Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 1-7
Published Online January 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.51001

Hans汉斯

The Derivation Algebra of Lie Algebra $Der(C_q) \propto C_q$

Zhilong Zhang, Ran Shen

College of Science, Donghua University, Shanghai
Email: 1021095770@qq.com, rshen@dhu.edu.cn

Received: Nov. 9th, 2014; revised: Dec. 1st, 2014; accepted: Dec. 15th, 2014

Abstract

In this paper, the derivation algebra of Lie algebra we give is $Der(C_q) \propto C_q$. We prove its outer derivation is one dimension.

Keywords

Lie Algebra, Quantum Torus, Derivation Algebra

李代数 $Der(C_q) \propto C_q$ 的导子代数

张志龙，申　冉

东华大学理学院，上海
Email: 1021095770@qq.com, rshen@dhu.edu.cn

收稿日期：2014年11月9日；修回日期：2014年12月1日；录用日期：2014年12月15日

摘　要

本文给出了李代数 $Der(C_q) \propto C_q$ 的导子代数结构。证明了其有一维外导子。

关键词

李代数，量子环面，导子代数

1. 引言

对于李代数的结构来说，单凭李代数的定义有时很难看清它的结构。李代数的导子代数可以帮助我们更好的了解李代数的结构。导子的重要性还在于它与低维上同调群的密切关系，由导子的结构往往能洞察出从李代数定义中看不出的李代数的一些结构特性。因此，导子代数是李代数结构理论的重要组成部分。文献[1]-[4]分别研究了广义 Witt 代数、有限生成阶化李代数、无限维 Heisenberg 代数、扭 Heisenberg-Virasoro algebra 的导子代数结构。最近，在文献[5]中，S. EswaraRao 等人给出了 $Der\left(C_q\right)\propto C_q$ 这类李代数的定义，并对其不可约权模进行了分类。本文将利用同调代数理论研究李代数 $Der\left(C_q\right)\propto C_q$ 的导子代数的结构。本文中 C 表示复数域，Z 表示全体整数的集合。

2. 李代数 $Der\left(C_q\right)\propto C_q$

设 L 是域 F 上的李代数，V 是一个 L-模。从 L 到 V 的一个线性映射叫做导子，若对于任意的 $x,y\in L$，都有

$$\varphi[x,y]=x\cdot\varphi(y)-y\cdot\varphi(x).$$

映射 $\psi:x\to x\cdot v\quad(v\in V)$ 叫做内导子。

用 $Der_F\left(L,V\right)$ 表示所有导子的向量空间， $Inn_F\left(L,V\right)$ 表示所有内导子的向量空间。令

$$H^1\left(L,V\right)=Der_C\left(L,V\right)/Inn_C\left(L,V\right).$$

本文中，分别用 $Der\left(L,V\right),Inn\left(L,V\right)$ 来表示 $Der_C\left(L,V\right),Inn_C\left(L,V\right)$。

令 $q=\left(q_{ij}\right)_{d\times d}$ 是任意 $d\times d$ 矩阵，其中对于所有的 $1\le i,j\le d$，满足 q_{ij} 是非零复数，且 $q_{ii}=1,q_{ij}^{-1}=q_{ji}$，$q_{ij}$ 是单位根。考虑非交换罗朗多项式环 $S_{[d]}=c\left[t_1^{\pm1},\cdots,t_d^{\pm1}\right]$。令 J_q 是 $S_{[d]}$ 中由元素 $\left\{t_it_j=q_{ij}t_jt_i,t_it_i^{-1}-1,t_i^{-1}t_i-1,\forall 1\le i,j\le d\right\}$ 生成的理想。令 $C_q=S_{[d]}/J_q$，则 C_q 称为伴随矩阵 q 的量子环。矩阵 q 称为量子环矩阵。

对于 $n=\left(n_1,\cdots,n_d\right)\in Z^d$，令 $t^n=t_1^{n_1}\cdots t_d^{n_d}$。定义映射 $\sigma,f:Z^d\times Z^d\to C^*$，

$$\sigma\left(n,m\right)=\prod_{1\le i\prec j\le d}q_{ji}^{n_jm_i},\quad f\left(n,m\right)=\sigma\left(n,m\right)\sigma\left(m,n\right)^{-1},\quad m,n\in Z^d.$$

对 $s,r\in Z^d$，则有如下的结论：

$$\sigma\left(n+m,s+r\right)=\sigma\left(n,s\right)\sigma\left(n,r\right)\sigma\left(m,s\right)\sigma\left(m,r\right)\tag{1}$$

$$f\left(n,m\right)=f\left(m,n\right)^{-1},\quad f\left(n,n\right)=f\left(n,-n\right)^{-1}=1\tag{2}$$

$$f\left(n+m,s+r\right)=f\left(n,s\right)f\left(n,r\right)f\left(m,s\right)f\left(m,r\right)\tag{3}$$

$$t^nt^m=\sigma\left(n,m\right)t^{n+m},\quad\left[t^n,t^m\right]=\left(\sigma\left(n,m\right)-\sigma\left(m,n\right)\right)t^{n+m}\tag{4}$$

定义集合 $rad\left(f\right)=\left\{n\in Z:f\left(n,m\right)=1,\forall m\in Z^d\right\}$。

易知 $rad\left(f\right)$ 是 Z^d 的一个子群。由于 C_q 是 Z^d-分次的，定义导子 $\partial_1,\partial_2,\cdots,\partial_d$ 满足

$$\partial_i\left(t^n\right)=n_it^n,\quad n=\left(n_1,n_2,\cdots,n_d\right)\in Z^d.$$

内导子 $adt^n(t^m)=(\sigma(n,m)-\sigma(m,n))t^{n+m}$.

注意到对于 $n\in rad(f), adt^n=0$。对 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_d)\in C^d$，记 $D(u,r)=t^r\sum_{i=1}^d u_i\partial_i$。令 $Der(C_q)$ 为 C_q 的所有导子组成的空间。则有

性质 2.1 [3]

1)
$$Der(C_q)=\oplus_{n\in Z^d}Der(C_q)_n, \tag{5}$$

$$Der(C_q)_n=\begin{cases}Cadt^n, & n\notin rad(f)\\ \oplus_{i=1}^d Ct^n\partial_i, & n\in rad(f)\end{cases}. \tag{6}$$

2) 以如下的基之间的李积运算使得 $Der(C_q)$ 成为一个李代数：

$$[adt^s,adt^r]=(\sigma(s,r)-\sigma(r,s))adt^{s+r},\quad \forall r,s\notin rad(f), \tag{7}$$

$$[D(u,r),adt^s]=(u,s)\sigma(r,s)adt^{r+s},\quad \forall r\in rad(f), s\notin rad(f), u\in C^d, \tag{8}$$

$$[D(u,r),D(u',r')]=D(\omega,r+r'),\quad \forall r,r'\in rad(f), u,u'\in C^d, \tag{9}$$

这里 $\omega=\sigma(r,r')((u,r')u'-(u',r)u)$。

考虑空间 $Der(C_q)\propto C_q$，将其元素 (T,t^n) 表示为 $T+t^n$，其中 $T\in Der(C_q)$，$t^n\in C_q$，$n\in Z^d$。则 $Der(C_q)\propto C_q$ 是一个满足如下李积关系的李代数：

$$[D(u,r),t^n]=(u,n)\sigma(r,n)t^{r+n},\ \forall r\in rad(f), n\in Z^d, u\in C^d \tag{10}$$

$$[adt^s,t^n]=(\sigma(s,n)-\sigma(n,s))t^{s+n},\quad \forall s\notin rad(f), n\in Z^d \tag{11}$$

$$[t^m,t^n]=(\sigma(m,n)-\sigma(n,m))t^{m+n},\quad \forall m,n\in Z^d. \tag{12}$$

显然李代数 L 是一个 Z^d -分次代数，即

$$L=\bigoplus_{n\in Z^d}L_n,\quad L_n=t^n+Der(C_q)_n \tag{13}$$

3. 导子代数

令 $L=Der(C_q)\propto C_q$，并记 $\hbar=C_q$，$b=Der(C_q)$。Hilton 和 Stammbach (1997) [6]给出了如下由 h 诱导的 Z^d -分次向量空间的正合序列：

$$H^1(L,h)\to H^1(L,L)\to H^1(L,L/h). \tag{14}$$

其右边 $H^1(L,L/h)$ 可以通过计算关于AHochschild-Serre spectral序列

$$H^p(L/h,H^q(h,L/h))\Rightarrow H^{p+q}(L,L/h)$$

的 5 项序列

$$(0)\to H^1(L/h,L/h)\to H^1(L,L/h)\to H^1(h,L/h)^L \tag{15}$$

的各项得到。而该正合序列中 $H^1(h,L/h)$ 这一项可嵌入 $Hom_{U(b)}(h/[h,h],b)$。因此，要得到 $H^1(L,L)$，只需计算 $H^1(L,h)$、$H^1(L/h,L/h)$ 和 $Hom_{U(b)}(h/[h,h],b)$。

命题 3.1 若 $r,s\in rad(f)$, 则 $r+s\in rad(f)$，若 $r\notin rad(f)$或$s\notin rad(f)$，则 $r+s\notin rad(f)$。

证明 由 $rad(f)$ 和 f 的定义以及(1)式可直接得到。

引理 3.2 设 G 是一个交换群，若 $L=\bigoplus_{m\in G}L_m$ 是一个有限生成的 G -分次李代数，则 $Der(L)=\bigoplus_{m\in G}Der(L)_m$ 也是 G -分次李代数。

证明 事实上 $Der(L)=\underset{m\in G}{\oplus}Der(L)_m$，其中

$$Der(L)_m=\{d\in Der(L)|d(L_n)\subset L_{m+n},\forall n\in G\}.$$

引理 3.3 若 $d_r\in Der(Der(C_q))$，则 $d_r\in ad(Der(C_q))$。

证明 令 $g(m,n)=\sigma(m,n)-\sigma(n,m)$，由引理 2.2，可设

$$\begin{cases}d_w(adt^s)=\varphi(w,s)adt^{s+w}\\ d_w(D(u,r))=\phi_u(w,r)D(u,r+w)\end{cases}\text{此时}w\in rad(f);$$

$$\begin{cases}d_w(adt^s)=\varphi(w,s)adt^{s+w}\\ d_w(D(u,r))=\psi_u(w,r)adt^{r+w}\end{cases}\text{此时}w\notin rad(f).$$

由李积关系分别计算 $d_w[adt^m,adt^n],d_w[D(u,r),adt^s]$(这里$m$、$n$、$s\notin rad(f),r\in rad(f)$)可分别得到

$$\begin{cases}g(m,n)\phi(w,m+n)=g(m+w,n)\phi(w,m)+g(m,n+w)\phi(w,n), & (16)\\ (u,s)\sigma(r,s)\phi(w,s+r)=(u,s)\sigma(r+w,s)\varphi_u(w,r)+(u,s+w)\sigma(r,s+w)\phi(w,s), & (17)\end{cases}$$

其中 $w\in rad(f)$。

$$\begin{cases}g(m,n)\phi(w,m+n)=g(m+w,n)\phi(w,m)+g(m,n+w)\phi(w,n), & (18)\\ (u,s)\sigma(r,s)\phi(w,r+s)=g(r+w,s)\psi(w,r)+(u,s+w)\sigma(r,s+w)\phi(w,s), & (19)\end{cases}$$

其中 $w\notin rad(f)$。

取 $e_1=(1,0,0,\cdots,0),e_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,e_d=(0,0,\cdots,0,1)$。令 $m^1=e_2,n^1=m_2e_2$，由式(16)得

$$\varphi(w,m_2e_2)=g(m^1+w,n^1)\varphi(w,e_2)/g(m^1,n^1+w) \tag{20}$$

令 $m^2=m_1e_1,n^2=e_2$, 由式(16)得

$$g(m^2,n^2)\varphi(w,m_1e_1+e_2)=g(m^2+w,n^2)\varphi(w,m_1e_1)+g(m^2,n^2+w)\varphi(w,e_2) \tag{21}$$

令 $m^3=m_1e_1+e_2,n^3=-e_2$，由式(16)得

$$g(m^3,n^3)\varphi(w,m_1e_1)=g(m^3+w,n^3)\varphi(w,m_1e_1+e_2)+g(m^3,n^3+w)\varphi(w,-e_2) \tag{22}$$

令 $m^4=e_2,n^4=-e_2$，由式(16)得

$$\varphi(w,-e_2)=g(m^4+w,n^4)\varphi(w,e_2)/g(m^4,n^4+w) \tag{23}$$

将(20)、(21)、(23)代入(22)得

$$\begin{aligned}\varphi(w,m_1e_1)=&\left[\frac{g(m^2,n^2+w)}{g(m^2,n^2)}g(m^3+w,n^3)+\frac{g(m^4+w,n^4)}{g(m^4,n^4+w)}g(m^3,n^3+w)\right]\varphi(w,e_2)/g(m^3,n^3)\\ &-\frac{g(m^2+w,n^2)}{g(m^2,n^2)}g(m^3+w,n^3)\end{aligned} \tag{24}$$

为了简便，将(24)式记为

$$\varphi(w,m_1e_1)=\theta_1(w)\varphi(r,e_2) \tag{25}$$

分别用 $e_3,\cdots,e_d$ 替换 e_1；$m_3,\cdots,m_d$ 替换 m_1，重复上述(20)~(24)的过程可得到类似于(25)式的一组式子：

$$\begin{gathered}\phi(w,m_1e_1)=\theta_1(w)\phi(w,e_2);\\ \phi(w,m_2e_2)=\theta_2(w)\phi(w,e_2);\\ \vdots\\ \phi(w,m_de_d)=\theta_d(w)\phi(w,e_2)\end{gathered}\tag{*}$$

其中 θ_i 为 Z^d 到复数域 C 的映射。

取 $m^5=m_1e_1,n^5=m_2e_2$，由式(16)得

$$g\left(m^5,n^5\right)\varphi(w,m_1e_1+m_2e_2)=g\left(m^5+w,n^5\right)\varphi(w,m_1e_1)+g\left(m^5,n^5+w\right)\varphi(w,m_2e_2)\tag{26}$$

将(*)、(20)式代入(26)得

$$\varphi(w,m_1e_1+m_2e_2)=\left[\frac{g\left(m^5+w,n^5\right)\theta_1(w)}{g\left(m^5,n^5\right)}+\frac{g\left(m^5,n^5+w\right)g\left(m^1+w,n^1\right)}{g\left(m^5,n^5\right)g\left(m^1,n^1+w\right)}\right]\varphi(w,e_2)\tag{27}$$

将(27)记为

$$\phi(w,m_1e_1+m_2e_2)=F_1(w)\phi(w,e_2),\tag{28}$$

其中

$$F_1(w)=\frac{g\left(m^5+w,n^5\right)\theta_1(w)}{g\left(m^5,n^5\right)}+\frac{g\left(m^5,n^5+w\right)g\left(m^1+w,n^1\right)}{g\left(m^5,n^5\right)g\left(m^1,n^1+w\right)}.$$

令 $m^6=m_1e_1+m_2e_2,n^6=m_3e_3$，由式(16)得

$$g\left(m^6,n^6\right)\phi(w,m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3)=g\left(m^6+w,n^6\right)\phi(w,m_1e_1+m_2e_2)+g\left(m^6,n^6+w\right)\phi(w,m_3e_3).\tag{29}$$

将(28)、(*)代入(29)得

$$\varphi(w,m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3)=\frac{g\left(m^6+w,n^6\right)F_1(w)+g\left(m^6,n^6+w\right)\theta_3(w)}{g\left(m^6,n^6\right)}\varphi(w,e_2).\tag{30}$$

将(30)式记为

$$\phi(w,m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3)=F_2(w)\phi(w,e_2),\tag{31}$$

其中

$$F_2(w)=\frac{g\left(m^6+w,n^6\right)F_1(w)+g\left(m^6,n^6+w\right)\theta_3(w)}{g\left(m^6,n^6\right)}.$$

重复以上过程最终将得到

$$\varphi(w,m)=\varphi(w,m_1e_1+m_2e_2+\cdots+m_de_d)=F_{d-1}(w)\varphi(w,e_2)\tag{32}$$

由(17)、(19)得

$$\phi_u(w,r)=\frac{(u,s)\sigma(r,s)\varphi(w,s+r)-(u,s+w)\sigma(r,s+w)\varphi(w,s)}{(u,s)\sigma(r+w,s)}\tag{33}$$

$$\psi_u(w,r)=\frac{(u,s)\sigma(r,s)\varphi(w,r+s)-(u,s+w)\sigma(r,s+w)\varphi(w,s)}{g(r+w,s)}\tag{34}$$

由命题 3.1 知，$s+r\notin rad(f)$，由(32)知 $\varphi(w,s+r),\varphi(w,s)$ 可由 $\varphi(w,e_2)$ 所决定，故 $\phi_u(w,r),\psi_u(w,r)$ 可由 $\varphi(w,e_2)$ 所决定。由此可知 $\dim Der(Der(C_q))=1$，因此 $Der(Der(C_q))$ 只有内导子。

引理 3.4 $Der(L,h)=Der(L,h)_0+Inn(L,h)$，这里

$$Der(L,h)_0=\left\{\varphi\in Der(L,h)\middle|\varphi(L_n)\subseteq h_n,\text{对于}n\in Z^d\right\}。$$

引理 3.5 $D\in Der(L,h)_0$，当且仅当 D 是一个从 L 到 h 满足下列关系的线性映射：

$$D(adt^r)=\lambda(r)t^r,\ r\notin rad(f) \tag{35}$$

$$D(t^r)=(\lambda(r)+W)t^r,\ r\notin rad(f),W\in C \tag{36}$$

$$D(t^r)=Kt^r,\ r\in rad(f),K\in C \tag{37}$$

$$D(D(u,r))=0,\ r\in rad(f). \tag{38}$$

其中 φ 为 Z^d 到复数域 C 的线性映射。

证明 假设 D 是一个满足上述条件从 L 到 h 的线性映射，显然 $D(L_n)\subseteq h_n$，也容易验证 D 是一个从 L 到 h 的导子。

反过来，令 $D\in Der(L,h)_0$，假设 $D(adt^r)=\lambda(r)t^r,\lambda(r)\in C$。对于 $r\neq s$，且 $r,s\notin rad(f)$，有

$$\begin{aligned}D\left[adt^s,adt^r\right]&=D\left[(\sigma(s,r)-\sigma(r,s))adt^{s+r}\right]=\left[\sigma(s,r)-\sigma(r,s)\right]\lambda(s+r)t^{s+r}\\&=\left[\lambda(s)t^s,adt^r\right]+\left[adt^s,\lambda(r)t^r\right]=\left[\sigma(s,r)-\sigma(r,s)\right]*\left[\lambda(r)+\lambda(s)\right]t^{s+r},\end{aligned}$$

得 $\lambda(r+s)=\lambda(r)+\lambda(s)$。

对于 $r\neq s,\text{且}r,s\in rad(f)$，假设 $D(t^r)=F(r)t^r,F(r)\in C$。有

$$\begin{aligned}&D\left[adt^s,t^r\right]=D\left[(\sigma(s,r)-\sigma(r,s))t^{s+r}\right]=\left[\sigma(s,r)-\sigma(r,s)\right]F(r+s)t^{s+r}\\&=\left[\phi(s)t^s,t^r\right]+\left[adt^s,F(r)t^r\right]=(\sigma(s,r)-\sigma(r,s))\lambda(s)t^{s+r}+(\sigma(s,r)-\sigma(r,s))F(r)t^{s+r},\end{aligned}$$

得 $F(r+s)=\lambda(s)+F(r)$。

假设 $\lambda(\varepsilon_1)=a_1,\cdots,\lambda(\varepsilon_n)=a_d$ 且 $F(\varepsilon_1)=b_1,\cdots,F(\varepsilon_d)=b_d$，则

$$F(r)=\lambda(r-\varepsilon_i)+F(\varepsilon_i)=\lambda(r)+F(\varepsilon_i)-\lambda(\varepsilon_i)=\lambda(r)+b_i-a_i.$$

若令 $W=a_i-b_i$，那么 $F(r)=\lambda(r)+W$。

对于 $r\in rad(f),n\notin rad(f)$ 有

$$\begin{aligned}D\left[D(u,r),t^n\right]&=(u,n)\sigma(r,n)D(t^{r+n})=(u,n)\sigma(r,n)F(r+n)t^{r+n}\\&=\left[D(D(u,r)),t^n\right]+F(n)\left[D(u,r),t^n\right]\\&=\left[D(D(u,r)),t^n\right]+F(n)(u,n)\sigma(r,n)t^{r+n},\end{aligned}$$

得

$$\left[D(D(u,r),t^n)\right]=(F(r+n)-F(n))(u,n)\sigma(r,n)t^{r+n}.$$

由李积关系知 $D(D(u,r))=(F(r+n)-F(n))D(u,r)$。但由假设 $D\in Der(L,C_q)_0$，故 $D(D(u,r))=0$。

对于 $r\in rad(f),n\in rad(f)$，假设 $D(t^n)=\alpha(n)t^n,\alpha(n)\in C$，则

$$D\left[D(u,r),t^n\right]=(u,n)\sigma(r,n)D(t^{r+n})=\left[D(D(u,r),t^n)\right]+\left[D(u,r),D(t^n)\right].$$

即 $(u,n)\sigma(r,n)D\left(t^{r+n}\right)=\left[D(u,r),D\left(t^n\right)\right]$，代入 $D\left(t^n\right)=\alpha(n)t^n$，有

$$(u,n)\sigma(r,n)\alpha(r+n)t^{r+n}=(u,n)\sigma(r,n)\alpha(n)t^{r+n},$$

故 $\alpha(r+n)=\alpha(n)$，不妨设 $\alpha(n)=K$。证毕。

引理 3.6 $Hom_{U(b)}\left(h/[h,h],b\right)=0.$

证明 由(4)式可知 $\left[C_q,C_q\right]=C_q$，即 $h/[h,h]=0.$

记满足(35)~(38)的导子为 δ，则有

定理 3.7 $DerL=adL\oplus C\delta.$

证明 根据引理 3.6，$H^1(h,L/h)^L=0$，由引理 3.3 知 $H^1(L/h,L/h)=0$，故由正合列(15)知 $H^1(L,L/h)=0$。所以，根据引理 3.5 和正合列(14)知 $H^1(L,L)=C\delta$。

而 $H^1(L,L)=DerL/adL$，故定理得证。

参考文献 (References)

[1] Dokovic, D. and Zhao, K. (1996) Derivations, isomorphisms and second cohomology of generalized Witt algebras. *Algebra Colloquium*, **3**, 245-272.

[2] Farnseiner, R. (1988) Derivations and central extensions of finitely generated graded Lie algebra. *Journal of Algebra*, **118**, 33-45.

[3] Jiang, C. (1997) The holomorph and derivation algebra of infinite dimensional heisenbergalgebra. *Chinese Journal of Mathematics*, **17**, 422-426.

[4] Shen, R. and Jiang, C. (2006) Derivation algebra and automorphism group of the twisted Heisenberg-Virasoro algebra. *Communications in Algebra*, **34**, 2547-2558.

[5] Eswara Rao, S., Batra, P. and Sharma, S.S. (2013) The irreducible modules for the derivations of the rational quantum torus. *Representation Theory.*

[6] Hilton, P.J. and Stammbach, U. (1997) A course in homological algebra. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York.