Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 57-63
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.41009 Published Online January 2014 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Positive Solutions for Second-Order Nonlinear Boundary Value Problems with Integral Boundary Conditions

Jian Liu, Hanying Feng

Department of Basic Courses, Shijiazhuang Mechanical Engineering College, Shijiazhuang
Email: jian_liu1990@163.com

Received: Dec. 31st, 2013; revised: Jan. 9th, 2014; accepted: Jan. 15th, 2014

Abstract: In this article, a second-order nonlinear boundary value problem with integral boundary conditions is investigated. By calculating, the Green's function for boundary value problem subject to homogeneous boundary conditions and its properties are given. By using the fixed point theory in cones, the existence results for at least one positive solution for the problem are established when *f* is superlinear or sublinear.

Keywords: Positive Solution; Integral Boundary Condition; Fixed Point Theory

带积分边界条件的二阶非线性边值问题的正解

刘　健，封汉颍

石家庄机械工程学院基础部，石家庄
Email: jian_liu1990@163.com

收稿日期：2013 年 12 月 31 日；修回日期：2014 年 1 月 9 日；录用日期：2014 年 1 月 15 日

摘　要：研究一类带积分边界条件的二阶非线性边值问题，通过计算给出齐次边界条件下边值问题的格林函数及性质。利用锥上的不动点定理，得到了当 f 满足超线性或次线性时边值问题正解的存在性结果。

关键词：正解；积分边界条件；不动点定理

1. 引言

在物理学、生物学和工程实践等领域中，许多问题都可以抽象为常微分方程边值问题进行研究。近年，非线性常微分方程边值问题正解存在性及多解性成为一个重要研究领域，特别是对二阶非线性常微分方程边值问题的研究已有许多丰硕的成果[1,2]。

文献[3]利用不动点指数定理，研究了一类二阶三点非线性常微分方程边值问题，获得了正解存在性的结果；文献[4]利用锥上的不动点定理研究了一类非线性二阶常微分方程积分边值问题，得到了边值问题正解存在的充分条件。受此启发，本文研究以下二阶非线性边值问题正解的存在性：

$$\begin{cases} -x''(t)-\beta^2 x(t)=h(t)f\left(t,x(t)\right),\ 0<t<1, \\ x(0)=\int_0^1 a(s)x(s)\mathrm{d}s, \\ x(1)-\delta x(\eta)=\int_0^1 b(s)x(s)\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\delta>0,\beta\in(0,\pi/2),\eta\in(0,1)$, $h\in C([0,1]\to(0,+\infty))$, $f\in C([0,1]\times(0,+\infty)\to[0,+\infty))$, $a,b\in C[0,1]$ 为正。在适当条件下，运用锥上的不动点定理研究边值问题一个正解的存在性。

下面给出证明本文结果所用的工具：

引理 1.1[5,6]**：** 设 $K\subset E$ 为 Banach 空间 E 中的一个锥，Ω_1,Ω_2 是 E 中的有界开集，$0\in\Omega_1,\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，令 $A:K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to K$ 是一个全连续算子使得

1) 当 $u\in K\cap\partial\Omega_1$，有 $\|Au\|\le\|u\|$ 及当 $u\in K\cap\partial\Omega_2$，有 $\|Au\|\ge\|u\|$。或者

2) 当 $u\in K\cap\partial\Omega_1$，有 $\|Au\|\ge\|u\|$ 及当 $u\in K\cap\partial\Omega_2$，有 $\|Au\|\le\|u\|$。

则 A 在 $K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 中有一个不动点。

2. 预备知识和引理

首先，介绍有关概念和引理。

引理 2.1： 对于以下边值问题

$$\begin{cases}-x''(t)-\beta^2x(t)=p(t),0<t<1,\\ x(0)=0,\ \ x(1)=\delta x(\eta),\end{cases}$$

其解 $x(t)=\int_0^1G(t,s)p(s)\mathrm{d}s,t\in[0,1]$，$G(t,s)$ 为格林函数：

$$G(t,s)=\frac{1}{\beta(\sin\beta-\delta\sin\beta\eta)}\begin{cases}[\sin\beta(1-s)+\delta\sin\beta(s-\eta)]\sin\beta t, & 0\le t\le s\le\eta,\\ \sin\beta s\sin\beta(1-t)+\delta\sin\beta s\sin\beta(t-\eta), & s\le t,s\le\eta,\\ \sin\beta(1-s)\sin\beta t, & t\le s,\eta\le s,\\ \sin\beta s\sin\beta(1-t)+\delta\sin\beta\eta\sin\beta(t-s), & \eta\le s\le t\le 1.\end{cases}\tag{2.1}$$

注： 根据格林函数的定义及性质与边界条件，通过计算易得到 $G(t,s)$。

(H_1) $\sin\beta-\delta\sin\beta\eta>0,\delta\cos\beta\eta-\cos\beta\ge0$；

(H_2) $\sin\beta(1-\eta)-\delta\sin\beta\eta>0,\sin\beta\alpha-\delta\sin\beta\eta>0,$ 其中 $\alpha\in(0,1/2)$。

引理 2.2： 存在一个连续函数 $\Phi:[0,1]\to[0,+\infty)$ 和一个常数 $\gamma\in(0,1]$ 使得：

1) 若(H_1)成立，对于任意 $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$，有 $0\le G(t,s)\le\Phi(s)$；

2) 若(H_1) (H_2)成立，对于任意 $(t,s)\in[\alpha,1-\alpha]\times[0,1]$，有 $G(t,s)\ge\gamma\Phi(s)$。

证明： 首先，当 $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$ 时，显然有 $G(t,s)\ge0$ 成立。

接下来给出连续函数 $\Phi(s)$ 和常数 γ。令 $g(s)=s(1-s)$，$H(t,s)=\mu g(s)-G(t,s)$。

先给出格林函数的上界。只需证存在 $\mu=\mu^*>0$ 使 $H(t,s)_{s\ge t}\ge0,\ H(t,s)_{s\le t}\ge0,\ t,s\in[0,1]$。

情形 1： $s\in[0,\eta]$。如果 $s=0,$ 则有 $G(t,s)=0,g(s)=0,$ 结论成立。如果 $s\in(0,\eta]$ 则

$$\begin{aligned}H(t,s)_{s\ge t}&=\mu s(1-s)-\frac{[\sin\beta(1-s)+\delta\sin\beta(s-\eta)]\sin\beta t}{\beta(\sin\beta-\delta\sin\beta\eta)}\ge\left[\mu-\frac{\sin\beta(1-s)\sin\beta t}{(1-s)(\sin\beta-\delta\sin\beta\eta)\beta t}\right]t(1-s)\\&\ge\left[\mu-\frac{\sin\beta(1-\eta)}{(1-\eta)(\sin\beta-\delta\sin\beta\eta)}\right]t(1-s)\end{aligned}$$

因此对 $\mu\ge\mu_1:=\dfrac{\sin\beta(1-\eta)}{(1-\eta)(\sin\beta-\delta\sin\beta\eta)}$，我们有 $H(t,s)_{s\ge t}\ge0$。

$$\begin{aligned}H(t,s)_{s\le t}&=\mu s(1-s)-\frac{[\sin\beta(1-t)+\delta\sin\beta(t-\eta)]\sin\beta s}{\beta(\sin\beta-\delta\sin\beta\eta)}\ge\mu s(1-s)-\frac{(1+\delta)\sin\beta(1-s)\sin\beta s}{\beta(\sin\beta-\delta\sin\beta\eta)}\\&\ge\left[\mu-\frac{(1+\delta)\sin\beta(1-s)\sin\beta s}{\beta s(\sin\beta-\delta\sin\beta\eta)(1-s)}\right]s(1-s)\ge\left[\mu-\frac{(1+\delta)\sin\beta(1-\eta)}{(\sin\beta-\delta\sin\beta\eta)(1-\eta)}\right]s(1-s)\end{aligned}$$

因此对 $\mu \ge \mu_2 := \dfrac{(1+\delta)\sin\beta(1-\eta)}{(\sin\beta-\delta\sin\beta\eta)(1-\eta)}$, 我们有 $H(t,s)_{s\le t} \ge 0$ 。

情形 2： $s\in[\eta,1]$。如果 $s=1$, 则有 $G(t,s)=0, g(s)=0,$ 结论成立。如果 $s\in[\eta,1)$ 则同情形 1 易得 μ_3,μ_4 分别使 $H(t,s)_{s\ge t}\ge 0, H(t,s)_{s\le t}\ge 0$ 成立。

取 $\mu=\mu^*\ge\max\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4\}$ ，对 $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$ ，有 $H(t,s)\ge 0$ ，相应地 $\mu^* g(s)\ge G(t,s)$ 。

设 $\Phi(s)=\mu^* g(s)$, 则 $G(t,s)\le\Phi(s)$ ， $t,s\in[0,1]$ 。

同理，可证存在 $\mu=\mu_*>0$ 使 $H(t,s)_{s\ge t}\le 0,\ H(t,s)_{s\le t}\le 0,\ (t,s)\in[\alpha,1-\alpha]\times[0,1]$。由此即得格林函数下界。取 $0<\mu_*\le\min\{\mu_5,\mu_6,\mu_7,\mu_8\}$, 对 $\mu=\mu_*$, 有 $H(t,s)\le 0,\ (t,s)\in[\alpha,1-\alpha]\times[0,1]$ 。相应地 $\mu_* g(s)\le G(t,s)$ ，则 $G(t,s)\ge\gamma\Phi(s)$ ， $(t,s)\in[\alpha,1-\alpha]\times[0,1]$ ，其中 $\gamma := \mu_*/\mu^*\in[0,1]$ 。

引理 2.3： $p,q_1,q_2\in L[0,1]$ ，以下边值问题

$$\begin{cases} -x''(t)-\beta^2x(t)=p(t), 0<t<1, \\ x(0)=\int_0^1 a(s)q_1(s)\mathrm{d}s, \\ x(1)-\delta x(\eta)=\int_0^1 b(s)q_2(s)\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{2.2}$$

有唯一解 $x(t)=\int_0^1 G(t,s)p(s)\mathrm{d}s+\left(1-\tan\beta t\dfrac{\cos\beta-\delta\cos\beta\eta}{\sin\beta-\delta\sin\beta\eta}\right)\int_0^1 a(s)q_1(s)\mathrm{d}s+\dfrac{\sin\beta t}{\sin\beta-\delta\sin\beta\eta}\int_0^1 b(s)q_2(s)\mathrm{d}s$ 。

证明： 设 $\bar{x}$ 是边值问题

$$\begin{cases} -x''(t)-\beta^2x(t)=0, 0<t<1, \\ x(0)=\int_0^1 a(s)q_1(s)\mathrm{d}s, \\ x(1)-\delta x(\eta)=\int_0^1 b(s)q_2(s)\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{2.3}$$

的一个解，则边值问题(2.2)等价于

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)p(s)\mathrm{d}s+\bar{x} \tag{2.4}$$

设 $\bar{x}=C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t$ 。由边界条件得到

$$C_1=\frac{1}{\cos\beta t}\int_0^1 a(s)q_2(s)\mathrm{d}s,\ C_2=\frac{1}{\sin\beta-\delta\sin\beta\eta}\left[\int_0^1 b(s)q_2(s)\mathrm{d}s-\frac{\cos\beta-\delta\cos\beta\eta}{\cos\beta t}\int_0^1 a(s)q_1(s)\mathrm{d}s\right].$$

代入(2.4)易得证引理成立。

定义辅助函数 $\phi(t,s)=\left(1-\tan\beta t\dfrac{\cos\beta-\delta\cos\beta\eta}{\sin\beta-\delta\sin\beta\eta}\right)a(s)+\dfrac{\sin\beta t}{\sin\beta-\delta\sin\beta\eta}b(s)$ ， $0\le t,s\le 1$ 。

$C[0,1]$ 为实 Banach 空间，其范数定义 $\|x\|=\sup_{t\in[0,1]}|x(t)|$ 。锥 $P=\{x\in C[0,1]: x(t)\ge 0, t\in[0,1]\}$ ，

$$K=\left\{x\in P: \min_{t\in[\alpha,1-\alpha]}x(t)\ge\gamma\frac{1-M}{1-m}\|x\|\right\} \tag{2.5}$$

(H3) $a,b\in C([0,1],[0,+\infty))$ 使辅助函数 $\phi(t,s)$ 满足

$$\begin{aligned} 0\le m &:= \min\{\phi(t,s): 0\le t,s\le 1\} \\ &\le M := \max\{\phi(t,s): 0\le t,s\le 1\}<1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

定义线性算子 $S: C[0,1]\to C[0,1]$

$$(Sx)(t)=\int_0^1\phi(t,s)x(s)\mathrm{d}s \tag{2.7}$$

引理 2.4： 线性算子 S 有界，$S(P)\subset P$. 另外，$I-S$ 可逆，$\left\|(I-S)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-M}$.

证明： 1) 由 S 的定义得其线性，由(2.6) (2.7)知对 $\forall x\in C[0,1]$ 有 $\left|(Sx)(t)\right|\le\int_0^1\phi(t,s)\left|x(s)\right|\mathrm{d}s\le M\|x\|$, 这即证明了其有界性。

2) 因为对 $\forall t,s\in[0,1]$ 有 $\phi(t,s)\ge m\ge 0$, 故对 $\forall x\in P$ 有 $(Sx)(t)\ge 0$, 因此 $S(P)\subset P$ 。

3) 由(2.6)与(2.7)知对 $\forall x\in C[0,1]$ 有

$\|Sx\|=\max\limits_{0\le t\le 1}\left|(Sx)(t)\right|\le\max\limits_{0\le t\le 1}\int_0^1\phi(t,s)\left|x(s)\right|\mathrm{d}s\le M\|x\|<\|x\|$，由此导出 $\|S\|\le M<1$, $I-S$ 可逆。

对 $t\in[0,1]$, 当且仅当 $x(t)=y(t)+(Sx)(t)$ 时 $x(t)=(I-S)^{-1}y(t)$。S 的定义表明

$$x(t)=y(t)+\int_0^1\phi(t,s)x(s)\mathrm{d}s \tag{2.8}$$

由 $M<1$ 知 1 不为核 $\phi(t,s)$ 的特征值，故(2.8)对任意连续函数 y 有唯一解 x。逐次代入得

$$x(t)=y(t)+\int_0^1 H(t,s)y(s)\mathrm{d}s \tag{2.9}$$

预解核 $H(t,s)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\phi_j(t,s), 0\le t,s\le 1,\ \phi_1(t,s)=\phi(t,s),\ \phi_j(t,s)=\int_0^1\phi(t,\tau)\phi_{j-1}(\tau,s)\mathrm{d}\tau,\ (j=2,3,\cdots).$

$\left|\phi(t,s)\right|\le M<1$, 说明以上迭代序列收敛。另外易得 $H(t,s)\le\frac{M}{1-M}$。由 $\phi(t,s)\ge m$ 亦可得到 $H(t,s)\ge\frac{m}{1-m}$。因此由(2.8) (2.9)有

$$(I-S)^{-1}y(t)=y(t)+\int_0^1 H(t,s)y(s)\mathrm{d}s \tag{2.10}$$

所以我们得到 $\left|(I-S)^{-1}y(t)\right|\le\left|y(t)\right|+\frac{M}{1-M}\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s\le\frac{1}{1-M}\|y\|$。

如下定义算子 $A:K\to P$

$$\begin{aligned}(Ax)(t)&=(Tx)(t)+\int_0^1 H(t,s)(Tx)(s)\mathrm{d}s\\(Tx)(t)&=\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{2.11}$$

则边值问题(1.1)正解的存在性问题等价于 K 中算子 A 不动点的存在性及个数问题。

3. 主要结果

下面给出主要结果及其证明。

定义：

$$f^0=\lim_{u\to 0^+}\sup_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u},\quad f_\infty=\lim_{u\to\infty}\inf_{t\in[\alpha,1-\alpha]}\frac{f(t,u)}{u};\quad f_0=\lim_{u\to 0^+}\inf_{t\in[\alpha,1-\alpha]}\frac{f(t,u)}{u};\quad f^\infty=\lim_{u\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}$$

定理 3.1： 假设(H_1)~(H_3)成立，则边值问题(1.1)在 $f^0=0$ 和 $f_\infty=\infty$ (超线性)或 $f_0=\infty$ 和 $f^\infty=0$ (次线性)时至少存在一个正解。

证明： 对 $\forall x\in K$，

$$\begin{aligned}Ax(t)=&\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\\&+\int_0^1 H(t,s)\int_0^1 G(s,\tau)h(\tau)f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\ t\in[0,1]\end{aligned} \tag{3.1}$$

由引理 2.2 及引理 2.4 可得

$$\begin{aligned}0\le Ax(t)&=\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\int_0^1 H(t,s)\int_0^1 G(s,\tau)h(\tau)f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\&\le\left(1+\frac{M}{1-M}\right)\int_0^1\Phi(s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=\frac{1}{1-M}\int_0^1\Phi(s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3.2}$$

这表明

$$\|Ax\| \le \frac{1}{1-M}\int_0^1 \Phi(s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s \tag{3.3}$$

由引理 2.2、引理 2.4 及(3.3)得

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s + \int_0^1 H(t,s)\int_0^1 G(s,\tau)h(\tau)f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \\ &\ge \gamma\left(1+\frac{m}{1-m}\right)\int_0^1 \Phi(s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s \ge \frac{\gamma}{1-m}\int_0^1 \Phi(s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s \ge \gamma\frac{1-M}{1-m}\|Ax\|,\ t\in[\alpha,1-\alpha]. \end{aligned}$$

即 $\min\limits_{t\in[\alpha,1-\alpha]} Ax(t) \ge \gamma\frac{1-M}{1-m}\|Ax\|$, 这说明 $AK \subset K$ 。从而易证 $A:K\to K$ 全连续。

首先考虑超线性情形： $f^0 = 0$ ， $f_\infty = \infty$ 。

因为 $f^0 = 0$, 选取 $H_1 > 0$ 使对任意 $t,u\in[0,1]\times(0,H_1)$, 有 $f(t,u)\le \varepsilon u$, 其中 $\varepsilon > 0$ 满足：

$$\frac{\varepsilon}{1-M}\int_0^1 \Phi(s)h(s)\mathrm{d}s \le 1 \tag{3.4}$$

因此，如果 $x\in K$ 且 $\|x\| = H_1$ ，由(3.2)和(3.4)有

$$\begin{aligned} Ax(t) &\le \frac{1}{1-M}\int_0^1 \Phi(s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s \\ &\le \frac{\varepsilon}{1-M}\int_0^1 \Phi(s)h(s)x(s)\mathrm{d}s \\ &\le \frac{\varepsilon}{1-M}\int_0^1 \Phi(s)h(s)\|x\|\mathrm{d}s \le H_1,\quad t\in[0,1] \end{aligned} \tag{3.5}$$

取 $\Omega_1 = \{x\in E : \|x\| < H_1\}$, (3.5)表明

$$\|Ax\| \le \|x\|,\ x\in K\cap\partial\Omega_1 \tag{3.6}$$

另一方面，因为 $f_\infty = \infty$ ，则 $\exists H > 0$ 使当 $(t,u)\in[\alpha,1-\alpha]\times[H,+\infty)$, 有 $f(t,u)\ge \rho u$ ，其中 $\rho > 0$ 的选取满足

$$\frac{\gamma^2\rho(1-M)}{(1-m)^2}\int_0^1 \Phi(s)h(s)\mathrm{d}s \ge 1 \tag{3.7}$$

令 $H_2 = \max\left\{2H_1, \frac{1-m}{1-M}\frac{H}{\gamma}\right\}$, $\Omega_2 = \{x\in E : \|x\| < H_2\}$ 。则对于 $x\in K$ 且 $\|x\| = H_2$ 有

$x(t)\ge \gamma\frac{1-M}{1-m}\|x\| = \gamma\frac{1-M}{1-m}H_2 \ge H$, $t\in[\alpha,1-\alpha]$ 。故对 $t\in[\alpha,1-\alpha]$ 有

$$\begin{aligned} Ax(t) &\ge \frac{\gamma}{1-m}\int_0^1 \Phi(s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s \\ &\ge \frac{\gamma\rho}{1-m}\int_0^1 \Phi(s)h(s)x(s)\mathrm{d}s \\ &\ge \frac{\gamma^2\rho(1-M)}{(1-m)^2}\|x\|\int_0^1 \Phi(s)h(s)\mathrm{d}s \ge \|x\| \end{aligned}$$

故有

$$\|Ax\| \ge \|x\|,\ x\in K\cap\partial\Omega_2 \tag{3.8}$$

根据定理 1.1 的第一部分知 A 有一个不动点 $x^*\in K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 也是边值问题(1.1)的正解。

接着，我们考虑次线性情形： $f_0 = \infty$ 和 $f^\infty = 0$ 。

因为 $f_0=\infty$，首先选取 $H_3>0$ 使当 $(t,u)\in[\alpha,1-\alpha]\times[0,H_3]$, 有 $f(t,u)\geq\sigma u$, 其中 $\sigma>0$ 满足

$$\frac{\gamma^2\sigma(1-M)}{(1-m)^2}\int_0^1\Phi(s)h(s)\mathrm{d}s\geq 1 \tag{3.9}$$

对于 $x\in K$ 且 $\|x\|=H_3$，由(3.9)，对 $t\in[\alpha,1-\alpha]$ 有

$$\begin{aligned}Ax(t)&\geq\frac{\gamma}{1-m}\int_0^1\Phi(s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\\&\geq\frac{\gamma\sigma}{1-m}\int_0^1\Phi(s)h(s)x(s)\mathrm{d}s\\&\geq\frac{\gamma^2\sigma(1-M)}{(1-m)^2}\|x\|\int_0^1\Phi(s)h(s)\mathrm{d}s\geq\|x\|\end{aligned}$$

因此取 $\Omega_3=\{x\in E:\|x\|<H_3\}$ 使得

$$\|Ax\|\geq\|x\|,\ x\in K\cap\partial\Omega_3 \tag{3.10}$$

因为 $f_\infty=0$, 则存在 $\bar{H}>0$ 使当 $u\geq\bar{H}$, 有 $f(t,u)\leq\mu u$ 。其中 μ 满足

$$\frac{\mu}{1-M}\int_0^1\Phi(s)h(s)\mathrm{d}s\leq 1 \tag{3.11}$$

考虑两种情形：

1) 若 f 有界，即对 $\forall x\in[0,+\infty)$, 有 $f(t,x)\leq N$ 。在该情形下选取

$$H_4=\max\left\{2H_3,\frac{N}{1-M}\int_0^1\Phi(s)h(s)\mathrm{d}s\right\}\text{ 使对于 }\forall x\in K\text{ 及 }\|x\|=H_4,$$

$$\begin{aligned}Ax(t)&\leq\frac{1}{1-M}\int_0^1\Phi(s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\\&\leq\frac{N}{1-M}\int_0^1\Phi(s)h(s)\mathrm{d}s\leq H_4,\ t\in[0,1]\end{aligned}\text{。}$$

因此，$\|Au\|\leq\|u\|$。

2) 若 f 无界，选取 $H_4=\max\{\bar{H},2H_3\}$ 使

$$f(t,x)\leq f(t,H_4),\ 0\leq x\leq H_4 \tag{3.12}$$

对 $x\in K$ 及 $\|x\|=H_4$, 由(3.2)、(3.11)和(3.12)，

$$\begin{aligned}Ax(t)&\leq\frac{1}{1-M}\int_0^1\Phi(s)h(s)f(s,H_4)\mathrm{d}s\\&\leq\frac{\mu H_4}{1-M}\int_0^1\Phi(s)h(s)\mathrm{d}s\leq H_4=\|x\|,\ t\in[0,1]\end{aligned}$$

即得 $\|Ax\|\leq\|x\|$。

因此，从两方面均可取 $\Omega_4=\{x\in E,\|x\|\leq H_4\}$ 使得

$$\|Ax\|\leq\|x\|,\ x\in K\cap\partial\Omega_4 \tag{3.13}$$

根据定理 1.1 的第二部分知 A 有一个不动点 $x^*\in K\cap(\bar{\Omega}_4\setminus\Omega_3)$ 同时是边值问题(1.1)的正解。

致谢

感谢国家自然科学基金和河北省自然科学基金的支持。

项目基金

国家自然科学基金资助项目(11271106)；河北省自然科学基金资助项目(A2012506010)。

参考文献 (References)

[1] 葛渭高 (2007) 非线性常微分方程边值问题. 科学出版社, 北京.

[2] 马如云 (2004) 非线性常微分方程非局部问题. 科学出版社, 北京.

[3] Han, X.L. (2007) Positive solutions for a three-point boundary value problem. *Nonlinear Analysis*, **66**, 679-688.

[4] Boucherif, A. (2009) Second-order boundary value problems with integral boundary conditions. *Nonlinear Analysis*, **70**, 364-371.

[5] Guo, D.J. and Lakshmikantham, V. (1988) Nonlinear problems in abstract cones. Academic Press, New York.

[6] Deimling, K. (1985) Nonlinear functional analysis. Springer, Berlin.