Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 144-150
Published Online July 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.44022

Hans汉斯

The Gerber-Shiu Discounted Penalty Function for the Risk Model with Phase-Type Inter Claim Times

Juxia Xiao

School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Linfen
Email: xiaojuxia2426@126.com

Received: Jun. 12th, 2014; revised: Jul. 10th, 2014; accepted: Jul. 17th, 2014

Abstract

Research in the phase-type distribution has an important influence for the research of other distributions on the positive real axis. It considers the risk model with the phase-type inter-claim times and for constant interest, it first derives the integral-differential equation satisfied by the Gerber-Shiu discounted penalty function. Then through a series of deriving, it obtains the volterra integral equation in a form of matrix. It gets a method of solving the Gerber-Shiu expected penalty function.

Keywords

Phase-Type Inter-Claim Times, Constant, Integral Function, Differential Equation, Volterra

带常利率的时间间隔为相位的Gerber-Shiu折现罚金函数

肖菊霞

山西师范大学数学与计算机科学学院，临汾
Email: xiaojuxia2426@126.com

收稿日期：2014年6月12日；修回日期：2014年7月10日；录用日期：2014年7月17日

摘　要

相位分布的研究在研究正半轴的其他分布中起着重要作用。考虑带常利率的时间间隔为相位分布的更新风险模型。首先推导出Gerber-Shiu期望折现罚金函数满足的积分微分方程，然后经过一系列的推导过程得到Volterra形式的矩阵积分方程，从而得到Gerber-Shiu期望折现罚金函数的一种解法。

关键词

时间间隔为相位分布，常利率，积分方程，微分方程，Volterra

1. 引言

带常利率的更新风险模型，t 时刻资产余额 $U_\beta(t)$ 的微分方程形式为

$$\mathrm{d}U_\beta(t) = c\mathrm{d}t + \beta U_\beta(t)\mathrm{d}t - \mathrm{d}X(t),$$

其中常数 $u \ge 0$ 表示初始准备金，常数 $c > 0$ 表示保费率，常数 $\beta > 0$ 表示常利息力。$X(t)$ 表示 t 时刻为止的总索赔额，更新过程 $\{N(t); t \ge 0\}$ 表示 t 时刻为止的总索赔次数；索赔额 $\{Z_j\}$ 是分布为 $F(x)$，密度为 $p(x)$ 的独立同分布随机变量；S_k 表示第 k 次索赔发生时刻，其中 $S_0 = 0$；索赔时间间隔 $T_n = S_n - S_{n-1}, n \ge 1$ 是独立同分布的正随机变量，其分布函数 $A(x)$，密度函数 $a(x)$。则 $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k$。

当初始余额为 u 时，破产时刻 T_β 定义为：

$$T_\beta = \begin{cases} \inf\{t:\}U_\beta(t) < 0 \\ \infty \quad \forall t, U_\beta(t) \ge o \end{cases}$$

若 $T_\beta = \infty$，则表示破产没有发生；若有破产发生，则破产前瞬间资产余额为 $U_\beta(T_\beta^-)$，破产时赤字为 $|U_\beta(T_\beta)|$，期望折现函数是破产前瞬间资产余额和破产时赤字的期望折现，当初始余额为 u 时，定义为：

$$\phi_\beta(u) = E\left[e^{-\delta T_\beta}\omega\left(U_\beta(T_\beta^-), |U_\beta(T_\beta)|\right) I(T_\beta < \infty) \middle| U_\beta(0) = u\right]$$

其中 $\omega(x_1, x_2)$ 是破产前瞬间资产余额和破产时赤字的非负罚金函数，折现因子 δ 是非负参数，I 是示性函数。

相位分布是在风险理论中最常见的分布之一，近年来人们越来越关注时间间隔为为相位分布的 Sparre Andersen 模型。例如[Albrecher and Boxma] (2005)通过 Laplace-Stieltjes 变换分析折现罚金函数，[Dickson and Drekic] (2004), [Jiandong Ren] (2008)[1]考虑了研究了破产前瞬间资产余额和破产时赤字的联合分布函数，又如[Mogens Bladt] (2005)[2]研究了相位分布的应用。

对Gerber-Shiu折现罚金函数的研究是破产理论主要研究的问题之一。对此问题的研究始于[Gerber and Shiu] (1998)[3]; [Dickson and Hipp] (1998), [Lin] (2003)研究了时间间隔为Erlang (2), [Rong Wu, Yuhua Lu, and Ying Fang] (2007)[4]研究了时间间隔为相位分布。

常利息力更新风险模型也是现代风险理论研究的重要方面，许多人都做过这方面的工作。例如[Sundt and Teugels] (1997), [Yang and Zhang] (1997), [Cai] (2002)[5], [Cardoso and Waters] (2003)。

本文考虑带常利率的时间间隔为相位分布的更新风险模型。首先推导出 Gerber-Shiu 期望折现罚金函数满足的积分微分方程，然后经过一系列的推导过程得到 Volterra 形式的矩阵积分方程，从而得到

Gerber-Shiu 期望折现罚金函数的一种解法。

2. 相位分布简介

假定索赔时间间隔的分布 $A(x)$ 是参数为 (α,B,b) 的相位分布，连续时间马氏链 $J(t)$ 有 n 个暂态 $\{1,2,\cdots,n\}$ 和一个吸收态 $n+1$。其中 $B=(b_{i,j})_{n\times n}$，$b^{\mathrm{T}}=Be^{\mathrm{T}}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，$e=(1,1,\cdots,1)$，$b_j$，$j=1,2,\cdots,n$ 是从暂态 j 跳到吸收态的密度，$b_{i,j}$，$i=1,2,\cdots,n$。$j=1,2,\cdots,n$ 是从暂态 i 跳到暂态 j 的密度，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是初始分布概率，其中 $\alpha_i=P(X_0=i)$，$i=1,2,\cdots,n$，$P(X_0=n+1)=0$。

对 $i=1,2,\cdots,n$，$\phi_{i,\beta}(u)$ 是初值为 $U_\beta(0)=u$，初始状态 $J(0)=i$ 的期望罚金折现函数，定义为：

$$\phi_{i,\beta}(u)=E\left[e^{-\delta T_\beta}\omega\left(U_\beta(T_\beta^-),\left|U_\beta(T_\beta)\right|\right)I(T_\beta<\infty)\middle|U_\beta(0)=u,J(0)=i\right] \tag{1}$$

若记

$$\Phi_\beta(u)=\left(\phi_{1,\beta}(u),\phi_{2,\beta}(u),\cdots,\phi_{n,\beta}(u)\right)^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

则期望折现罚金函数 $\phi_\beta(u)$ 可由下式给出：

$$\phi_\beta(u)=\alpha\Phi_\beta(u) \tag{3}$$

3. 主要结论

定理 2.1 对任意的 $u,\delta\ge 0,\beta>0,i=1,2,\cdots,n$

$$\phi'_{i,\beta}(u)=\frac{-\sum_{j=1}^n b_{ij}\phi_{j,\beta}(u)}{u\beta+c}+\frac{\delta\phi_{i,\beta}(u)}{u\beta+c}-\frac{\sum_{j=1}^n b_i a_j\left[\int_0^u\phi_{j,\beta}(u-x)p(x)\mathrm{d}x+\int_u^\infty\omega(u,x-u)p(x)\mathrm{d}x\right]}{u\beta+c}$$

证明：考虑在足够小的时间 Δt 内，由相位分布的性质，在此时间段内最多发生一次状态改变(暂态之间变化)或发生一次索赔，而且状态改变与索赔不可能同时发生，故 $\phi_{i,\beta}(u)$ 可在下面三种情况下取得 1)在时间 Δt 内没有发生索赔及状态改变；2)在时间 Δt 内没有发生索赔但发生状态改变；3)在时间 Δt 内发生

一次索赔，索赔后可能导致破产也可能没有破产，当索赔额 $x\le ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}$ 时，表示没有破产，当 $x>ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}$ 时，表示破产发生。

由以上及(1)式可知：

$$\begin{aligned}\phi_{i,\beta}(u)&=(1+b_{ii}\Delta t)e^{-\delta\Delta t}\phi_{i,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)+\sum_{j=1,j\ne i}^n b_{ij}\Delta te^{-\delta\Delta t}\phi_{j,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)\\&\quad+\sum_{j=1}^n b_i a_j\Delta te^{-\delta\Delta t}\int_0^{ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}}\phi_{j,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}-x\right)p(x)\mathrm{d}x\\&\quad+\sum_{j=1}^n b_i a_j\Delta te^{-\delta\Delta t}\int_{ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}}^\infty\omega\left(U_\beta\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right),x-\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)\right)p(x)\mathrm{d}x+o(\Delta t).\end{aligned} \tag{4}$$

因为

$$e^{-\delta\Delta t}=(1-\delta\Delta t)+o(\Delta t)\qquad(\Delta t\to 0)$$

所以(4)式为

$$\begin{aligned}\phi_{i,\beta}(u)=&(1+b_{ii}\Delta t)(1-\delta\Delta t)\phi_{i,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_{ij}\Delta t(1-\delta\Delta t)\phi_{j,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)\\&+\sum_{j=1}^{n}b_i a_j\Delta t(1-\delta\Delta t)\int_0^{ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}}\phi_{j,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}-x\right)p(x)\mathrm{d}x\\&+\sum_{j=1}^{n}b_i a_j\Delta t(1-\delta\Delta t)\int_{ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}}^{\infty}\omega\left(U_\beta\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right),x-\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)\right)p(x)\mathrm{d}x\\&+o(\Delta t).\end{aligned}\tag{5}$$

移项整理(5)且等式两端同除$(u\beta+c)\Delta t$得：

$$\begin{aligned}&\frac{\phi_{i,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)-\phi_{i,\beta}(u)}{(u\beta+c)\Delta t}\\&=\frac{-b_{ii}\Delta t}{(u\beta+c)\Delta t}\phi_{i,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)-\frac{\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_{ij}\Delta t(1-\delta\Delta t)}{(u\beta+c)\Delta t}\phi_{j,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)\\&+\frac{\delta\Delta t}{(u\beta+c)\Delta t}\phi_{i,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)-\frac{\sum_{j=1}^{n}b_i a_j\Delta t(1-\delta\Delta t)\int_0^{ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}}\phi_{j,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}-x\right)p(x)\mathrm{d}x}{(u\beta+c)\Delta t}\\&-\frac{\sum_{j=1}^{n}b_i a_j\Delta t(1-\delta\Delta t)\int_{ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}}^{\infty}\omega\left(U_\beta\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right),x-\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)\right)p(x)dx}{(u\beta+c)\Delta t}\\&-\frac{b_{ii}\delta(\Delta t)^2\varphi_{i,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)+o(\Delta t)}{(u\beta+c)\Delta t}\end{aligned}\tag{6}$$

在(6)中，令$\Delta t\to 0$，且由

$$\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{\varphi_{i,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)+\varphi_{i,\beta}(u)}{(u\beta+c)\Delta t}=\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{\varphi_{i,\beta}\left(ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}\right)+\varphi_{i,\beta}(u)}{ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}-u}\frac{ue^{\beta\Delta t}+c\frac{e^{\beta\Delta t}-1}{\beta}-u}{(u\beta+c)\Delta t}=\varphi'_{i,\beta}(u).$$

可得：

$$\phi'_{i,\beta}(u)=\frac{-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\phi_{j,\beta}(u)}{u\beta+c}+\frac{\delta\phi_{i,\beta}(u)}{u\beta+c}-\frac{\sum_{j=1}^{n}b_i a_j\left[\int_0^u\phi_{j,\beta}(u-x)p(x)\mathrm{d}x+\int_u^\infty\omega(u,x-u)p(x)\mathrm{d}x\right]}{u\beta+c}$$

推论 2.1 对任意的$u,\delta\geq 0,\beta>0$

$$\Phi'_\beta(u)=\frac{\delta\Phi_\beta(u)-\mathrm{B}\Phi_\beta(u)-\left[\int_0^u\alpha\Phi_\beta(u-x)p(x)\mathrm{d}x+W(u)\right]b^{\mathrm{T}}}{u\beta+c}\tag{7}$$

其中$W(u)=\int_u^\infty\omega(u,x-u)p(x)\mathrm{d}x$。

证明：由(2)(4)及相位初始分布的性质$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1$直接推出。

定理 2.2 对任意的 $u,\delta \ge 0,\beta > 0$

$$\Phi_{\beta}(u)=\frac{c\Phi_{\beta}(0)-\int_0^u W(t)\mathrm{d}tb^{\mathrm{T}}+\int_0^u\left[\left((\delta+\beta)E-B\right)-F(u-t)b^{\mathrm{T}}\alpha\right]\Phi_{\beta}(t)\mathrm{d}t}{u\beta+c} \tag{8}$$

其中 $W(u)=\int_u^{\infty}\omega(u,x-u)p(x)\mathrm{d}x$。

证明：(7)式两边同乘 $(u\beta+c)$，得到

$$\delta\Phi_{\beta}(u)-\mathrm{B}\Phi_{\beta}(u)=(u\beta+c)\Phi'_{\beta}(u)-\left[\int_0^u\alpha\Phi_{\beta}(u-x)p(x)\mathrm{d}x+W(u)\right]b^{\mathrm{T}}$$

整理得

$$\delta\Phi_{\beta}(u)-\mathrm{B}\Phi_{\beta}(u)=(u\beta+c)\Phi'_{\beta}(u)+\left[\int_0^u\alpha\Phi_{\beta}(u-x)p(x)\mathrm{d}x+W(u)\right]b^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

用 s 替换 u (9)式变为

$$\delta\Phi_{\beta}(s)-\mathrm{B}\Phi_{\beta}(s)=(s\beta+c)\Phi'_{\beta}(s)+\left[\int_0^s\alpha\Phi_{\beta}(s-x)p(x)\mathrm{d}x+W(s)\right]b^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

(10)式两端对变量 s 作积分，有

$$\int_0^u\delta\Phi_{\beta}(s)-\mathrm{B}\Phi_{\beta}(s)\mathrm{d}s=\int_0^u(s\beta+c)\Phi'_{\beta}(s)\mathrm{d}s+\int_0^u W(s)\mathrm{d}sb^{\mathrm{T}}+\int_0^u\int_0^s\alpha\Phi_{\beta}(s-x)p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}sb^{\mathrm{T}}$$

若记 E 为 n 阶单位矩阵，由分部积分法及 $F'(x)=p(x)$，得

$$\begin{aligned}\int_0^u(\delta E-\mathrm{B})\Phi_{\beta}(s)\mathrm{d}s&=(u\beta+c)\Phi_{\beta}(u)-c\Phi_{\beta}(0)-\beta\int_0^u\Phi_{\beta}(s)\mathrm{d}s+\int_0^u W(s)\mathrm{d}sb^{\mathrm{T}}\\&\quad+\alpha\left[\int_0^u F(x)\Phi_{\beta}(s-x)\Big|_0^s\mathrm{d}s-\int_0^u\int_0^s F(x)\mathrm{d}\Phi_{\beta}(s-x)\mathrm{d}s\right]b^{\mathrm{T}}\\&=(u\beta+c)\Phi_{\beta}(u)-c\Phi_{\beta}(0)-\beta\int_0^u\Phi_{\beta}(s)\mathrm{d}s+\int_0^u W(s)\mathrm{d}sb^{\mathrm{T}}\\&\quad+\alpha\left[\int_0^u F(s)\Phi_{\beta}(0)\mathrm{d}s-\int_0^u\int_0^s F(x)\mathrm{d}\Phi_{\beta}(s-x)\mathrm{d}s\right]b^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{11}$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^u\int_0^s F(x)\mathrm{d}\Phi_{\beta}(s-x)\mathrm{d}s&=-\int_0^u\int_0^s F(x)\Phi'_{\beta}(s-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=-\int_0^u F(x)\int_x^u\Phi'_{\beta}(s-x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\&=-\int_0^u F(x)\int_x^u\mathrm{d}\Phi_{\beta}(s-x)\mathrm{d}x=-\int_0^u F(x)\left[\Phi_{\beta}(u-x)-\Phi_{\beta}(0)\right]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

故而(11)式为

$$\int_0^u(\delta E-\mathrm{B})\Phi_{\beta}(s)\mathrm{d}s=(u\beta+c)\Phi_{\beta}(u)-c\Phi_{\beta}(0)-\beta\int_0^u\Phi_{\beta}(s)\mathrm{d}s+\int_0^u W(s)\mathrm{d}sb^{\mathrm{T}}+\int_0^u F(x)\alpha\Phi_{\beta}(u-x)\mathrm{d}xb^{\mathrm{T}}$$

故而

$$\Phi_{\beta}(u)=\frac{c\Phi_{\beta}(0)-\int_0^u W(t)\mathrm{d}tb^{\mathrm{T}}+\int_0^u\left[\left((\delta+\beta)E-B\right)-F(u-t)b^{\mathrm{T}}\alpha\right]\Phi_{\beta}(t)\mathrm{d}t}{u\beta+c}$$

引理 2.1

若 $L(x)=\left(l_1(x),l_2(x),\cdots,l_n(x)\right)^{\mathrm{T}}$ 是向量函数，且 $K(x,s)=\left(k_{i,j}(x,s)\right)_{n\times n}$ 是 Volterra 核矩阵，即

$$\phi_i(x)=l_i(x)+\sum_{j=1}^{n}\int_0^x k_{i,j}(x,s)\phi_j(s)\mathrm{d}s,\quad i=1,2,\cdots,n$$

其中 $k_{i,j}(x,s)$ 是 $[0,x]$ 上的 L_2 可积函数，则对任意的 $x>0$，$\Phi(x)$ 的解可以表示为：

$$\Phi(x)=\sum_{j=0}^{\infty}L_j(x)$$

其中

$$L_0(x)=L(x),\quad L_j(x)=\int_0^x K^j(x,s)L(s)\mathrm{d}s,\quad j\ge 1$$

$K^j(x,s)$ 是迭核，按方阵的乘积处理。

注：引自参考文献[6]。

定理 2.3 对任意的 $u,\delta\ge 0,\beta>0$

$$\Phi_\beta(u)=\sum_{j=0}^{\infty}L_{j,\beta}(u) \tag{12}$$

其中

$$L_{0,\beta}(u)=L_\beta(u)=\frac{c\Phi_\beta(0)-\int_0^u W(t)\mathrm{d}tb^{\mathrm{T}}}{u\beta+c},\ L_{j,\beta}(u)=\int_0^u K_\beta^j(u,s)L_\beta(s)\mathrm{d}s,\ \ j\ge 1$$

$$K_\beta(u,t)=\frac{((\delta+\beta)E-B)-F(u-t)b^{\mathrm{T}}\alpha}{u\beta+c}$$

$K_\beta{}^j(x,s)$ 以方阵的乘积处理，E 为 n 阶单位阵。

证明：(8)式为 Volterra 积分方程组形式

$$\Phi(x)=L(x)+\int_0^x K(x,s)\Phi(s)\mathrm{d}s$$

由于 $F(x)$ 可微，故 $K(x,s)$ 是 L_2 Volterra 核矩阵，从而由引理 2.1 可得结论。

4. 结论与建议

由(12)可知，只需求出 $\Phi_\beta(0)$ 便可得出 $\phi_\beta(u)$，再由 $\phi_\beta(u)=\alpha\Phi_\beta(u)$ 可求出期望惩罚函数 $\phi_\beta(u)$。在定理 2.2 中令 $\beta=0$，可得 Volterra 积分方程组形式

$$\Phi_0(u)=\frac{c\Phi_0(0)-\int_0^u W(t)b^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t+\int_0^u\left[((\delta+\beta)E-B)-F(u-t)b^{\mathrm{T}}\alpha\right]\Phi_0(t)\mathrm{d}t}{c}$$

在定理 2.3 中取 $\beta=0$，则有

$$\Phi_0(u)=\sum_{j=0}^{\infty}L_{j,0}(u)$$

其中

$$L_{0,0}(u)=L_0(u)=\frac{c\Phi_0(0)-\int_0^u W(t)\mathrm{d}tb^{\mathrm{T}}}{c},\ L_{j,0}(u)=\int_0^u K_0^j(u,s)L_0(s)\mathrm{d}s,\ \ j\ge 1$$

$$K_0(u,t)=\frac{(\delta E-B)-F(u-t)b^{\mathrm{T}}\alpha}{c}$$

$K_0{}^j(u,s)$ 以方阵的乘积处理，E 为 n 阶单位阵。

由以上推导可知，只要求出 $\Phi_0(0)$，就可求出 $\phi_0(u)$，进而可求出 $\phi_0(u)$。

参考文献 (References)

[1] Ren, J.D. (2008) The discounted joint distribution of surplus prior to ruin and the deficit at ruin in a sparre andersen model. *North American Actuarial Journal*, **11**, 128-136.

[2] Bladt, M. (2005) A review on phase-type distributions and their use in risk theory. *Astin Bulletin*, **35**, 145-161.

[3] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. (1998) On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, **2**, 48-72.

[4] Wu, R., Lu, Y.H. and Fang, Y. (2007) On the Gerber-Shiu discounted penalty function for the ordinary renewal risk model with constant interest. *North American Actuarial Journal*, **11**, 135.

[5] Cai, J. and Dickson, D.C.M. (2002) On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **30**, 389-404.

[6] 《现代应用数学手册》编委会 (2006) 现代应用数学手册，分析与方程卷. 清华大学出版社，北京, 921-963.