Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 73-79
Published Online March 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.52011

Hans汉斯

A New Construction for Inverse Semigroups

Shanshan Liu, Junying Guo, Xiaojiang Guo

College of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi
Email: liushanshan199008@126.com, 651945171@qq.com, xjguo@jxnu.edu.cn

Received: Feb. 26th, 2015; accepted: Mar. 8th, 2015; published: Mar. 12th, 2015

Abstract

Thenotion of FC-system is introduced. In this note, a new construction for inverse semigroups is established in terms of Munn semigroups and Clifford semigroups.

Keywords

Fundamental Inverse Semigroup, Clifford Semigroup, Inverse Semigroup

逆半群的一新构造

刘姗姗，郭俊颖，郭小江

江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌
Email: liushanshan199008@126.com, 651945171@qq.com, xjguo@jxnu.edu.cn

收稿日期：2015年2月26日；录用日期：2015年3月8日；发布日期：2015年3月12日

摘 要

本文定义FC-系统的概念。从这一概念出发，利用Munn半群和Clifford半群建立了逆半群的一新结构。

关键词

基本逆半群，Clifford半群，逆半群

1. 引言

逆半群是每个元素都只有一个逆元的正则半群。等价地，正则半群是逆半群当且仅当其幂等元集构成交换子半群。这类半群是离群最近的半群类之一，具有许多“群类似”性质，在半群理论研究中具有重要地位，也有非常丰富的研究成果(见[1] [2])。

逆半群有两类重要子类：一类是 Clifford 半群。所谓 *Clifford* 半群是具有中心幂等元的正则半群。这类半群可以表示为一些群的半格。

另一类是基本逆半群(fundanmental inverse semigroup)。令 S 为逆半群， E 为 S 的幂等元集。 S 上的同余 ρ 称为幂等元分离同余，如果 $\rho\cap(E\times E)$ 是 S 上的恒等映射。我们用 H，L，R，D，J 记通常的 Green-关系。众所周知， ρ 是 S 上的幂等元分离同余当且仅当 $\rho\subseteq H$ 。记 μ 为 S 上的最大幂等元分离同余。逆半群称为基本逆半群，如果其最大幂等元分离同余为恒等映射。更有意思的是， S/μ 是基本逆半群。这说明，任一逆半群都是以基本逆半群作为同态像。特别地，Munn 指出：一个半群是基本逆半群当且仅当它同构于某个 Munn 半群 T_E 的全子逆半群(可见，[3])。

Clifford 半群和基本逆半群都具有简明结构。能否从基本逆半群(Munn 半群)出发构造逆半群？这是一个非常自然的问题。受到文献[4] [5]鼓励，本文将给出逆半群基于 Munn 逆半群和 Clifford 半群的一种构造方法。

2. 定理

令 S 为逆半群，记 $E(S)$ 为 S 的幂等元集。若 t 为 S 的元，则我们用 t^{-1} 记 t 的逆元。设

Y：半格；

T：以半格 Y 为幂等元集的基本逆半群；

C：以半格 Y 为幂等元集的 Clifford 半群；

进一步，设 $C=\left[Y;G_\alpha,\phi_{\alpha,\beta}\right]$ 是 Clifford 半群 C 分解成群 $G_\alpha\,(\alpha\in Y)$ 的半格分解。记 $\mathrm{End}(C)$ 为 C 到自身的半群同态半群。定义

$$\phi:T\to\mathrm{End}(C);\quad t\mapsto\phi_t$$

其中 $\phi_t:C\to C;\ x\mapsto x\phi_t\in G_{\left(x^{-1}x\cdot t\right)^{-1}x^{-1}x\cdot t}$，且

$$F:T\times T\to C;\quad (s,t)\mapsto f_{st}\in G_{(st)^{-1}st}$$

定义 2.1：五元组 $(Y;T,C;\phi,F)$ 称为 FC -系统，如果

(I1) 对于任意 $s,t,u\in T$ ，有 $f_{st,u}f_{s,t}\phi_u=f_{s,tu}f_{t,u}$ ；

(I2) 对于任意 $s,t\in T$, $x\in C$,有 $x\phi_s\phi_t=(x\phi_{st})f_{s,t}$ ；

(I3) 对于任意 $p,q\in Y$, $f_{p,q}=pq$ ；

(I4) 对于任意 $s\in Y$, $x\in C$, $x\varphi_s=xs$ ；

(I5) 对于任意 $s\in T$, $f_{s,s^{-1}s}=s^{-1}s=f_{s^{-1},s}$

任给 FC -系统 $(Y;T,C;\phi,F)$，构作集合

$$FC=FC(Y;T,C;\phi,F)=\left\{(t,x)\in T\times C:x\in G_{t^{-1}t}\right\}$$

在集合 FC 上，定义

$$(s,x)\circ(t,y)=\left(st,f_{s,t}(x\phi_t)y\right)$$

注意到，$f_{s,t}x\phi_t \in G_{(st)^{-1}st}, y \in G_{t^{-1}t}$，易知，$f_{s,t}(x\phi_t)y \in G_{(st)^{-1}st}$，于是$(st, f_{s,t}(x\phi_t)y) \in FC$，从而$FC$关于运算$\circ$封闭。进而，$(FC,\circ)$为逆半群。

下面是本文的主要结果。

定理 2.2： 令$(Y;T,C;\phi,F)$为FC-系统，则$FC(Y;T,C;\phi,F)$是逆半群。反过来，任一逆半群均可以这样构作。

3. 定理证明

本节我们给出定理 2.2 的证明。

引理 3.1： 令$(Y;T,C;\phi,F)$为FC-系统，则$FC(Y;T,C;\phi,F)$是逆半群。

证明： 对于$(s,x),(t,y),(u,z) \in FC$，我们有

$$\begin{aligned}
[(s,x)\circ(t,y)]\circ(u,z) &= (st, f_{s,t}\cdot x\phi_t\cdot y)\circ(u,z)\\
&= (stu, f_{st,u}\cdot(f_{s,t}\cdot x\phi_t\cdot y)\phi_u\cdot z)\\
&= (stu, f_{st,u}\cdot f_{s,t}\phi_u\cdot x\phi_t\phi_u\cdot y\phi_u\cdot z)\\
&= (stu, f_{s,tu}\cdot f_{t,u}\cdot x\phi_t\phi_u\cdot y\phi_u\cdot z)\\
&= (s,x)\circ(tu, f_{t,u}\cdot y\phi_u\cdot z)\\
&= (s,x)\circ[(t,y)\circ(u,z)],
\end{aligned}$$

于是FC为半群。

若$s,s \in Y$，则$(s,s)\circ(s,s) = (s^2, f_{s,s}\cdot s\phi_s\cdot s) = (s,s)$。反之，若$(s,x)$为幂等元，则$(s^2, f_{s,s}\cdot x\phi_s\cdot x) = (s,x)^2 = (s,x)$，于是$s^2 = s,\ f_{s,s}\cdot x\varphi_s\cdot x = x$。由前一等式，可知$f_{s,s} = s,\ x\phi_s = xs$，再结合后一等式，$x = xsx = x^2$，从而$s = x$。故$E(FC) = \{(s,x) \in FC : s = x \in Y\}$。通常验算，可知$E(FC)$为半格。

最后，证明FC为正则半群。这可由下面的计算得到：

$$\begin{aligned}
(s,x)\circ(s^{-1}, x^{-1}\phi_{s^{-1}})\circ(s,x) &= (s,x)\circ(s^{-1}s, f_{s^{-1},s}\cdot x^{-1}\phi_{s^{-1}}\phi_s\cdot x)\\
&= (ss^{-1}s, f_{s,s^{-1}s}\cdot x\phi_{s^{-1}s}\cdot f_{s^{-1},s}\cdot x^{-1}\phi_{s^{-1}}\phi_s\cdot x)\\
&= (s, s^{-1}s\cdot x\phi_{s^{-1}s}\cdot x^{-1}\phi_{s^{-1}s}\cdot f_{s^{-1},s}\cdot x)\\
&= (s, s^{-1}s\cdot(xx^{-1})\phi_{s^{-1}s}\cdot s^{-1}s\cdot x)\\
&= (s, s^{-1}s\cdot xx^{-1}\cdot s^{-1}s\cdot s^{-1}s\cdot x)\\
&= (s,x),
\end{aligned}$$

为方便记，以下总假设S是以E为幂等元半格的逆半群，μ为S上的最大幂等元分离同余。记$D = \{x \in S : (x\mu)^2 = x\mu\}$。

引理 3.2： (1) D是S的以E为幂等元集的 Clifford 子半群。

(2) 对于任意的$e \in E$，$D_e = \{s \in S : s\mu e\}$是以$e$为单位元的$S$的子群。

(3) $D = \cup_{e\in E} D_e$是D的半格分解。

证明： 由 Lellament 引理，知正则半群上的所有同态都是幂等元提升的，于是D为μ的核，即$D = \{s \in S : (s,e) \in \mu, e \in E\}$，而$E$为半格，从而$D$是以$E$为幂等元集的$S$的子半群。

令$s \in D$，则存在$e \in E$，使得$(s,e) \in \mu$，于是$(s^{-1},e) \in \mu$，即$s^{-1} \in D$，从而D为正则半群。

因此 D 为逆半群。而 $(u^{-1}u,e),(uu^{-1})\in\mu$，则 $u^{-1}u=e=uu^{-1}$，进而 D 为群并(union of groups)。

但可以表示一些子群并的逆半群是 Clifford 半群，故 D 为 Clifford 半群。

对于 $u,v\in D_e$，由于 $(u,e),(v,e)\in\mu$，有 $(uv,e)\in\mu$，于是 $uv\in D_e$；类似地，$(uv)^{-1}\in D_e$。由上一段的证明，知 $(uv)^{-1}uv=e=uv(uv)^{-1}$，从而 D_e 是以 e 为单位元的子群。

注意到，若 $w\in D_f\,(f\in E)$，则 $uw\mu ef$，于是 $D_eD_f\subseteq D_{ef}$。故 $D=\cup_{e\in E}D_e$ 是 Clifford 半群 D 的半格分解。

记 U 为 S 关于同余 μ 分类的代表元集。由于 μ 为幂等元分离同余，所以幂等元所在 μ-类仅含一个元素，故 $E\subseteq U$。在 U 上，定义如下运算：

$$a*b=\mu_{ab}\cap U$$

其中 μ_a 表示 S 的包含 a 的 μ-类。易知，$(U,*)$ 为半群，且同构于 S/μ，于是 U 是以 E 为幂等元集的基本逆半群。

引理 3.3： 对于任意的 $s\in S$,存在惟一 $(u_s,d_s)\in U\times D$ 使得 u_s, μs, d_sLu_s 且 $s=u_sd_s$。

证明： 据 U 的定义，有 $u_s\in D$ 使得 $s\mu u_s$。显然，

$$(ss^{-1},u_su_s^{-1}),(u_s^{-1}s,s^{-1}s),(u_s^{-1}u_s,s^{-1}s)\in\mu$$

据 μ 为幂等元分离同余，$ss^{-1}=u_su_s^{-1}$ 且 $u_s^{-1}u_s=s^{-1}s$，于是 $d_s:=s^{-1}u_s\in D_{u_s^{-1}u_s}=D_{s^{-1}s}$。进而

$$s=ss^{-1}s=u_s\cdot u_s^{-1}s=u_s\cdot d_s$$

现假设 $(v,b)\in U\times D$ 满足 (u_s,d_s) 的条件。因为 $vb=u_sd_s$，所以 $v\mu=(vb)\mu=(u_sd_s)\mu=u_s\mu$，而 U 是代表元集，于是 $v=u_s$。注意到，$b^{-1}b=v^{-1}v$。从而 $b=b^{-1}b\cdot b=v^{-1}v\cdot b=u_s^{-1}u_sd_s=d_s$。这样，$(u_s,d_s)$ 的惟一性获证。

对于 $s,t\in U$，由引理 3.3，知 $st=s*t\cdot d_{st}$, $d_{st}\in D_{(s*t)^{-1}(s*t)}$。由于 $(st,s*t)\in\mu$，我们知，$((st^{-1})st,(s*t)^{-1}(s*t))\in\mu$，但 μ 为幂等元分离同余，于是 $(st^{-1})st=(s*t)^{-1}(s*t)$。规定

$$G:U\times U\to D;(s,t)\mapsto g_{s,t}=d_{st}$$

另一方面，对于 $x\in D_e$，我们有 $(xs)\mu=(es)\mu=(e*s)\mu,\ e=x^{-1}x$，再据引理 3.3，有 $xs=(e*s)\cdot d_{xs},d_{xs}\in D_{(e*s)^{-1}(e*s)}$。定义

$$\psi_s:D\to D;\ \ x\mapsto x\psi_s=d_{es}^{-1}d_{xs}$$

显然，$d_{es}^{-1}d_{xs}\in D_{(e*s)^{-1}(e*s)}$。而 $\mu\subseteq H$，我们有

$$(e*s)^{-1}(e*s)=(es)^{-1}(es)=s^{-1}es$$

这意味着，$x\psi_s\in D_{s^{-1}es}=D_{s^{-1}x^{-1}xs}=D_{(xs)^{-1}xs}$。

引理 3.4： ψ_s 是 D 的自同态。

证明： 注意到，$es\mu e*s$。我们有 $esHe*s$，但 $e*sLd_{es}$，于是 $es\cdot d_{es}^{-1}=(e*s)d_{es}d_{es}^{-1}=(e*s)d_{es}^{-1}d_{es}=e*s$。令 $x\in D_e,\ y\in D_f$。据 U 的定义，知 $e*f=ef$，进而

$$\begin{aligned}efs\cdot d_{ef\cdot s}^{-1}d_{xy\cdot s}&=((ef)*s)\cdot d_{xy\cdot s}=xys=x\cdot(f*s)\cdot d_{ys}=x\cdot fs\cdot d_{fs}^{-1}d_{ys}\\&=f\cdot xs\cdot d_{fs}^{-1}d_{ys}=fe\cdot(e*s)\cdot d_{xs}\cdot d_{fs}^{-1}d_{ys}\\&=fes\cdot d_{xs}^{-1}\cdot d_{fs}^{-1}d_{ys}=efs\cdot d_{es}^{-1}d_{xs}d_{fs}^{-1}d_{ys}.\end{aligned}\tag{1}$$

而

$$(es)^{-1}(es)(fs)^{-1}(fs)=s^{-1}eess^{-1}ffs^{-1}=s^{-1}efs=s^{-1}fe\cdot efs=(efs)^{-1}(efs)$$

且 $d_{ef\cdot s}^{-1}d_{xy\cdot s}\in D_{(efs)^{-1}(efs)}$，$d_{es}^{-1}d_{xs}d_{fs}^{-1}d_{ys}\in D_{(es)^{-1}(es)(fs)^{-1}(fs)}$，利用等式(1)，我们有

$$\begin{aligned}d_{ef\cdot s}^{-1}d_{xy\cdot s}&=(efs)^{-1}efs\cdot d_{ef\cdot s}^{-1}d_{xy\cdot s}\\&=(efs)^{-1}(efs)\cdot d_{es}^{-1}d_{xs}d_{fs}^{-1}d_{ys}\\&=d_{es}^{-1}d_{xs}d_{fs}^{-1}d_{ys},\end{aligned}$$

即 $(xy)\psi_s=x\psi_s\cdot y\psi_s$。从而 ψ_s 为半群同态。

定义映射 $\psi:U\to\mathrm{End}(D)$; $\quad s\mapsto\psi_s$

引理 3.5：五元组 $(E;U,D;\psi,G)$ 是 FC-系统。

证明：仅需证明，$(E;U,D;\psi,G)$ 满足条件(I1)~(I5)。令 $s,t,u\in U$，$x\in D$。记 $e=(s*t)^{-1}(s*t)$。据引理 3.4 的证明，$e*u=d_{eu}^{-1}$，进而

$$\begin{aligned}(s*(t*u))d_{s(t*u)}d_{tu}&=s(t*u)d_{tu}=stu=(st)u\\&=(s*t)\cdot d_{st}\cdot u=(s*t)\cdot(e*u)\cdot d_{d_{tu}}\\&=(s*t)\cdot eu\cdot d_{eu}^{-1}\cdot d_{d_{tu}}\\&=(s*t)u\cdot d_{eu}^{-1}\cdot d_{d_{tu}}\\&=((s*t)*u)\cdot d_{(s*t)u}\cdot d_{eu}^{-1}\cdot d_{d_{tu}}\end{aligned}$$

但 $d_{s(t*u)}d_{(tu)},d_{(s*t)u}\cdot d_{eu}^{-1}\cdot d_{d_{tu}}\in D_{(s*(t*u))^{-1}(s*(t*u))}$，再利用引理 3.3，有 $d_{s(t*u)}d_{tu}=d_{(s*t)u}\cdot d_{eu}^{-1}\cdot d_{d_{tu}}$，即 $g_{s*t,u}\cdot(g_{t,u}\psi_u)=g_{s,t*u}\cdot g_{t,u}$。这意味着，(I1)满足。

现设 $x\in D_f$，记 $h=(x\psi_s)^{-1}(x\psi_s)=(fs)^{-1}fs$，则

$$\begin{aligned}fst\cdot(x\psi_{s*t})g_{s,t}&=fst\cdot d_{f(s*t)}^{-1}d_{x(s*t)}\\&=f\cdot(s*t)\cdot d_{x\cdot(s*t)}\cdot d_{st}\\&=x\cdot(s*t)\cdot d_{st}=xst\\&=(f*t)\cdot d_{xs}\cdot t=fs\cdot d_{fs}^{-1}d_{xs}\cdot t=fs\cdot(x\psi_s)\cdot t\\&=fs\cdot(h*t)\cdot sd_{(x\psi_s)\cdot t}\\&=fs\cdot ht\cdot d_{ht}^{-1}d_{(x\psi_s)\cdot t}=fsh\cdot t\cdot(x\psi_s\cdot\psi_t)\\&=fst\cdot(x\psi_s\psi_t).\end{aligned}\tag{2}$$

但

$$(x\psi_{s*t})g_{s,t}\in D_{(st)^{-1}fst}D_{(st)^{-1}st}\subseteq D_{(st)^{-1}fst\cdot(st)^{-1}st}=D_{(fst)^{-1}(fst)}$$

且 $x\psi_s\psi_t\in D_{t^{-1}ht}=D_{t^{-1}s^{-1}fst}=D_{(fst)^{-1}(fst)}$，于是

$$(x\psi_{s*t})g_{s,t}=(fst)^{-1}(fst)\cdot(x\psi_{s*t})g_{s,t}=(fst)^{-1}(fst)\cdot(x\psi_s\psi_t)=x\psi_s\psi_t$$

即(I2)成立。

对于 $p,q\in E$，由定义，有 $p*q=pq\in E(U)$，显然 $pq=(pq)(pq)=(p*q)pq$，再据引理 3.3，我

们有 $d_{pq} = pq$，从而 $g_{p,q} = pq$。我们证明了(I3)。

注意到，$f * p = fp$。因为 D 为 Clifford 半群，所以 $xp = fxpp = fpxp = (f * p)xp$，且 $fpLxp$，从而由引理 3.3，知 $d_{xp} = xp$。而由(I3)，有 $d_{fp} = fp$，进而 $d_{fp}^{-1} = fp$。故 $x\psi_p = fpxp = xp$，这样条件(I4)得证。

最后，由 $s = ss^{-1}s = s \cdot s^{-1}s$, $s^{-1}s = s^{-1}s \cdot s^{-1}s$，利用引理 3.3，有 $d_{ss^{-1} \cdot s} = s^{-1}s = d_{s^{-1} \cdot s}$，即 $g_{ss^{-1},s} = s^{-1}s = g_{s^{-1},s}$。从而完成证明。

定义

$$\theta : S \to FC(E;U,D;\psi,G); s \mapsto s\theta = (u_s, d_s)$$

由引理 3.3，θ 是单射。为证明定理 2.2，仅需证明: θ 是半群同构。

引理 3.6： θ 是半群同构。

证明： 令 $s,t \in S$，由引理 3.3，$u_s^{-1}u_s = d_s^{-1}d_s$, $u_t^{-1}u_t = d_t^{-1}d_t$，进而

$$\begin{aligned} g_{u_s,u_t} \cdot \left(d_s\psi_{u_t}\right) \cdot d_t &\in D_{(u_su_t)^{-1}(u_su_t)} D_{(d_su_t)^{-1}(d_su_t)} D_{d_t^{-1}d_t} \\ &\subseteq D_{(u_su_t)^{-1}(u_su_t)(d_su_t)^{-1}(d_su_t)d_t^{-1}d_t} \\ &= D_{u_t^{-1} \cdot u_s^{-1}u_s \cdot u_tu_t^{-1} \cdot d_s^{-1}d_su_t \cdot d_t^{-1}d_t} \\ &= D_{u_t^{-1} \cdot u_s^{-1}u_s \cdot u_tu_t^{-1} \cdot u_s^{-1}u_su_t \cdot u_t^{-1}u_t} \\ &= D_{u_t^{-1} \cdot u_tu^{-1}u_t \cdot u_s^{-1}u_s \cdot u_s^{-1}u_s \cdot u_tu_t^{-1}u_t} \\ &= D_{u^{-1}u_s^{-1}u_su_t} \\ &= D_{(u_su_t)^{-1}(u_su_t)} \\ &= D_{(u_s*u_t)^{-1}(u_s*u_t)}, \end{aligned}$$

再结合

$$\begin{aligned} st = u_sd_s \cdot u_td_t &= u_s \cdot \left(\left(d_s^{-1}d_s\right) * u_t\right) \cdot d_{d_su_t} \cdot d_t \\ &= u_s \cdot d_s^{-1}d_su_t \cdot d_{\left(d_s^{-1}d_s\right)u_t}{}^{-1}d_{d_su_t} \cdot d_t \\ &= u_su_t \cdot \left(d_s\psi_{u_t}\right) \cdot d_t \\ &= \left(u_s * u_t\right) \cdot g_{u_s,u_t}\left(d_s\psi_{u_t}\right) \cdot d_t, \end{aligned}$$

利用引理 3.3，有 $u_{st} = u_s * u_t$, $d_{st} = g_{u_s,u_t}\left(d_s\psi_{u_t}\right) \cdot d_t$，于是

$$(st)\theta = (u_{st}, d_{st}) = \left(u_s * u_t, g_{u_s,u_t}\left(d_s\psi_{u_t}\right) \cdot d_t\right) = (u_s, d_s)(u_t, d_t) = (s\theta)(t\theta)$$

从而 θ 是半群同态。

对于 $(a,x) \in FC(E;U,D;\psi,G)$，则 aLx。由引理 3.3，有 $d_{ax} = x$, $u_{ax} = a$，进而 $(ax)\theta = (a,x)$，于是 θ 为满射。从而 θ 为半群同态。

基金项目

国家自然科学基金(11361027)，江西省自然科学基金和江西省教育厅科研基金资助项目。

参考文献 (References)

[1] Guo, X.J., Ren, C.C. and Shum, K.P. (2007) Dual wreath product structure of right C-rpp semigroups. *Algebra Colloquium*, **14**, 285-294.

[2] Guo, X.J., Zhao, M. and Shum, K.P. (2008) Wreath product structure of left C-rpp semigroups. *Algebra Colloquium*, **15**, 101-108.

[3] Howie, J.M. (1976) An introduction to semigroup theory. Academic Press, London.

[4] Lawson, M.V. (1998) Inverse semigroups. World Scientific, Singapore, New Jersey, Hong Kong.

[5] Petrich, M. (1984) Inverse semigroups. John Wiley & Sons, Inc., New York.