rho$ theorem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **21**, 334-360.

[10] 陈宗煊 (1996) 二阶亚纯系数微分方程亚纯解的零点. *数学物理学报*, **3**, 276-283.

[11] Chen, Z.-X. (1994) Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations. *Analysis*, **14**, 425-538.
[12] 李锐夫, 戴崇基, 宋国栋 (1988) 复变函数续论. 高等教育出版社, 北京.