Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 54-58
Published Online March 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.52008

Partial Orders on U-Superabundant Semigroups

Yanan Yang, Xueming Ren

School of Science, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an Shaanxi
Email: 376548195@qq.com

Received: Feb. 18th, 2015; accepted: Feb. 27th, 2015; published: Mar. 5th, 2015

Abstract

The partial orders $\leq_l, \leq_r$ and $\leq$ on *U*-superabundant semigroups (S,U) are defined. It is proved that the partial order $\leq_l$ about the multiplication on (S,U) is compatible if and only if that the *U*-superabundant semigroups (S,U) is a locally generalized Clifford semigroup.

Keywords

U-Superabundant Semigroups, Partical Order, Compatiblility, Generalized Clifford Semigroup

U-超富足半群上的偏序

杨亚楠，任学明

西安建筑科技大学理学院，陕西 西安
Email: 376548195@qq.com

收稿日期：2015年2月18日；录用日期：2015年2月27日；发布日期：2015年3月5日

摘 要

定义了*U*-超富足半群(S,U)上的偏序$\leq_l, \leq_r$及$\leq$。证明了偏序$\leq_l$关于(S,U)上的乘法是相容的，当且仅当

(S,U)为局部广义Clifford半群。

关键词

U-超富足半群，偏序，相容性，广义Clifford半群

1. 引言

令 S 为一半群，$E(S)$为 S 的幂等元集合.取定$E(S)$的一个非空子集 U，称其为 S 的投射元集。由 Lawson 的文献[1]，半群 S 上的关系 $\tilde{\mathcal{L}}$ 和 $\tilde{\mathcal{R}}$ 分别定义如下：

$$\tilde{\mathcal{L}}=\{(a,b)\in S\times S:(\forall e\in U)ae=a\Leftrightarrow be=b\},$$
$$\tilde{\mathcal{R}}=\{(a,b)\in S\times S:(\forall e\in U)ea=a\Leftrightarrow eb=b\}.$$

易知，$\tilde{\mathcal{L}}$，$\tilde{\mathcal{R}}$ 均为 S 上的等价关系。它们的交$\tilde{\mathcal{L}}\cap\tilde{\mathcal{R}}$用$\tilde{\mathcal{H}}$来表示，它们的连$\tilde{\mathcal{L}}\vee\tilde{\mathcal{R}}$用$\tilde{\mathcal{D}}$来表示。易证$\mathcal{L}\subseteq\mathcal{L}^*\subseteq\tilde{\mathcal{L}}$，$\mathcal{R}\subseteq\mathcal{R}^*\subseteq\tilde{\mathcal{R}}$。据文献[2]知，当 S 为正则半群时，$\mathcal{L}=\mathcal{L}^*=\tilde{\mathcal{L}}$，$\mathcal{R}=\mathcal{R}^*=\tilde{\mathcal{R}}$。

若半群 S 的每一个 $\tilde{\mathcal{L}}$ 类和每一个 $\tilde{\mathcal{R}}$ 类都含有 U 中的元素，则称 U-半群 S 为半富足半群。若 U-半富足半群 S 满足同余条件，即 $\tilde{\mathcal{L}}$ 为 S 上的右同余，$\tilde{\mathcal{R}}$ 为 S 上的左同余，则称 S 为富足半群。每一个 $\tilde{\mathcal{H}}$ 类都含有 U 中的元素的 U-富足半群，称其为 U-超富足半群，记为(S,U)。易知，完全正则半群，超富足半群都是 U-超富足半群。

2. 准备知识

令(S,U)为 U-超富足半群，且$a\in(S,U)$。本文总记元素 a 所在的$\tilde{\mathcal{H}}$-类的 U 中的元素为$a^{\Diamond}$。$\tilde{L}^U(a)$为由 a 生成的最小 U 允许左理想；对偶地，$\tilde{R}^U(a)$为由 a 生成的最小 U 允许右理想。本文将主要研究 U-超富足半群(S,U)上的几个偏序。我们先给出以下几个引理。

引理 1 [3] 在 U-超富足半群(S,U)中，令$e,f\in U$，则有

(1) $(e,f)\in\tilde{\mathcal{L}}\Leftrightarrow(e,f)\in\mathcal{L}$；

(2) $(e,f)\in\tilde{\mathcal{R}}\Leftrightarrow(e,f)\in\mathcal{R}$。

引理 2 [4] 令(S,U)为 U-超富足半群，且$e,f\in U$。若$(e,f)\in\tilde{\mathcal{D}}$，则$(e,f)\in\mathcal{D}$。

引理 3 [4] 在 U-超富足半群(S,U)中，$\tilde{\mathcal{D}}=\tilde{\mathcal{L}}\circ\tilde{\mathcal{R}}=\tilde{\mathcal{R}}\circ\tilde{\mathcal{L}}$。

引理 4 [4] 在 U-超富足半群(S,U)中，$\tilde{\mathcal{D}}=\tilde{\mathcal{J}}$。

引理 5 [4] 令 S 为半群，$a,b\in S$，则

(1) $(a,b)\in\tilde{\mathcal{L}}$，当且仅当$\tilde{L}^U(a)=\tilde{L}^U(b)$；

(2) $(a,b)\in\tilde{\mathcal{R}}$，当且仅当$\tilde{R}^U(a)=\tilde{R}^U(b)$。

推论 6 令 S 为半群，对任意的$a,x,y\in S$，则

(1) $\tilde{L}^U(xa)\subseteq\tilde{L}^U(a)$；

(2) $\tilde{R}^U(ax)\subseteq\tilde{R}^U(a)$。

证明 (1) 因$\tilde{L}^U(a)$是包含 a 的 S 的一个左理想，而S^1a是包含 a 的最小左理想，故$S^1a\subseteq\tilde{L}^U(a)$。于是，$ax\in\tilde{L}^U(a)$。这就证明了$\tilde{L}^U(xa)\subseteq\tilde{L}^U(a)$。

类似地，我们可以证明(2)。

引理 7 [4] 在 U-超富足半群(S,U)中，若$x\in(S,U)$，$e\in U$，则下列两款成立：

(1) $(x,e)\in\tilde{\mathcal{L}}$，当且仅当对于任意 $f\in U$， $xf=x\Leftrightarrow ef=e$。特别地， $xe=x$。

(2) $(x,e)\in\tilde{\mathcal{R}}$，当且仅当对于任意 $f\in U$， $fx=x\Leftrightarrow fe=e$。特别地， $ex=x$。

引理 8 [5] 令 (S,U) 为 *U*-超富足半群， $a,b\in(S,U)$。若 $(a,b)\in\tilde{\mathcal{D}}$，则 $(ab)^{\diamond}=(a^{\diamond}b^{\diamond})^{\diamond}$。

3. 主要结果及证明

首先，回忆在半群 S 的幂等元集 $E(S)$ 上的两个前序 ω^r 和 ω^l。

令 $e,f\in E(S)$，如下定义前序 ω^r 与 ω^l：

$e\omega^r f$，当且仅当 $fe=e$；

$e\omega^l f$，当且仅当 $ef=e$；

$e\omega f$，当且仅当 $ef=fe=e$。

现在，我们给出 *U*-超富足半群 (S,U) 上的几个偏序的定义。

定义 1 令 (S,U) 为 *U*-超富足半群，则关于任意 $a,b\in(S,U)$，

(1) $a\le_l b$，当且仅当 $a^{\diamond}\omega^l b^{\diamond}$ 且 $a=ba^{\diamond}$；

(2) $a\le_r b$，当且仅当 $a^{\diamond}\omega^r b^{\diamond}$ 且 $a=a^{\diamond}b$；

(3) $a\le b$，当且仅当 $a^{\diamond}\omega b^{\diamond}$ 且 $a=ba^{\diamond}=a^{\diamond}b$。

定理 2 令 (S,U) 为 *U*-超富足半群，则 $\le_l,\le_r$ 及 $\le$ 均为 (S,U) 上的偏序。

证明 我们只需证明定义 1(1)，类似地可证明(2)，由(1)及(2)，即可得(3)。

自反性。令 $a\in(S,U)$，因 (S,U) 为 *U*-超富足半群，则 $(a,a^{\diamond})\in\tilde{\mathcal{H}}$，由引理 7，有 $a=aa^{\diamond}$，又由 $a^{\diamond}a^{\diamond}=a^{\diamond}$，即 $a^{\diamond}\omega^l a^{\diamond}$，故 $a\le_l a$。

反对称性。令 $a,b\in(S,U)$，$a\le_l b$ 且 $b\le_l a$。则由定义 1(1)得，$a=ba^{\diamond}$，$b=ab^{\diamond}$ 且 $a^{\diamond}\omega^l b^{\diamond}$，即 $a^{\diamond}=a^{\diamond}b^{\diamond}$。注意到 $a\tilde{\mathcal{H}}a^{\diamond}$，则 $a=ab^{\diamond}=b$。

传递性。令 $a,b,c\in(S,U)$，$a\le_l b$ 且 $b\le_l c$，则由定义 1(1)得，$a=ba^{\diamond}$，$b=cb^{\diamond}$ 且 $a^{\diamond}\omega^l b^{\diamond}$，$b^{\diamond}\omega^l c^{\diamond}$。则 $a^{\diamond}=a^{\diamond}b^{\diamond}$，$b^{\diamond}=b^{\diamond}c^{\diamond}$，注意到，$a\tilde{\mathcal{H}}a^{\diamond}$，$b\tilde{\mathcal{H}}b^{\diamond}$，则 $a=ab^{\diamond}$，$b=bc^{\diamond}$，因此，$a=ba^{\diamond}=b^{\diamond}ba^{\diamond}=b^{\diamond}a$，注意到 $(a,a^{\diamond})\in\tilde{\mathcal{H}}$，故 $a^{\diamond}=b^{\diamond}a^{\diamond}=a^{\diamond}b^{\diamond}$，类似可得，$b^{\diamond}=b^{\diamond}c^{\diamond}=c^{\diamond}b^{\diamond}$，故 $a=ba^{\diamond}=cb^{\diamond}a^{\diamond}=ca^{\diamond}$，$a=ab^{\diamond}=ab^{\diamond}c^{\diamond}=ac^{\diamond}$，注意到 $a\tilde{\mathcal{H}}a^{\diamond}$，则 $a^{\diamond}=a^{\diamond}c^{\diamond}$，即 $a^{\diamond}\omega^l c^{\diamond}$，因此 $a\le_l c$。

命题 3 令 (S,U) 为 *U*-超富足半群，$e,f\in U$ 且 $(e,f)\in\tilde{\mathcal{H}}$，则 $e=f$。

证明 因 $e,f\in U$，且 $(e,f)\in\tilde{\mathcal{H}}$，则 $e\tilde{\mathcal{L}}f$ 且 $e\tilde{\mathcal{R}}f$。由引理 1 可得，$e\mathcal{L}f$ 且 $e\mathcal{R}f$，即 $e\mathcal{H}f$，则 $e=f$。

命题 4 令 (S,U) 为 *U*-超富足半群，$a,b\in(S,U)$ 且 $a\le_l b$，若 $b\in E((S,U))$，则 $a\in E((S,U))$。

证明 据定义 1(1)，$a\le_l b$，当且仅当 $a^{\diamond}\omega^l b^{\diamond}$ 且 $a=ba^{\diamond}$。由假设，若 $b\in E((S,U))$，注意到 $b\tilde{\mathcal{H}}b^{\diamond}$，由命题 3，则 $b=b^{\diamond}$。从而 $a=ba^{\diamond}=b^{\diamond}a^{\diamond}=a^{\diamond}\in E((S,U))$。

半群 S 上的关系ρ称为左相容的，若关于任意 $a,b,c\in S$，$(b,c)\in\rho$ 蕴涵 $(ab,ac)\in\rho$，对偶地，可有ρ为右相容的，半群 S 上的关系ρ称为相容的，如果ρ既为左相容的，又为右相容的。

定义 5 完全正则半群 S 称为 Clifford 半群，若 S 中每个幂等元都是可交换的。

定义 6 *U*-富足半群 S 称为广义 Clifford 半群，若 S 中每个投射元都在 S 的中心里。

定义 7 半群 S 称为局部 P 半群，若关于任意 $e\in E(S)$，eSe 满足性质 P。

定理 8 若 (S,U) 是 *U*-超富足半群，则 $\le_l$ 关于 (S,U) 上的乘法是相容的，当且仅当 (S,U) 为局部广义 Clifford 半群。

证明 必要性。首先，证明关于任意 $e\in E((S,U))$，$e(S,U)e$ 为 (S,U) 的一个子半群。

若 $u,v\in e(S,U)e$，则存在 $x,y\in(S,U)$，使得 $u=exe,v=eye$，由此可得，$uv=exeeye=exeye\in e(S,U)e$，即 $e(S,U)e$ 为 (S,U) 的一个子半群。

其次，容易验证，若(S,U)为U-超富足半群，则$e(S,U)e$也为U-超富足半群。

最后，若$\le_l$关于S上的乘法是相容的，则关于任意$e\in E((S,U))$，$a\in e(S,U)e$且$f,g\in U(e(S,U)e)$，有$f\le_l e, g\le_l e, fg\le_l eg=g, gf\le_l ge=g$及$fa\le_l ea=a$，$af\le_l ae=a$。据命题3，可得$fg,gf\in U(e(S,U)e)$。注意到，$fg=g(fg)=(gf)g=gf$，又若$(f,g)\in\mathcal{L}$，则$f=fg=gf=g$。若$(f,g)\in\mathcal{R}$，则$g=fg=gf=f$。

由文献[4]知，在U-超富足半群(S,U)中，有$\tilde{J}(af)=\tilde{J}(fa)$，即$(af,fa)\in\tilde{\mathcal{J}}$。又因$\left(fa,(fa)^\lozenge\right)\in\tilde{\mathcal{H}}$且$\left(af,(af)^\lozenge\right)\in\tilde{\mathcal{H}}$，则$\left((af)^\lozenge,(fa)^\lozenge\right)\in\tilde{\mathcal{J}}$，又据引理4得，$\left((fa)^\lozenge,(af)^\lozenge\right)\in\tilde{\mathcal{D}}$，则据引理3，存在$x\in e(S,U)e$，使得$\left((af)^\lozenge,x\right)\in\tilde{\mathcal{L}}$且$\left(x,(fa)^\lozenge\right)\in\tilde{\mathcal{R}}$。注意到$\left(x,x^\lozenge\right)\in\tilde{\mathcal{H}}$，故$\left((af)^\lozenge,x^\lozenge\right)\in\tilde{\mathcal{L}}$且$\left(x^\lozenge,(fa)^\lozenge\right)\in\tilde{\mathcal{R}}$。因在正则条件下，$\mathcal{L}=\tilde{\mathcal{L}},\mathcal{R}=\tilde{\mathcal{R}}$，则$\left((af)^\lozenge,x^\lozenge\right)\in\mathcal{L}$且$\left(x^\lozenge,(fa)^\lozenge\right)\in\mathcal{R}$，因此根据以上的推导，可得$(af)^\lozenge=x^\lozenge=(fa)^\lozenge$，又$fa=a(fa)^\lozenge=a(af)^\lozenge=af$，因此$e(S,U)e$中的投射元都在中心上。至此，我们证明了$(S,U)$是一个局部广义Clifford半群。

充分性。首先，证明$\le_l$关于(S,U)上的乘法是左相容的。

令$a,b\in(S,U)$且$a\le_l b$，由定义1(1)知，$a^\lozenge\omega^l b^\lozenge$，$a=ba^\lozenge$。则$a^\lozenge\in U\left(b^\lozenge(S,U)b^\lozenge\right)$，且关于任意$c\in(S,U)$，有$ca=cba^\lozenge$。因$cb=cbb^\lozenge$且$\left(cb,(cb)^\lozenge\right)\in\tilde{\mathcal{H}}$，则$(cb)^\lozenge=(cb)^\lozenge b^\lozenge$。由此可得

$$\left(b^\lozenge(cb)^\lozenge\right)^2=b^\lozenge\left((cb)^\lozenge b^\lozenge\right)(cb)^\lozenge=b^\lozenge(cb)^\lozenge=b^\lozenge(cb)^\lozenge b^\lozenge\in U\left(b^\lozenge(S,U)b^\lozenge\right).$$

从而，$\left(b^\lozenge(cb)^\lozenge\right)(cb)^\lozenge=b^\lozenge(cb)^\lozenge$且$(cb)^\lozenge\left(b^\lozenge(cb)^\lozenge\right)=(cb)^\lozenge$，因此$b^\lozenge(cb)^\lozenge\mathcal{L}(cb)^\lozenge\mathcal{L}cb$。注意到$(S,U)$为局部广义Clifford半群，$U\left(b^\lozenge(S,U)b^\lozenge\right)$为一个半格，则我们可得

(a) $b^\lozenge(cb)^\lozenge a^\lozenge\in U\left(b^\lozenge(S,U)b^\lozenge\right)$；

(b) $\left(b^\lozenge(cb)^\lozenge\right)a^\lozenge=a^\lozenge\left(b^\lozenge(cb)^\lozenge\right)$；

(c) $ca=cba^\lozenge=cb(cb)^\lozenge a^\lozenge=cb\left(b^\lozenge(cb)^\lozenge\right)a^\lozenge$；

(d) $ca=cba^\lozenge\tilde{\mathcal{L}}b^\lozenge(cb)^\lozenge a^\lozenge$。

据引理5及推论6，可得

$$\tilde{L}(ca)=\tilde{L}\left(b^\lozenge(cb)^\lozenge a^\lozenge\right)=\tilde{L}\left(a^\lozenge b^\lozenge(cb)^\lozenge\right)\subseteq\tilde{L}(cb)^\lozenge=\tilde{L}(cb),$$

因$\tilde{L}(ca)^\lozenge=\tilde{L}(ca)\subseteq\tilde{L}(cb)=\tilde{L}(cb)^\lozenge=(S,U)(cb)^\lozenge$，故存在$x\in(S,U)$，使得$(ca)^\lozenge=x(cb)^\lozenge$。因此$(ca)^\lozenge\omega^l(cb)^\lozenge$，另外，由(a)，(d)及命题3得，$b^\lozenge(cb)^\lozenge a^\lozenge=(ca)^\lozenge$，则有，

$$cb(ca)^\lozenge=cbb^\lozenge(cb)^\lozenge a^\lozenge=cb(cb)^\lozenge a^\lozenge=cba^\lozenge=ca.$$

因此，$ca\le_l cb$。即$\le_l$关于(S,U)上乘法是左相容的。

下证，$\le_l$关于(S,U)上的乘法是右相容的。

令$a,b,c\in(S,U)$，且$a\le_l b$，则$a=ba^\lozenge$，从而$ac=ba^\lozenge c$，注意到(S,U)为U-超富足半群，则有

$$\left(b^\lozenge c\right)^\lozenge\tilde{\mathcal{R}}b^\lozenge c=b^\lozenge b^\lozenge c\tilde{\mathcal{R}}b^\lozenge\left(b^\lozenge c\right)^\lozenge\tilde{\mathcal{R}}\left(b^\lozenge c\right)^\lozenge\left(b^\lozenge c\right)^\lozenge\tilde{\mathcal{R}}\left(b^\lozenge c\right)^\lozenge b^\lozenge\left(b^\lozenge c\right)^\lozenge,$$

则可得到$\left(b^\lozenge(b^\lozenge c)^\lozenge\right)^\lozenge\mathcal{R}\left(b^\lozenge c\right)^\lozenge\mathcal{R}\left((b^\lozenge c)^\lozenge b^\lozenge(b^\lozenge c)^\lozenge\right)^\lozenge$，且注意到$\tilde{\mathcal{R}}\subseteq\tilde{\mathcal{D}}$，则有

$$\left(b^\lozenge c\right)^\lozenge\tilde{\mathcal{D}}b^\lozenge\left(b^\lozenge c\right)^\lozenge\tilde{\mathcal{D}}\left(b^\lozenge c\right)^\lozenge b^\lozenge\left(b^\lozenge c\right)^\lozenge.$$

据引理8，可得，

$$\left(b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\right)^{\lozenge}=\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\right)^{\lozenge}=\left(\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\right)^{\lozenge}=\left(\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\right)^{\lozenge}$$
$$=\left(\left(\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\right)^{\lozenge}\left(\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\right)^{\lozenge}\right)^{\lozenge}=\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}.$$

从而，$b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}=\left(b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}=\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}$。

因此，可得

$$\left(b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\right)^{2}=b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}=b^{\lozenge}b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}=b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\in E\left((S,U)\right),$$

且$\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}=b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}$。这蕴含着$\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\omega b^{\lozenge}$，由此可得

$$\left(\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\right)^{2}=\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}=\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\in E\left((S,U)\right)。$$

从而，$\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\in U\left(b^{\lozenge}(S,U)b^{\lozenge}\right)$，注意到$a^{\lozenge}\in U\left(b^{\lozenge}(S,U)b^{\lozenge}\right)$，$(S,U)$为局部广义 Clifford 半群且$U\left(b^{\lozenge}(S,U)b^{\lozenge}\right)$为一个半格，有

$$\left(\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}a^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\right)^{2}=\left(\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}a^{\lozenge}\right)\left(\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}a^{\lozenge}\right)\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}$$
$$=\left(a^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\right)\left(a^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\right)\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}$$
$$=\left(a^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\right)\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}=\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}a^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}.$$

易知，$\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}a^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\omega\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}$。令$f=\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}a^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}$，则$f\in\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}(S,U)\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}$且$\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\in\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}(S,U)\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}$。因为$(S,U)$为局部广义 Clifford 半群，有$\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}(S,U)\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}$为广义 Clifford 半群，从而可得

$$a^{\lozenge}c=a^{\lozenge}b^{\lozenge}c=a^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}=\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}b^{\lozenge}a^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\left(b^{\lozenge}c\right)=f\left(b^{\lozenge}c\right)=\left(b^{\lozenge}c\right)f。$$

注意到，$ac=ba^{\lozenge}c=b\left(b^{\lozenge}c\right)f=bcf$ 且$\tilde{\mathcal{L}}$为(S,U)上的右同余，则可得$ac\tilde{\mathcal{L}}a^{\lozenge}c=\left(b^{\lozenge}c\right)f\tilde{\mathcal{L}}\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}f=f$，从而可得

$$\tilde{L}(ac)=\tilde{L}(f)=\tilde{L}\left(f\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\right)\subseteq\tilde{L}\left(\left(b^{\lozenge}c\right)^{\lozenge}\right)=\tilde{L}\left(b^{\lozenge}c\right)=\tilde{L}(bc).$$

由左相容性的证明过程可知，$ac\le_l bc$，即$\le_l$关于(S,U)上乘法是右相容的。

至此，$\le_l$关于(S,U)上乘法是相容的得到了证明。

基金项目

国家自然科学基金项目(批准号：11471255)。

参考文献 (References)

[1] Lawson, M.V. (1990) Rees matrix semigroups. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **33**, 23-37.

[2] Petrich, M. and Reilly, N.R. (1999) Completely regular semigroups. New York, John Wiley & Sons.

[3] Lawson, M.V. (1991). Semigroups and ordered categories. I. the reduced case. *Journal of Algebra*, **141**, 422-462.

[4] 任学明，岑嘉评，郭聿琦 (2009) 半群的广义 Clifford 定理. *中国科学*(*A 辑*), **10**, 1211-1215.

[5] Qiu, X.W., Guo, X.J. and Shum, K.P. (2013) Strongly rpp semigroups endowed with some natural partial orders. *Journal of Semigroup Theory and Applications*, **7**, 2051-2937.