Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 70-74
Published Online March 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.42011

Hans汉斯

Uniqueness of Meromorphic Function of Differential Polynomials Sharing Two Values

Xinhua Shi

College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin
Email: xhshi2000@163.com

Received: Feb. 13th, 2014; revised: Mar. 2nd, 2014; accepted: Mar. 12th, 2014

Abstract

We will use Nevanlinna distribution theory to discuss a power of meromorphic functions of differential polynomials sharing two values. The results generalize many results on value sharing of meromorphic functions.

Keywords

Meromorphic Function; Shared Value; Uniqueness

亚纯函数微分多项式分担两个值的唯一性

石新华

中国民航大学理学院，天津
Email: xhshi2000@163.com

收稿日期：2014年2月13日；修回日期：2014年3月2日；录用日期：2014年3月12日

摘　要

本文运用Nevanlinna理论讨论了一类亚纯函数微分多项式分担两个值的唯一性问题，得到的结果改进或推广了亚纯函数分担值的许多唯一性结果。

关键词

亚纯函数；分担值；唯一性

1. 引言

设 f 是复平面 C 上的亚纯函数，假设读者熟知 Nevanlinna 值分布理论中通用的记号[1]-[3]例如 $m(r,f),N(r,f),T(r,f),S(r,f)$。如果 $T(r,a(z))=S(r,f)$，则称 $a(z)$ 是 $f(z)$ 的小函数。现在假设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个非常数亚纯函数，$a\in C\cup\{\infty\}$。如果 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 有相同的零点并且零点重数也相同(不计重数)，我们称 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分担 a CM (IM)。用 $N_k\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ 表示 $f-a$ 的重数不超过 k 的零点的计数函数(记重数)，用 $\bar{N}_k\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ 表示 $f-a$ 的重数不超过 k 的零点的精简计数函数(不记重数)，并且令 $N_k\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\bar{N}_2\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\bar{N}_3\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\cdots+\bar{N}_k\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$。

为了方便，定义

$$P(w)=\begin{cases} a_m w^m+a_{m-1}w^{m-1}+\cdots+a_1 w+a_0 & (m>0)\\ a_0 & (m=0)\end{cases} \tag{*}$$

其中 $a_m\neq 0$ 且 $a_0\neq 0$。

2010 年，徐俊峰等人[4]证明了下面两个定理：

定理 A： 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个非常数数亚纯函数，n,k 是两个正整数且 $n>3k+8$。如果 $\left[f^n\right]^{(k)}$ 与 $\left[g^n\right]^{(k)}$ 分担 1 CM，$f(z)$ 和 $g(z)$ 分担 ∞ **IM**，则或者 $f(z)=c_1e^{cz},g(z)=c_2e^{-cz}$，其中 c_1,c_2 和 c 是三个常数且满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k}=1$，或者 $f\equiv tg$，其中 t 是个常数且有 $t^n=1$。

定理 B: 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个非常数数亚纯函数且 $\theta(\infty,f)>2/n$，n,k 是两个正整数且 $n>3k+10$。如果 $\left[f^n(f-1)\right]^{(k)}$ 与 $\left[g^n(g-1)\right]^{(k)}$ 分担 1 CM，$f(z)$ 和 $g(z)$ 分担 ∞ **IM**，则 $f\equiv g$。

更多相关结果参考文献[5]-[8]，本文中，我们推广并改进了定理 A 和定理 B。主要结果如下：

定理 1： 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个非常数亚纯函数，$n>0,k>0$，$m\geq 0$ 是三个整数且 $n>3k+m+6$，$P(w)$ 由(*)定义。如果 $\left[f^nP(f)\right]^{(k)}$ 和 $\left[g^nP(g)\right]^{(k)}$ 分担 1 CM，$f(z)$ 和 $g(z)$ 分担 ∞ IM，则

(1) 当 $m>0$，$f^nP(f)\equiv g^nP(g)$；

(2) 当 $m=0$，下面两种情形必有一种成立：

(3) $f\equiv tg$，其中 t 是个常数且有 $t^n=1$，

(4) $f(z)=c_1/\sqrt[n]{a_0}e^{cz},g(z)=c_2/\sqrt[n]{a_0}e^{-cz}$，其中 c_1,c_2 和 c 是三个常数且满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k}=1$。

推论 1： 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个非常数数亚纯函数，n,k 是两个正整数且 $n>3k+5$。如果 $\left[f^n\right]^{(k)}$ 与 $\left[g^n\right]^{(k)}$ 分担 1 CM，$f(z)$ 和 $g(z)$ 分担 ∞ **IM**，则或者 $f(z)=c_1e^{cz},g(z)=c_2e^{-cz}$，其中 c_1,c_2 和 c 是三个常数且满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k}=1$，或者 $f\equiv tg$，其中 t 是个常数且有 $t^n=1$。

推论 2： 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个非常数数亚纯函数且 $\theta(\infty,f)>2/n$，n,k 是两个正整数且 $n>3k+6$。如果 $\left[f^n(f-1)\right]^{(k)}$ 与 $\left[g^n(g-1)\right]^{(k)}$ 分担 1 CM，$f(z)$ 和 $g(z)$ 分担 ∞ **IM**，则 $f\equiv g$。

2. 主要引理

定义：

$$F=\left[f^{n}P(f)\right]^{(k)},G=\left[g^{n}P(g)\right]^{(k)} \tag{1}$$

其中 $f(z)$ 是非常数亚纯函数。

$$H=\left(\frac{F''}{F'}-\frac{2F'}{F-1}\right)-\left(\frac{G''}{G'}-\frac{2G'}{G-1}\right), \tag{2}$$

$$V=\frac{F'}{F-1}-\frac{G'}{G-1}. \tag{3}$$

引理 2.1[9]：设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数，$a_0(z),a_1(z),a_2(z),\cdots,a_n(z)(\neq 0)$ 是 $f(z)$ 的小函数，那么

$$T\left(r,a_nf^n+a_{n-1}f^{n-1}+\cdots+a_0\right)=nT(r,f)+S(r,f).$$

引理 2.2[7]：设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数，s,k 是两个正整数，则

$$N_s\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\leq T\left(r,f^{(k)}\right)-T(r,f)+N_{s+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)$$

$$N_s\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\leq k\bar{N}(r,f)+N_{s+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)$$

引理 2.3[3]：设 f 是个非常数亚纯函数，k 是个正整数，若 $f^{(k)}\not\equiv 0$，则

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)=N\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f)$$

类似于文献[5]中引理 3 的证明，我们可以得到下面的引理。

引理 2.4：假设 F,G,H 由(1)，(2)定义。如果 F,G 分担 1 CM 以及 ∞ IM，则有

$$T(r,F)\leq N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+3\bar{N}(r,F)+S(r,F)+S(r,G),$$

对 $T(r,G)$ 有同样的不等式成立。

引理 2.5[10]：设 F 和 G 由(1)中所定义，如果 F 和 G 分担 ∞ IM，且 $V\equiv 0$，则 $F\equiv G$。

引理2.6：假设 f，g 是两个非常数亚纯函数，假设 F,G,V 由(1)，(3)定义。$P(w)$ 由(*)定义，$n>0$，$k>0$，$m\geq 0$ 是三个整数。如果 $V\not\equiv 0$，F 和 G 分担1 CM，f 和 g 分担 ∞ IM，则

$$(n+m+k-1)\bar{N}(r,f)=(n+m+k-1)\bar{N}(r,g)\leq\bar{N}(r,1/F)+\bar{N}(r,1/G)+S(r,f)+S(r,g). \tag{4}$$

证明：由于 $V\not\equiv 0$，f 和 g 分担 ∞ IM，假设 z_0 是 f 的 p 重极点，是 g 的 q 重极点，则 z_0 是 F 的 $(n+m)p+k$ 重极点，从而是 $\frac{F'}{F-1}-\frac{F'}{F}=\frac{F'}{F(F-1)}$ 的 $(n+m)p+k-1(\geq n+m+k-1)$ 重极点，同理 z_0 也是 $\frac{G'}{G-1}-\frac{G'}{G}=\frac{G'}{G(G-1)}$ 的 $(n+m)q+k-1(\geq n+m+k-1)$ 重极点，故而 z_0 至少是 V 的 $n+m+k-1$ 重零点。因此

$$(n+m+k-1)\bar{N}(r,f)=(n+m+k-1)\bar{N}(r,g)\leq N\left(r,\frac{1}{V}\right). \tag{5}$$

由对数导数引理，$m(r,V)=S(r,f)+S(r,g)$，注意到 F 和 G 分担 1 CM，故得到

$$N(r,1/V)\leq T(r,V)=m(r,V)+N(r,V)\leq\bar{N}(r,1/F)+\bar{N}(r,1/G)+S(r,f)+S(r,g). \tag{6}$$

由(5)，(6)即得(4)，这就证明了引理2.6。

引理2.7[4]：假设 f，g 是两个非常数亚纯函数，$k,n>2k+1$ 是两个正整数。如果 $\left[f^n\right]^{(k)}=\left[g^n\right]^{(k)}$，则 $f\equiv tg$ 其中 t 是个常数且有 $t^n=1$。

仿照文献[4]中引理5的证明可得

引理2.8：假设 f，g 是两个非常数亚纯函数，$P(w)$ 由(*)定义，$n>0,k>0,m\geq 0$ 是三个整数且 $n>2k+m+1$。如果 $\left[f^nP(f)\right]^{(k)}=\left[g^nP(g)\right]^{(k)}$，则 $f^nP(f)=g^nP(g)$。

引理2.9[11]：假设 f，g 是两个非常数亚纯函数，$P(w)$ 由(*)定义，n,k 是两个正整数且 $n>k+2$，$a(z)(\not\equiv 0,\infty)$ 是 f 的小函数且有有限个零点和极点，如果 $\left[f^nP(f)\right]^{(k)}\left[g^nP(g)\right]^{(k)}=a^2$，$f$ 和 g 分担 ∞ IM，则 $P(w)$ 退化为一个单项式。

利用文献[11]中定理3的证明可得

引理 2.10：假设 f，g 是两个非常数亚纯函数，$P(w)$ 由(*)定义，n,k 是两个正整数 $n>k$。如果 $\left[f^n\right]^{(k)}\left[g^n\right]^{(k)}=1$，$f$ 和 g 分担 ∞ IM，则 $f(z)=c_1e^{cz},g(z)=c_2e^{-cz}$，其中 c_1,c_2 和 c 是三个常数且满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k}=1$。

3. 定理 1 的证明

假设 F,G,H 和 V 由(1)~(3)定义，再设 $F_1=f^nP(f)$，$G_1=g^nP(g)$，则 F 和 G 分担 1 CM 以及 ∞ IM。假设 $H\not\equiv 0$，则 $F\not\equiv G$，且 $U\not\equiv 0$。

情形 1：$m>0$。由引理 2.4 得

$$T(r,F)\leq N_2(r,1/F)+N_2(r,1/G)+3\bar{N}(r,F)+S(r,F)+S(r,G),\tag{7}$$

由引理 2.2，并令 $s=2$ 可得

$$T(r,F_1)\leq T(r,F)-N_2(r,1/F)+N_{k+2}(r,1/F_1)+S(r,F),\tag{8}$$

以及

$$N_2(r,1/G)\leq N_{k+2}(r,1/G_1)+k\bar{N}(r,G)+S(r,G).\tag{9}$$

由(7)~(9)得到

$$\begin{aligned}T(r,F_1)&\leq N_{k+2}(r,1/F_1)+N_{k+2}(r,1/G_1)+(k+3)\bar{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g)\\&\leq(k+2)\bar{N}(r,1/f)+N(r,1/P(f))+(k+2)\bar{N}(r,1/g)+N(r,1/P(g))\\&\quad+(k+3)\bar{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g).\end{aligned}$$

由引理 2.1 和上面的不等式得到

$$(n+m)T(r,f)\leq(k+m+2)(T(r,f)+T(r,g))+(k+3)\bar{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g).\tag{10}$$

类似可得

$$(n+m)T(r,f)\leq(k+m+2)(T(r,f)+T(r,g))+(k+3)\bar{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g).\tag{11}$$

由(10)和(11)得到

$$(n-2k-m-4)(T(r,f)+T(r,g))\leq 2(k+3)\bar{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g)\tag{12}$$

注意到 $V\not\equiv 0$，我们得到(4)。利用引理 2.2 并令 $s=1$，得到

$$\begin{aligned}\bar{N}(r,1/F)&\leq N_{k+1}(r,1/F_1)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f)\\&\leq(k+1)\bar{N}(r,1/f)+N(r,1/P(f))+k\bar{N}(r,f)+S(r,f).\end{aligned}\tag{13}$$

以及

$$\begin{aligned}\bar{N}(r,1/G) &\le N_{k+1}(r,1/G_1)+k\bar{N}(r,g)+S(r,g)\\ &\le (k+1)\bar{N}(r,1/g)+N(r,1/P(g))+k\bar{N}(r,g)+S(r,g).\end{aligned} \tag{14}$$

注意到 $\bar{N}(r,f)=\bar{N}(r,g)$,由(4)，(13)和(14)得到

$$(n+m-k-1)\bar{N}(r,f)\le (k+m+1)\big(T(r,f)+T(r,g)\big)+S(r,f)+S(r,g). \tag{15}$$

由(12)~(15)得到

$$\big[(n-2k-m-4)(n+m-k-1)-2(k+3)(k+m+1)\big(T(r,f)+T(r,g)\big)\big]\le S(r,f)+S(r,g), \tag{16}$$

这与 $n>3k+m+6$ 矛盾。因此 $H\equiv 0$ 。仿照文献[5] (Lemma 3)的证明，可得

(i) $\left[f^nP(f)\right]^{(k)}\left[g^nP(g)\right]^{(k)}=1$，或者

(ii) $\left[f^nP(f)\right]^{(k)}\equiv\left[g^nP(g)\right]^{(k)}$。

注意到 $P(w)$ 为多项式，由引理 2.9，情形(i)不可能发生。根据引理 2.8，从(ii)即得 $f^nP(f)\equiv g^nP(g)$。

情形 2： $m=0$ 。仿照情形 1 的证明得到，

$$\big[(n-2k-4)(n-k-1)-2(k+3)(k+1)\big]\big(T(r,f)+T(r,g)\big)\le S(r,f)+S(r,g), \tag{17}$$

这与 $n>3k+5$ 矛盾。因此 $H\equiv 0$ 且有

(iii) $\left[f^n\right]^{(k)}\left[g^n\right]^{(k)}=1$，或者

(iv) $\left[f^n\right]^{(k)}\equiv\left[g^n\right]^{(k)}$。

对于(iii)，根据引理2.10，得到 $f(z)=c_1\big/\sqrt[n]{a_0}\,e^{cz}, g(z)=c_2\big/\sqrt[n]{a_0}\,e^{-cz}$ ，其中 c_1,c_2 和 c 是三个常数且满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k}=1$。

对于(iv)，由引理2.7得到 $f\equiv tg$ ，其中 t 是个常数且 $t^n=1$。

这就完成了定理 1 的证明。

基金项目

天津市自然科学基金(13JCQNJC04400)。

参考文献 (References)

[1] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[2] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer-Verlag, Berlin.

[3] 仪洪勋, 杨重骏 (1995) 亚纯函数唯一性理论. 科学出版社, 北京.

[4] Xu, J.F., Lv, F. and Yi, H.X. (2010) Fixed-Points and Uniqueness of Meromorphic Functions. *Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 9-17.

[5] Yang, C.C. and Hua, X.H. (1997) Uniqueness and Value-Sharing of Meromorphic Functions. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*, **22**, 395-406.

[6] Fang, M.L. (2002) Uniqueness and Value-Sharing of Entire Functions. *Computers & Mathematics with Applications*, **44**, 828-831.

[7] Lin, W.C. and Yi, H.X. (2004) Uniqueness Theorems for Meromorphic Functions. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **35**, 121-132.

[8] Zhang, T.D. and Lv, W.R. (2008) Uniqueness Theorems on Meromorphic Functions Sharing One Value. *Computers & Mathematics with Applications*, **55**, 2981-2992.

[9] Yang, C.C. (1972) On Deficiencies of Differential Polynomials II. *Mathematische Zeitschrift*, **125**, 107-112.

[10] Yi, H.X. (1997) Meromorphic Functions That Share Three Sets. *Kodai Mathematical Journal*, **20**, 22-32.

[11] Zhang, X.B. and Xu, J.F. (2011) Uniqueness of Meromorphic Functions Sharing a Small Function and Its Applications. *Computers & Mathematics with Applications*, **61**, 722-730.