*Pure Mathematics* **理论数学, 2014, 4, 31-37**
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.41006 Published Online January 2014 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

# An Elementary Proof That a Simple Group of Order 360 Is Isomorphism to $A_6$

**Feng Zhou, Xingzhong Xu, Jun Liao, Heguo Liu***

Department of Mathematics, Hubei University, Wuhan
Email: thoufeng@163.com, *ghliu@hubu.edu.cn

Received: Dec. 1st, 2013; revised: Dec. 15th, 2013; accepted: Dec. 18th, 2013



**Abstract:** Only by using Sylow's theorem and basic permutation computation, we prove that a simple group of order 360 is isomorphic to $A_6$.

**Keywords:** Sylow's Theorem; Simple Group; $A_6$

# 360 阶单群同构于 $A_6$ 的初等群论证明

**周　峰，徐行忠，廖　军，刘合国***

湖北大学数学系，武汉
Email: thoufeng@163.com, *ghliu@hubu.edu.cn

收稿日期：2013 年 12 月 1 日；修回日期：2013 年 12 月 15 日；录用日期：2013 年 12 月 18 日

**摘　要：**仅用 Sylow 定理和最基本的置换计算证明了 360 阶单群一定同构于 $A_6$。

**关键词：**Sylow 定理；单群；$A_6$

## 1. 引言

本文采用的符号和术语都是标准的，见文献[1]。另外，我们进行置换计算时，按照从左至右的顺序进行。

我们知道，对 $n$ 阶的非交换单群，当 $n \le 1000$ 时，$n$ 只能是 60、168、360、504、660，并且阶不超过 1000 的非交换单群只有 5 个：60 阶单群 $A_5$、168 阶单群 $PSL(2,7)$、360 阶单群 $A_6$、504 阶单群 $PSL(2,8)$ 和 660 阶单群 $PSL(2,11)$。运用 Sylow 定理不难证明 60 阶单群同构于 $A_5$，见文献[2]和[3]。在文献[2]和[3]中，Huppert 和 Smith 分别用不同的初等群论方法证明了 168 阶单群同构于 $PSL(2,7)$，[4]利用文献[2]的方法证明了 660 阶单群同构于 $PSL(2,11)$。

在文献[5]中，Isaacs 用特征标的理论证明了 360 阶单群同构于 $A_6$，这是有限群论里的一个有名结论。在现有的群论书籍里，不论是在正文还是在练习中，都没有关于这个结论的完整无误的初等群论证明。例如，在文献[6]第八章的练习 8.12 中，Rotman 希望运用初等群论方法证明 360 阶单群同构于 $A_6$，但是他给出的提示“360 阶单群只有 6 个 Sylow 5-子群”明显是错误的，因为 $A_6$ 的 Sylow 5-子群的个数一定等于 36。本文后一作者曾经

*通讯作者。

与施武杰教授、张继平教授、李才恒教授、靳平教授等学者谈到这个现象。找到本文这个证明后，后一作者又与王杰教授、于浩然同志进行了深入的交流。王杰教授运用 Burnside 转移定理，在其讲义里给出了上述结论的纯粹群论证明。于浩然同志避开[5]里的特征标技术，继承[5]里关于这个结论论证的群论断言，证明了 360 阶单群同构于 $PSL(2,9)$，由此推出 360 阶单群必然同构于 $A_6$。这个证明也用到了 Burnside 转移定理，并且涉及到有限域里的相关技巧，这些也都是有意义的工作。最近，于浩然同志经过搜索考证，找到了 F.N.Cole 的文章[7]。Cole 运用置换群的技术证明了上述结论，相比较而言，本文的证明也许比[7]更初等些，本文仅用 Sylow 定理和最基本的置换计算证明了结论。除了 Sylow 定理和最基本的群论知识外，本文是完全自包含的，这个证明对初学者来说是容易理解的，作者希望它对群论教学具有借鉴和启发作用。

## 2. 关于 $A_6$

为了达到我们的目的，我们当然要从 $A_6$ 的元素和 Sylow 子群入手。

任取 $A_6$ 的元素 $g$，容易验证 $g$ 只能表示成形如

$$1,(12)(34),(123),(123)(456),(1234)(56),(12345)$$

的轮换形式，这样 $A_6$ 的元素的阶只能等于 1、2、3、4、5。接下来我们要逐步分析这些元的共轭类大小和计算 $A_6$ 的 Sylow 子群的个数，并确定其 Sylow 子群的结构。

1) $A_6$ 的 2 阶元只能表示成轮换 $(ab)(cd)$ 的形式，这样 $A_6$ 的 2 阶元一共有 $\frac{1}{2}\times C_6^2C_4^2=45$ 个。取 $\pi\in S_6$ 使 $\pi(a)=1,\ \pi(b)=2,\ \pi(c)=3,\ \pi(d)=4$，则有 $\pi^{-1}((ab)(cd))\pi=(12)(34)$。当 $\pi$ 是奇置换时，令 $\pi_1=\pi(56)$，此时就有 $\pi_1^{-1}((ab)(cd))\pi_1=(12)(34)$，这表明 $(ab)(cd)$ 在 $A_6$ 中共轭于 $(12)(34)$，从而这 45 个元素构成一个完整的共轭类。

$A_6$ 的 4 阶元只能表示为轮换 $(abcd)(ef)$ 的形式，这样 $A_6$ 的 4 阶元一共有 $C_6^4\times 3!=90$ 个。随之，$A_6$ 共有 $45+90=135$ 个 2-元。取 $x=(1234)(56),\ y=(12)(34)$，则有 $x^y=x^{-1}$，从而 $\langle x,y\rangle$ 为 8 阶二面体群 $D_8$，它是 $A_6$ 的 Sylow 2-子群。注意到在 $D_8$ 里，它的两个 4 阶元是共轭的，于是根据 Sylow 定理知，$A_6$ 的 4 阶元是相互共轭的，即 $(1234)(56)$ 所在的共轭类含有 90 个元素。

2) $A_6$ 的 3 阶元具有两种轮换形式：$(abc),(abc)(def)$。

形如 $(abc)$ 的元素共有 $2\times C_6^3=40$ 个。取 $\sigma\in S_6$ 使 $\sigma(a)=1,\ \sigma(b)=2,\ \sigma(c)=3$，则 $\sigma^{-1}(abc)\sigma=(123)$。当 $\sigma$ 是奇置换时，令 $\sigma_1=\sigma(56),\sigma_1\in A_6$，此时 $\sigma_1^{-1}(abc)\sigma_1=(123)$，这表明这种 3 阶元构成一个完整的共轭类。

形如 $(abc)(def)$ 的元素共有 $2\times C_6^3=40$ 个。记 $u=(123),v=(456)$，明显地，$u$ 和 $v$ 生成一个 9 阶初等 Abel 3-群，它是 $A_6$ 的 Sylow 3-子群，注意到

$$\langle u,v\rangle=\{1,(123),(132),(456),(465),(123)(456),(123)(465),(132)(456),(132)(465)\}$$

其中

$$((23)(56))^{-1}((123)(456))((23)(56))=(132)(465)$$

$$((23)(56))^{-1}((123)(465))((23)(56))=(132)(456)$$

$$((1436)(25))^{-1}((123)(456))((1436)(25))=(132)(456)$$

这样在 $\langle u,v\rangle$ 里，形如 $(abc)(def)$ 的 4 个元素在 $A_6$ 里是相互共轭的，根据 Sylow 定理，$A_6$ 的形为 $(abc)(def)$ 的元素形成一个完整的共轭类。

3) $A_6$ 的 5 阶元只能是 5-轮换 $(abcde)$，这种轮换共有 $C_6^5\times 4!=144$ 个。因为 144 不能整除 360，所以这 144 个元素在 $A_6$ 里不能构成一个完整的共轭类。又 $A_6$ 有 $144\div 4=36$ 个 Sylow 5-子群，注意到 $(12345)$ 生成 $A_6$ 的一

个 Sylow 5-子群，以及

$$((25)(34))^{-1}(12345)((25)(34))=(15432)=(12345)^{-1}$$

可得 $(12345)$ 所在的共轭类长为 $36\times 2=72$，从而 $A_6$ 的 144 个 5 阶元分为两个共轭类，其共轭类长均为 72。

综合 1)、2)、3)，我们得到 $A_6$ 的元素的如下信息(表 1)：

**Table 1. The classes of $A_6$**
**表 1. $A_6$ 的共轭类**

| 阶 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 代表元 | 1 | (12)(34) | (123) | (123)(456) | (1234)(56) | (12345) | (13524) |
| 共轭类长 | 1 | 45 | 40 | 40 | 90 | 72 | 72 |

现在，我们能够很快证明 $A_6$ 是一个单群。事实上，任取 $A_6$ 的正规子群 $N$，$N$ 的阶整除 360，且 $|N|=1+45x_1+90x_2+40y_1+72y_2$，其中 $x_i=0$ 或 1，$y_i=0,1$ 或 2。不难验证 $|N|=1$ 或 360，即 $N=1$ 或 $A_6$，$A_6$ 是单群。

4) 对 2)里的 $u=(123)$ 和 $v=(456)$，$P=\langle u,v\rangle$ 是 $A_6$ 的一个 Sylow 3-子群，注意到

$$((1436)(25))^{-1}u((1436)(25))=v$$

$$((1436)(25))^{-1}v((1436)(25))=u^{-1}$$

可得 $(1436)(25)\in N_{A_6}(P)$，从而 $|N_{A_6}(P)|$ 被 36 整除，这样 $A_6$ 的 Sylow 3-子群的个数 $n_3=|A_6:N_{A_6}(P)|$ 整除 10。又 $A_6$ 共含有 40 + 40 = 80 个 3 阶元，$A_6$ 至少含有 $80\div 8=10$ 个 Sylow 3-子群，由此 $A_6$ 包含 10 个 Sylow 3-子群，并且任意两个不同的 Sylow 3-子群的交是平凡的。

5) 对 1)里的元 $x=(1234)(56)$ 和 $y=(12)(34)$，$Q=\langle x,y\rangle$ 是 $A_6$ 的 Sylow 2-子群。根据 Sylow 定理，$A_6$ 的 Sylow 2-子群的个数

$$n_2(A_6)=|A_6:N_{A_6}(Q)|\equiv 1(\bmod 2)$$

并且 $n_2(A_6)$ 整除 45。注意到 $A_6$ 是单群，可得 $n_2(A_6)\geq 6$，这样 $n_2(A_6)=9,15$ 或 45。因 $A_6$ 共有 135 个 2-元。$A_6$ 的 Sylow 2-子群的个数 $n_2(A_6)\geq\left\lceil\frac{135}{7}\right\rceil=19$ 个，故 $n_2(A_6)=45$，从而 $N_{A_6}(Q)=Q$。

综上所述，我们得到了 $A_6$ 的 Sylow 子群 $P$ 的如下信息(表 2)：

**Table 2. On the Sylow subgroups of $A_6$**
**表 2. 关于 $A_6$ 的 Sylow 子群**

| 素数 | $\|P\|$ | $P$ 的结构 | $\|Syl_p(A_6)\|$ | $\|N_{A_6}(P)\|$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 二面体群 | 45 | 8 |
| 3 | 9 | 初等 Abel 群 | 10 | 36 |
| 5 | 5 | 循环群 | 36 | 10 |

这些信息有助于我们弄清 360 阶单群的 Sylow 子群及其正规化子的结构。

## 3. 结论的初等证明

本文的主要目的是要用完全初等的群论技巧重新证明下面的

**定理：**360 阶单群同构于 $A_6$

证明：设 $G$ 是 360 阶单群，此时 $|G| = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 。令 $S \in Syl_5(G)$，由 Sylow 定理知 $n_5(G) = 1(\bmod 5)$ 和 $n_5(G) = |G : N_G(S)|$，因此 $n_5(G) = 1, 6$ 或 36。注意到 $G$ 为单群，$n_5(G) = 6$ 或 36。若 $n_5(G) = 6$，则 $|N_G(S)| = 60$，$N_G(S)$ 为 $G$ 的指数为 6 的子群，这时容易验证 $G \cong A_6$ 。我们已知，$A_6$ 有 36 个 Sylow 5-子群，这是不可能的。所以只能有 $n_5(G) = 36$， $G$ 有 $(5-1) \times 36 = 144$ 个 5 阶元。

选取不同的 $A, B \in Syl_3(G)$，使 $D = A \cap B$ 的阶最大。若 $D > 1$，则 $|D| = 3$ 且 $A, B \le N_G(D)$，显然 $A, B$ 都 $N_G(D)$ 是的 Sylow 3-子群， $N_G(D)$ 的 Sylow 3-子群个数 $n_3(N_G(D)) > 1$ 且 9 整除 $|N_G(D)|$。又 $|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|} = 27$，$|N_G(D)| \ge |AB| = 27$ 。考虑到 $G$ 的真子群指数至少为 6，不难验证 $|N_G(D)| = 36$ 或 45。若 $|N_G(D)| = 45$， $N_G(D)$ 只有唯一的 Sylow 3-子群，这是不可能的。若 $|N_G(D)| = 36$， $N_G(D)/D$ 是 12 阶群， $N_G(D)/D$ 的 Sylow 3-子群肯定不是正规的，由 Sylow 定理知，$N_G(D)/D$ 包含 4 个 Sylow 3-子群，它包含 8 个 3 阶元，故 $N_G(D)/D$ 的 Sylow 2-子群是正规的。设 $T/D$ 是 $N_G(D)/D$ 的 Sylow 2-子群， $T \lhd N_G(D)$，取 $T$ 的 Sylow 2-子群 $X$， $X$ 是 4 阶群，$T = DX$ 。从 $X/C_X(D) \le Aut(G) = Z_2$ 知，$1 < C_X(D) \le Z(T)$， $Z(T)$ 是 $T$ 的中心。当 $|C_X(D)| = 2$ 时， $C_X(D)$ 是 $Z(T)$ 的 Sylow 2-子群，故 $C_X(D) \lhd N_G(D)$， $N_G(D)/C_X(D)$ 是 18 阶群，它有正规的 Sylow 3-子群，这将导致 $N_G(D)$ 含有正规的 Sylow 3-子群，矛盾，因此只能有 $C_X(D) = X$ 。当 $C_X(D) = X$ 时，$T$ 是 12 阶 Abel 群，$X$ 是 $T$ 的特征子群，$X \lhd N_G(D)$ 。又取 $G$ 的包含 $X$ 的 Sylow 2-子群 $C$，当然 $X \lhd C$，从而 $\langle A, B, C\rangle \le N_G(X)$，$|N_G(X)|$ 能被 $|A| \cdot |C| = 72$ 整除， $|G : N_G(X)| = 1$ 或 5，这是不可能的，因此 $D = 1$，这表明 $G$ 的任意两个不同的 Sylow 3-子群有平凡的交。

取 $P \in Syl_3(G)$， 由 Sylow 定理 $n_3(G) = 1, 4, 10$ 或 40。注意到 $G$ 是单群，所以 $n_3(G) = 10$ 或 40。若 $n_3(G) = 40$，考虑到 $G$ 的任意两个不同的 Sylow 3-子群的交平凡， $G$ 将包含 $40 \times (9-1) = 320$ 个 3-元，又 $G$ 含有 144 个 5-元，从 $320 + 144 > 360 = |G|$ 知这是不可能的，于是只能有 $n_3(G) = 10$，$|N_G(P)| = 36$，$G$ 含有 $(9-1) \times 10 = 80$ 个 3-元。

我们断言 $G$ 不含 6 阶元。考虑 $G$ 在 $Syl_3(G)$ 上的共轭作用，$G$ 同构于 $A_{10}$ 的一个子群。把 $G$ 看作 $A_{10}$ 的子群，若 $g$ 为 $A_{10}$ 里的 6 阶元，则 $g$ 可分解为如下三种形式：

$$(123)(45)(67)$$

$$(123456)(78)$$

$$(123)(456)(78)(9,10)$$

从而 $g^2$ 至少固定两个点。不妨设 $P_1, P_2 \in Syl_3(G),\ P_1 \ne P_2,\ g^2 \in N_G(P_1)$ 且 $g^2 \in N_G(P_2)$ 。因为 $g^2$ 为 3 阶的，所以 $g^2 \in P_1 \cap P_2$ 。这与 $G$ 的任意两个不同的 Sylow 3-子群只有平凡的交矛盾，因此 $G$ 没有 6 阶元。

取 $H \in Syl_2(N_G(P))$，由于 $P \lhd N_G(P)$，因而 $N_G(P) = PH$ 为半直积。对 $H$ 的非单位元 $h$ 和 $P$ 的非单位元 $x$，若 $xh = hx$，从 $x$ 是 3-元和 $h$ 是 2-元知， $xh$ 的阶 $|xh| = |x||h|$ 是 6 的倍数。记 $|xh| = 6k$，则 $(xh)^k$ 是个 6 阶元，这是不可能的，因此必有 $h^{-1}xh \ne x$，进而 $C_H(P) = 1$， $H$ 忠实作用在 $P$ 上， $H \le Aut(P)$ 。若 $P$ 为循环群，则 $|Aut(P)| = \varphi(9) = 6$，这是不可能的，从而 $P$ 为初等 Abel 3-群。进一步地， $H \le Aut(P) = GL(2, Z_3)$，设 $n$ 是 $H$ 的一个 2 阶元， $n^2 = I$， $n$ 的特征值等于 $\pm 1$， $n$ 的最小多项式整除 $\lambda^2 - 1$， $n$ 在 $Z_3$ 上可以对角化。因对 $P$ 的任意非单位元 $y$， $y^n \ne y$，故 1 不是 $n$ 的特征值，$n$ 的特征值只能等于 $-1$，于是 $n = -I$，这表示 $H$ 只含有一个 2 阶元， $H$ 是 4 阶循环群。现设 $H = \langle h\rangle,\ h^4 = 1,\ h$ 的极小多项式为 $\lambda^2 + 1$，在 $Z_3$ 上 $H$ 相似于 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，由此存在 $a, b \in P$， 使 $P = \langle a\rangle \times \langle b\rangle, a^h = b, b^h = a^{-1}$ 。

取 $R \in Syl_2(G)$，由 Sylow 定理并考虑到 $G$ 是单群，$n_2(G) = 9, 15$ 或 45。若 $n_2(G) = 9$，则 $|N_G(R)| = 40 = 5 \times 2^3$ 。取 $S \in Syl_5(N_G(R))$， 由 Sylow 定理知 $S \lhd N_G(R)$, $N_G(R) \le N_G(S)$， 这与 $|N_G(S)| = 36$ 矛盾。若 $n_2(G) = 15$，则 $|N_G(R)| = 24 = 3 \times 2^3$ 。由 Sylow 定理得 $n_3(N_G(R)) = 1$ 或 4，$N_G(R)$ 最多含有 $4 \times (3-1) = 8$ 个 3 阶元，但 $R \lhd N_G(R)$，

$N_G(R)$ 含有 7 个 2-元，$8+7+1<24$，这表明 $N_G(R)$ 一定包含 6 阶元，矛盾。所以只能有 $n_2(G)=45$，容易得出 $|N_G(R)|=8$ 且 $N_G(R)=R$。

我们断言 $G$ 没有 15 阶和 10 阶元。若 $g$ 是 $G$ 的 15 阶元，则 $\langle g^3\rangle \in Syl_5(G)$ 且 $\left|N_G(\langle g^3\rangle)\right| \ge 15$，这与 $\left|N_G(\langle g^3\rangle)\right|=10$ 矛盾。若 $g$ 是 $G$ 的 10 阶元，则 $\langle g^2\rangle \in Syl_5(G)$, $N_G(\langle g^2\rangle)$ 是一个 10 阶循环群，可以验证 $G$ 含有 $\varphi(10)\times 36=4\times 36=144$ 个 10 阶元，而 $G$ 含有 144 个 5 阶元和 80 个 3 阶元，$144+144+80=368>360=|G|$，矛盾，这样 $G$ 的元素的阶只能等于 1、2、3、4、5。

我们断言 $R$ 不是 Abel 群。假设 $R$ 是 Abel 群，因 $G$ 没有 6 阶和 10 阶元，任取 $1\ne x\in R,\ C_G(x)=R,\ x$ 所在的共轭类 $Cl(x)$ 的长 $|Cl(x)|=|G:C_G(x)|=45$。如果 $R$ 的两个互异元 $x$ 和 $y$ 在 $G$ 里是共轭的，即存在 $g\in G$，使 $x=y^g$，那么 $R=C_G(x)=C_G(y^g)=C_G(y)^g=R^g,\ g\in N_G(R)=R,\ x=y^g=y$，矛盾。这就是说 $R$ 的任意两个不同的元在 $G$ 里不共轭，所以 $G$ 包含 $45\times(8-1)=315$ 个 2-元，但 $G$ 包含 144 个 5 阶元，$315+144>360=|G|$，矛盾。所以 $R$ 不是 Abel 群。

既然 $R$ 是 8 阶非 Abel 群，$R$ 同构于 $Q_8$ 或 $D_8$。因为 $G$ 含有 144 个 5 阶元和 80 个 3 阶元，所以 $G$ 含有 $360-144-80-1=135$ 个 2-元。但 $n_2(G)=45$，故存在不同的 $R_1,R_2\in Syl_2(G)$，使 $R_1\cap R_2>1$，否则 $G$ 将含有 $45\times(8-1)=315$ 个 2-元。若 $R$ 同构于 $Q_8$，则 $R_1\cap R_2$ 只有一个 2 阶元 $t$，并且 $t$ 是 $R_1,R_2$ 的中心元，即 $C_G(t)\ge R_1$ 且 $C_G(t)\ge R_2$，再考虑到 $G$ 的任意元素的阶为素数方幂，我们有 $R_1=C_G(t)=R_2$。这与 $R_1\ne R_2$ 矛盾，所以必有 $R$ 同构于 $D_8$。

现在考虑 $G$ 在 $Syl_3(G)=\{P_1,P_2,\cdots,P_{10}\}$ 上的共轭作用，$G$ 同构于 $A_{10}$ 的一个子群，为了方便，将 $\{P_1,P_2,\cdots,P_{10}\}$ 简写成 $\{1,2,\cdots,10\}$，用 $i$ 代表 $P_i\ (1\le i\le 10)$。取 $P_{10}=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$，适当调整 $P_i\ (1\le i\le 9)$ 的脚标使

$$a=(123)(456)(789)$$

若 $x,y\in P_{10}$ 将 1 映到同一点，则 $xy^{-1}\in N_G(P_1),\ xy^{-1}\in P_1$，而 $xy^{-1}\in P_{10}$ 且 $P_1\cap P_{10}=1$，所以 $xy^{-1}=1,\ x=y$。因为 $a$ 将 1 映到 2，$a^2$ 将 1 映到 3，$a\ne b, a^2\ne b$，我们取 $1^b=4$，则 $a=a^b=(4,b(2),b(3))\cdots$，这表明 $b(2)=5, b(3)=6$。于是得到 $b=(1,4,i)(2,5,j)(3,6,k)$，显然 $i,j,k\in\{7,8,9\}$，由此得到 $b$ 的 3 种取法：

$$b_1=(147)(258)(369)$$

$$b_2=(148)(259)(367)$$

$$b_3=(149)(257)(368)$$

容易验证对应的三个子群满足 $\langle a,b_1\rangle^{(789)}=\langle a,b_2\rangle=\langle a,b_3\rangle^{(798)}$，它们彼此共轭。如果取 $1^b\in\{5,6,7,8,9\}$，同样可以得到 $b$ 的 15 种取法。直接计算可以验证它们与 $a$ 生成的 9 阶初等阿贝尔子群都是共轭的。因此不妨取

$$b=(147)(258)(369)$$

实际上，根据前面的讨论，$P_{10}$ 的 8 个非单位元中，任意两个不同的元将同一个点映到不同的点，因此 $P_{10}$ 在 $\{1,2,\cdots,9\}$ 上的共轭作用是传递的，进一步地，$N=N_G(P_{10})$ 在 $\{1,2,\cdots,9\}$ 上的共轭作用传递。考虑 $P_i\ (1\le i\le 9)$ 在 $N=N_G(P_{10})$ 中的稳定化子 $N_i$，因为 $|N_i|=\dfrac{|N_G(P_{10})|}{9}=4$，所以 $N_i\in Syl_2(N_G(P_{10}))$ 且 $N_i$ 为 4 阶循环群，于是得到 $N_G(P_{10})=P_{10}N_i$。由前面的讨论，不妨设 $N_G(P_{10})=P_{10}N_1,\ N_1=\langle c\rangle$ 且 $c^{-1}ac=b$。

现证 $c$ 在 $\{2,3,\cdots,9\}$ 上没有不动点。设 $N_2$ 是 $P_2$ 在 $N_G(P_{10})$ 中的稳定子群，由于存在 $1\ne x\in P_{10}$ 使 $P_1^x=P_2$，故 $N_2=N_1^x$。不妨设 2 是 $c$ 的不动点，则 $N_1=N_2$，故 $N_1^x=N_1$。而 $N_1$ 是一个 4 阶循环群且 $Aut(N_1)$ 是 2 阶的，$x$ 为 3 阶的，这将导致 $G$ 含有 6 阶元，矛盾。

由于 $c$ 固定 1 和 10，$c$ 为偶置换且变动了 $\{2,3,\cdots,9\}$ 的每个元，$c$ 为 4 阶元，因而 $c$ 必为两个不相交 4-轮换的乘积。考虑到 $c^{-1}ac=b$ 及 $a=(123)(456)(789)$，$b=(147)(258)(369)$，故有

$$\left(c(1),c(2),c(3)\right)\left(c(4),c(5),c(6)\right)\left(c(7),c(8),c(9)\right)=(147)(258)(369)$$

由于 $c$ 不可能将 $\{1,2,\cdots,9\}$ 中不同的点映到同一点，因而上式左端为不相交的 3 个 3-轮换的乘积，而 $c(1)=1$，因此 $\left(c(1),c(2),c(3)\right)=(147)$ 且有 $c(2)=4,c(3)=7$。

若 $\left(c(4),c(5),c(6)\right)=(258)$，当 $c(4)=2$ 时，有 $c(5)=5$，矛盾。当 $c(4)=5$ 时，$c(5)=8,\ c(6)=2$，此时 $c$ 将包含 $(62458\cdots)$，这与 $c$ 为 4 阶元矛盾。当 $c(4)=8$ 时，$c(5)=2,\ c(6)=5$，$c$ 将包含 $(65248\cdots)$，这与 $c$ 为 4 阶元矛盾。所以只能有 $\left(c(4),c(5),c(6)\right)=(369)$。

当 $c(4)=9$ 时，将有 $c(6)=6$，矛盾。当 $c(4)=6$ 时，$c(5)=9,\ c(6)=3$，此时 $c$ 将包含 $(24637\cdots)$，这与 $c$ 为 4 阶元矛盾。所以只能有 $c(4)=3,\ c(5)=6,\ c(6)=9$。

最后，$\left(c(7),c(8),c(9)\right)=(258)$，当 $c(7)=5$ 时，$c(8)=8$，矛盾，当 $c(7)=8$ 时，$c$ 将包含 $(24378\cdots)$，矛盾。所以只能有 $c(7)=2,\ c(8)=5,\ c(9)=8$。

综合上面的结论可以得到

$$c=(2437)(5698)$$

显然 $c,c^2,c^3$ 均固定 2 个点。又对 $G$ 的任意 2 阶元 $w$，$w$ 是 $A_{10}$ 里的偶置换，$w$ 至少固定 2 个点，从而 $w$ 属于某个 Sylow 3-子群的正规化子，进而 $G$ 的任意 2 阶元固定 2 个点。

取 $T\in Syl_2(G)$ 且 $N_1\subseteq T$，$T$ 为二面体群，则有 2 阶元 $d\in T-N_1$ 使 $T=\langle c,d\rangle$。由于 $d\notin N_G(P_1)$，因而 $d$ 不固定 1，考虑到 $d$ 是 2 阶元，所以 $d$ 形如 $(1,k)(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)\cdots$，其中 $k\in\{2,3,\cdots,10\}$。若 $k\neq 10$，考虑 $c^d=dcd$，$d$ 将 1 映到 $k(1\le k\le 9)$，$c$ 将 $k$ 映到 $k'$，其中 $k'\neq k$ 且 $2\le k'\le 9$，但 $d$ 不能将 $k'$ 映到 1，所以 $c^d$ 不固定 1。另一方面，因为 $T$ 是二面体群，$c^d=c^{-1}$ 固定 1，矛盾，所以必有 $k=10$，这表明 $d$ 包含轮换 $(1,10)$。考虑到 $d$ 为偶置换，则必有 $d=(1,10)(\cdot,\cdot)$ 或 $d=(1,10)(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$，再根据上一段的讨论，$d\in G$ 固定 2 个点，所以 $d=(1,10)(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$。

因为 $T$ 为二面体群且 $d^{-1}cd=c^{-1}$，所以

$$\left(d(2),d(4),d(3),d(7)\right)\left(d(5),d(6),d(9),d(8)\right)=(4273)(6589)$$

由于 $d$ 不可能将 $\{2,3,\cdots,9\}$ 中不同的点映到同一点，则上式左端为不相交的 2 个 4-轮换的乘积，比较两端，若 $\left(d(2),d(4),d(3),d(7)\right)=(6589)$，则 $d$ 将 $\{2,4,3,7\}$ 映到 $\{6,5,8,9\}$，这将有 $d=(1,10)(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$，根据上一段的讨论，这将与 $d$ 的轮换形式矛盾，所以

$$\left(d(2),d(4),d(3),d(7)\right)=(4273)$$

这将导致 $d$ 包含的对换的形式可能为如下情形

i) $(24)(37)$

ii) $(47)$，2 和 3 为不动点

iii) $(27)(34)$

iv) $(23)$，4 和 7 为不动点

同样的讨论运用到 $\left(d(5),d(6),d(9),d(8)\right)=(6589)$，可得 $d$ 包含的对换的形式可能为如下情形

a) $(56)(98)$

b) $(68)$，5 和 9 为不动点

c) $(58)(96)$

d) $(59)$，6 和 8 为不动点

综合上面的结果并考虑到 $d=(1,10)(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$，可能出现如下 8 种情形:

1) i)和 b)同时出现，此时 $d=(1,10)(24)(37)(68)$

2) i)和 d)同时出现，此时 $d=(1,10)(24)(37)(59)$

3) ii)和 a)同时出现，此时 $d=(1,10)(47)(56)(98)$

4) ii)和 c)同时出现，此时 $d=(1,10)(47)(58)(96)$

5) iii)和 b)同时出现，此时 $d=(1,10)(27)(34)(68)$

6) iii)和 d)同时出现，此时 $d=(1,10)(27)(34)(59)$

7) iv)和 a)同时出现，此时 $d=(1,10)(23)(56)(98)$

8) iv)和 c)同时出现，此时 $d=(1,10)(23)(58)(96)$

$\langle c,d\rangle$ 为二面体群。

A) 在情形 i)中，将 $d=(1,10)(24)(37)(68)$ 代入 $cd,c^2d,c^3d$ 直接计算，可得到 3 个 2 阶元，它们正好是情形 4)，6)，7)中的 2 阶元。此时直接计算可得 $ad$ 为 21 阶元，21 不能整除 $|G|=360$，故 $d=(1,10)(24)(37)(68)\notin G$，所以只能有下面的

B) 在情形 ii)中，将 $d=(1,10)(24)(37)(59)$ 代入 $cd,c^2d,c^3d$ 直接计算，可得到 3 个 2 阶元，它们正好是情形 3)，5)，8)中的 2 阶元。

不妨设

$$d=(1,10)(24)(37)(59)$$

子群 $\langle a,b,c,d\rangle$ 至少为 $3\times3\times4\times2=72$ 阶的，考虑到 $G$ 为单群，于是必有 $G\cong\langle a,b,c,d\rangle$。我们知道，$A_6$ 为 360 阶单群，故 $A_6\cong\langle a,b,c,d\rangle$，即 $G\cong A_6$。

因 $PSL(2,9)$ 也是 360 阶单群，故从上述定理立即得到下面的

**推论：** $PSL(2,9)\cong A_6$。

## 项目基金

国家自然科学基金(11371124)、湖北省高层次人才工程基金(070-016533)。

## 参考文献 (References)


[1] Isaacs, I.M. (2008) Finite group theory. American Mathematical Society, Providence.

[2] Huppert, B. (1967) Endliche gruppen. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[3] Smith, G. and Tabachnikova, O. (2000) Topics in group theory. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[4] 周峰, 徐涛, 刘合国 (2013) 660 阶单群同构于 PSL(2,11)的初等群论证明. *理论数学*, **4**, 241-243.

[5] Isaacs, I.M. (1976) Character theory of finite groups. Academic Press, New York.

[6] Rotman, J. (1994) An introduction to the theory of groups. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[7] Cole, F.N. (1893) Simple groups as far as order 660. *American Journal of Mathematics*, **15**, 303-315.