Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 95-99
Published Online May 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.53015

The Superderivation Algebra of the Finite-Dimensional Simple Modular Lie Superalgebra $\widehat{W}(n,m)$

Lihua Zhang, Lu Wang
School of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang Liaoning
Email: nankaizlh@163.com

Received: Apr. 29th, 2015; accepted: May 8th, 2015; published: May 15th, 2015

Abstract

In this paper, the superderivation algebra of the finite-dimensional simple modular Lie superalgebra $\widehat{W}(n,m)$ is discussed, and the structure of it is determined, *i.e.* $\mathrm{Der}(\widehat{W}(n,m)) = \mathrm{ad}\widehat{W}(n,m)$.

Keywords

Modular Lie Superalgebra, Superderivation Algebra, *Z*-Grade

有限维单模李超代数$\widehat{W}(n,m)$的导子超代数

张丽华，王　璐
沈阳师范大学数学与系统科学学院，辽宁　沈阳
Email: nankaizlh@163.com

收稿日期：2015年4月29日；录用日期：2015年5月8日；发布日期：2015年5月15日

摘　要

本文研究了有限维单模李超代数$\widehat{W}(n,m)$的导子超代数，确定了其的结构，即$\mathrm{Der}(\widehat{W}(n,m)) = \mathrm{ad}\widehat{W}(n,m)$。

关键词

模李超代数，导子超代数，*Z*-阶化

1. 引言

目前，有限维单模李超代数的分类问题还没有解决[1]-[4]，所以文献[5]构造了有限维模李超代数 $\widehat{W}(n,m)$，并证明了它是单模李超代数。

为了将 $\widehat{W}(n,m)$ 与已有的有限维单模李超代数进行比较，本文确定了 $\widehat{W}(n,m)$ 的导子超代数，得到的结论是 $\mathrm{Der}(\widehat{W})=\mathrm{ad}\widehat{W}$，于是 $\widehat{W}(n,m)$ 与已有的有限维单模李超代数都不同构。

2. $\widehat{W}(n,m)$ 回顾

下面将文献[5]构造的有限维单模李超代数 $\widehat{W}(n,m)$ 作简要介绍。用 N 表示正整数集，F 是特征数为 $p>2$ 的域，设 $n\in \mathrm{N}$，$\wedge(n)$ 为域 F 上具有 n 个未定元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的外代数。

定义 $B_0:=\varnothing$，$B_k:=\{\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle \mid 1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n\},k=1,\cdots,n$，令 $B(n)=\bigcup_{i=0}^{n}B_k$。对 $u=\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle\in B(n)$，令 $|u|=k,\{u\}=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\},x^u=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$，且约定 $|\varnothing|=0,x^{\varnothing}=1$，则 $\{x^u\mid u\in B(n)\}$ 构成了 $\wedge(n)$ 的一组 F-基底。

令 $m\in \mathrm{N},r=n+m$，$T(m):=F[y_{n+1},y_{n+2},\cdots,y_r]$ 为满足 $y_i^p=1$，$i=n+1,\cdots,r$ 的截头多项式代数。令 $\mathit{II}:=\{0,1,\cdots,p-1\}$ 为模 p 的剩余类环，$H=\mathit{II}^m$，设 $\lambda=(\lambda_{n+1},\cdots,\lambda_r)\in H$，定义：$y^\lambda=\prod_{i=n+1}^{r}y_i^{\lambda_i}$，于是 $T(m)=\left\{\sum_{\lambda\in H}a_\lambda y^\lambda \mid a_\lambda\in F\right\}$，$\{y^\lambda\mid\lambda\in H\}$ 为 $T(m)$ 的一组 F-基底。

令 $U=\wedge(n)\otimes T(m)$，$Z_2=\{\overline{0},\overline{1}\}$ 表示模2的剩余类环，令：$U_{\overline{0}}=\wedge(n)_{\overline{0}}\otimes T(m)$，$U_{\overline{1}}=\wedge(n)_{\overline{1}}\otimes T(m)$，于是 U 是由 $\wedge(n)$ 的 Z_2-阶化诱导的结合超代数。

设 $A=A_{\overline{0}}\oplus A_{\overline{1}}$ 是超代数，若 $x\in A_\theta$，其中 $\theta\in Z_2$，则称 x 是次数 θ 的 Z_2-齐次元素，并记 $d(x)=\theta$。在本文中若 $d(x)$ 出现在某个表达式中，则约定 x 是 Z_2-齐次元素。用 $h(A)$ 表示超代数 A 的所有 Z_2-齐次元素构成的集合，即 $h(A)=A_{\overline{0}}\cup A_{\overline{1}}$。

若 $f\in\wedge(n),g\in T(m)$，将 $f\otimes g$ 简记为 fg，于是 $\{x^uy^\lambda\mid u\in B(n),\lambda\in H\}$ 是 U 的一个 F-基底。令 $U_i=\mathrm{span}_F\{x^uy^\lambda\,\|u|=i\},i=1,\cdots,n$，则 $U=\bigoplus_{i=0}^{n}U_i$ 是 Z-阶化超代数，且 $U_0=T(m)$。

设 $I_1=\{1,\cdots,n\},I_2=\{n+1,\cdots,r\},I=I_1\cup I_2$，对 $i\in I_1$，令 $D_i=\partial/\partial x_i$ 为 $\wedge(n)$ 对 x_i 的偏导子，则 D_i 可扩充为 U 的导子，使得对 $\lambda=(\lambda_{n+1},\cdots,\lambda_r)\in H$，$D_i(x^uy^\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\partial x^u}{\partial x_i}y^\lambda & i\in I_1\\ \lambda_ix^uy^\lambda & i\in I_2\end{cases}$。

设 $u=\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle\in B_k$，若 $i\in\{u\}$，则令 $u-\langle i\rangle\in B_{k-1}$，使得 $\{u-\langle i\rangle\}=\{u\}\setminus\{i\}$；令 $u(i)=\left|\{l\in\{u\}\mid l<i\}\right|$，若 $i\in I_1\setminus\{u\}$，约定 $u(i)=0,x^{u-\langle i\rangle}=0$，那么对任意的 $i\in I_1$，有 $D_i(x^u)=(-1)^{u(i)}x^{u-\langle i\rangle}$，于是，当 $i\in I_1$ 时，$D_i\in\mathrm{Der}_{\overline{1}}U$，而当 $i\in I_2$ 时，$D_i\in\mathrm{Der}_{\overline{0}}U$。

设 $f\in h(U),D\in h(\mathrm{Der}U)$，定义 $(fD)(g)=fD(g),\forall g\in h(U)$，则对 $i,j\in I$，$f,g\in U$ 有：

$$\left[fD_i, gD_j\right] = fD_i(g)D_j - (-1)^{d(fD_i)d(gD_j)} gD_j(f)D_i$$

令$\widehat{W}(n,m) = \left\{\sum_{i=1}^{r} f_i D_i \middle| f_i \in U, i \in I\right\}$，那么$\widehat{W}(n,m)$是$U$的导子超代数$\mathrm{Der}U$的子代数，$\left\{x^u y^\lambda D_j \middle| u \in B(n), \lambda \in H, j \in I\right\}$为$\widehat{W}(n,m)$的一组$F$-基底。下面简记$\widehat{W}(n,m)$为$\widehat{W}$。

令$\widehat{W}_i = \mathrm{span}_F\left\{x^u y^\lambda D_j \middle| |u| + \delta(j, I_2) = i+1, u \in B(n), \lambda \in H, j \in I\right\}$，其中：$\delta(j, I_2) = \begin{cases} 1 & j \in I_2 \\ 0 & j \notin I_2 \end{cases}$，那么$\widehat{W} = \bigoplus_{i=-1}^{n} \widehat{W}_i$是$Z$-阶化李超代数[1]。

3. $\widehat{W}$的导子超代数

设$\mathrm{T} = \{-1, 0, 1, \cdots, n\}$。

引理3.1 设$J = \{-n-1, -n, \cdots, n, n+1\}$，令$\mathrm{Der}_t\widehat{W} := \left\{\varphi \in \mathrm{Der}\widehat{W} \middle| \varphi(\widehat{W}_i) \subseteq \widehat{W}_{t+i}, \forall i \in \mathrm{T}\right\}$，其中$t \in J$，则$\mathrm{Der}\widehat{W} = \oplus_{t\in J} \mathrm{Der}_t\widehat{W}$是$Z$-阶化李超代数。

证明：参见文献[1]第30页引理2.1的证明。

引理3.2 若$\sum_{i=1}^{r} f_i D_i = 0$，其中$f_i \in U, i = 1, 2, \cdots, r$，那么$f_i = 0, i = 1, 2, \cdots, r$。

证明：当$k \in I_1$时，$\left(\sum_{i=1}^{r} f_i D_i\right)(x_k) = \sum_{i=1}^{r} f_i D_i(x_k) = f_k = 0$；当$k \in I_2$时，令$\varepsilon_k = (\delta_{k,n+1}, \cdots, \delta_{k,r})$，其中$\delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$（下面相同），有$\left(\sum_{i=1}^{r} f_i D_i\right)(y^{\varepsilon_k}) = \sum_{i=1}^{r} f_i D_i(y^{\varepsilon_k}) = f_k y^{\varepsilon_k} = 0$，于是$f_k = 0$。

命题3.1 若$\varphi \in h\left(\mathrm{Der}_t(\widehat{W})\right)$，其中$t \in J$且$t \geq 0$，那么存在$X \in \widehat{W}_t$，使得$\varphi = \mathrm{ad}X$。

证明：参见文献[6]第29页命题2.5.5的证明。

命题3.2 $\mathrm{Der}_{-1}(\widehat{W}) = \mathrm{ad}\widehat{W}_{-1}$。

证明：参见文献[6]第18页命题2.3.14的证明。

引理3.3 设$X \in \widehat{W}$，若对任意的$i \in I_1, j \in I_2$，都有$[D_i, X] = \left[y^{\varepsilon_j} D_i, X\right] = 0$成立，那么$X \in \widehat{W}_{-1}$。

证明：由引理3.2及文献[6]第16页引理2.3.10的证明可知引理3.3成立。

引理3.4 设$\varphi \in h\left(\mathrm{Der}_{-t}(\widehat{W})\right)$，其中$t > 1$。若$\varphi(\widehat{W}_{t-1}) = \{0\}$，那么$\varphi = 0$。

证明：首先，因$\widehat{W} = \bigoplus_{i=-1}^{n} \widehat{W}_i$，所以当$k < -1$时$\widehat{W}_k = \{0\}$，又$\varphi \in h\left(\mathrm{Der}_{-t}(\widehat{W})\right)$，所以对$\forall s > 1$，$\varphi(\widehat{W}_{t-s}) \subseteq \widehat{W}_{-s} = \{0\}$，从而有$\varphi(\widehat{W}_{-1}) = \varphi(\widehat{W}_0) = \cdots = \varphi(\widehat{W}_{t-2}) = \varphi(\widehat{W}_{t-1}) = \{0\}$。

下面要证明$\varphi(\widehat{W}_l) = \{0\}, l = t, \cdots, n$，为此对$l$做数学归纳法：首先$\varphi(\widehat{W}_{t-1}) = \{0\}$，假设$l > t-1$且$\varphi(\widehat{W}_{l-1}) = \{0\}$，任取$X \in \widehat{W}_l$，因对$\forall i \in I_1, j \in I_2$，$D_i \in \widehat{W}_{-1}$，$y^{\varepsilon_j} D_i \in \widehat{W}_{-1}$，而$\varphi(\widehat{W}_{-1}) = \{0\}$，所以$\varphi(D_i) = 0$，$\varphi\left(y^{\varepsilon_j} D_i\right) = 0$，且$[D_i, X] \in \widehat{W}_{l-1}$，$\left[y^{\varepsilon_j} D_i, X\right] \in \widehat{W}_{l-1}$，由归纳假设$\varphi(\widehat{W}_{l-1}) = \{0\}$，因此，$\varphi([D_i, X]) = 0$，$\varphi\left(\left[y^{\varepsilon_j} D_i, X\right]\right) = 0$。又设$\tilde{i} = \begin{cases} \bar{0}, & i \in I_2 \\ \bar{1}, & i \in I_1 \end{cases}$，那么：

$$\varphi([D_i, X]) = [\varphi(D_i), X] + (-1)^{d(\varphi)\tilde{i}} [D_i, \varphi(X)] = (-1)^{d(\varphi)\tilde{i}} [D_i, \varphi(X)]$$

$$\varphi\left(\left[y^{\varepsilon_j}D_i,X\right]\right)=\left[\varphi\left(y^{\varepsilon_j}D_i\right),X\right]+(-1)^{d(\varphi)\bar{i}}\left[y^{\varepsilon_j}D_i,\varphi(X)\right]=(-1)^{d(\varphi)\bar{i}}\left[y^{\varepsilon_j}D_i,\varphi(X)\right]$$

因此有$\left[D_i,\varphi(X)\right]=\left[y^{\varepsilon_j}D_i,\varphi(X)\right]=0$，$\forall i\in I_1,\ j\in I_2$，由引理 3.3 知$\varphi(X)\in\widehat{W}_{-1}$。

因$\varphi\in h\left(\mathrm{Der}_{-t}\left(\widehat{W}\right)\right)$，$X\in\widehat{W}_l$，所以$\varphi(X)\in\widehat{W}_{-t+l}$，所以$\varphi(X)\in\widehat{W}_{-t+l}\cap\widehat{W}_{-1}$。

由于$l>t-1$，所以$-t+l>-1$，而$\widehat{W}=\bigoplus_{i=-1}^{n}\widehat{W}_i$，因此$\widehat{W}_{-t+l}\cap\widehat{W}_{-1}=\{0\}$，故$\varphi(X)=0,\forall X\in\widehat{W}_l$，从而知$\varphi\left(\widehat{W}_l\right)=\{0\}$，于是有$\varphi\left(\widehat{W}_t\right)=\varphi\left(\widehat{W}_{t+1}\right)=\cdots=\varphi\left(\widehat{W}_n\right)=\{0\}$。

综上可知：

$$\varphi\left(\widehat{W}_{-1}\right)=\varphi\left(\widehat{W}_0\right)=\cdots=\varphi\left(\widehat{W}_{t-1}\right)=\varphi\left(\widehat{W}_t\right)=\varphi\left(\widehat{W}_{t+1}\right)=\cdots=\varphi\left(\widehat{W}_n\right)=\{0\}$$

因为$\widehat{W}=\bigoplus_{i=-1}^{n}\widehat{W}_i$，所以任意$X\in\widehat{W}$可表为：$X=X_{-1}+X_0+X_1+\cdots+X_n$，其中$X_j\in W_j,\ j=-1,0,1,\cdots,n$，而$\varphi\left(\widehat{W}_j\right)=\{0\},\ j=-1,0,1,\cdots,n$，所以$\varphi\left(X_j\right)=0,\ j=-1,0,1,\cdots,n$，因此：$\varphi(X)=\varphi\left(X_{-1}\right)+\varphi\left(X_0\right)+\varphi\left(X_1\right)+\cdots+\varphi\left(X_n\right)=0$，即对任意$X\in\widehat{W}$，都有$\varphi(X)=0$，因此$\varphi=0$。

命题 3.3 $\mathrm{Der}_{-t}\left(\widehat{W}\right)=\{0\},t>1$。

证明：任取$\varphi\in h\left(\mathrm{Der}_{-t}\left(\widehat{W}\right)\right)$，下面证明$\varphi\left(\widehat{W}_{t-1}\right)=\{0\}$。注意到：

$$\widehat{W}_{t-1}=\mathrm{span}_F\left\{x^u y^\lambda D_j,\ x^v y^\eta D_k\,\middle|\,\lambda,\eta\in H,|u|=t,\ j\in I_1,|v|=t-1,\ k\in I_2\right\}$$

$$\widehat{W}_{-1}=\mathrm{span}_F\left\{y^\lambda D_j\,\middle|\,\lambda,\in H,\ j\in I_1\right\}$$

$$U_0=\mathrm{span}_F\left\{y^\lambda\,\middle|\,\lambda,\in H\right\}$$

对$x^u y^\lambda D_j\in\widehat{W}_{t-1}$，其中$|u|=t,\ j\in I_1$，因为$\varphi\in h\left(\mathrm{Der}_{-t}\left(\widehat{W}\right)\right)$，所以$\varphi\left(x^u y^\lambda D_j\right)\in\widehat{W}_{-1}$，因此可设$\varphi\left(x^u y^\lambda D_j\right)=\sum_{s=1}^{n}a_s D_s,\ a_s\in U_0$。

因$t>1$，所以存在$l\in\{u\},l\neq j$，于是有$x_l D_j\left(x^u y^\lambda\right)D_l=0$，进而有$\left[x^u y^\lambda D_l,x_l D_j\right]=x^u y^\lambda D_j$。

设$\varphi\left(x^u y^\lambda D_l\right)=\sum_{s=1}^{n}b_s D_s,\ b_s\in U_0$。因$x_l D_j,x_l D_l\in\widehat{W}_0$，所以$\varphi\left(x_l D_j\right)\in\widehat{W}_{-t}=\{0\}$，$\varphi\left(x_l D_l\right)\in\widehat{W}_{-t}=\{0\}$，从而$\varphi\left(x_l D_j\right)=0$，$\varphi\left(x_l D_l\right)=0$，于是将$\varphi$作用在等式$\left[x^u y^\lambda D_l,x_l D_j\right]=x^u y^\lambda D_j$两端得：

$$\left[\sum_{s=1}^{n}b_s D_s,x_l D_j\right]=\sum_{s=1}^{n}a_s D_s\Rightarrow b_l D_j=\sum_{s=1}^{n}a_s D_s$$

因此当$s\neq j$时有$a_s=0$，得：$\varphi\left(x^u y^\lambda D_j\right)=a_j D_j,\ a_j\in U_0$。

因$l\in\{u\},l\neq j$，又$d\left(x_l D_l\right)=\bar{0}$，所以有$\left[x^u y^\lambda D_j,x_l D_l\right]=-x^u y^\lambda D_j$，由前面讨论知$\varphi\left(x_l D_l\right)=0$，所以将$\varphi$作用于等式$\left[x^u y^\lambda D_j,x_l D_l\right]=-x^u y^\lambda D_j$两端得：$0=\left[a_j D_j,x_l D_l\right]=-a_j D_j$，推出$a_j=0$，从而知$\varphi\left(x^u y^\lambda D_j\right)=0$。

对$x^v y^\eta D_k\in\widehat{W}_{t-1}$，其中$|v|=t-1,k\in I_2$，也有$\varphi\left(x^v y^\eta D_k\right)\in\widehat{W}_{-1}$，因此也可设$\varphi\left(x^v y^\eta D_k\right)=\sum_{s=1}^{n}c_s D_s,\ c_s\in U_0$。

因$t>1$，所以$t-1>0$，因此存在$l'\in\{v\}$，进而得$\left[x^v y^\eta D_k,x_{l'}D_{l'}\right]=-x^v y^\eta D_k$及同样也有$\varphi\left(x_{l'}D_{l'}\right)=0$，于是将$\varphi$作用于等式$\left[x^v y^\eta D_k,x_{l'}D_{l'}\right]=-x^v y^\eta D_k$的两端就有：

$$\left[\sum_{s=1}^{n} c_s D_s, x_{l'} D_{l'}\right] = -\sum_{s=1}^{n} c_s D_s \Rightarrow c_{l'} D_{l'} = -\sum_{s=1}^{n} c_s D_s$$

故此当 $s \neq l'$ 时有 $c_s = 0$，并且有 $2c_{l'} D_{l'} = 0 \Rightarrow c_{l'} = 0$，因此 $\varphi\left(x^{v} y^{\eta} D_k\right) = 0$。

综上可知：$\varphi\left(\widehat{W}_{t-1}\right) = \{0\}$，由引理 3.4 知 $\varphi = 0$，因此 $\mathrm{Der}_{-t}\left(\widehat{W}\right) = \{0\}, t > 1$。

定理 3.1 $\mathrm{Der}\left(\widehat{W}\right) = \mathrm{ad}\widehat{W}$。

证明：由命题 3.3 知 $\mathrm{Der}_{-2}\left(\widehat{W}\right) = \mathrm{Der}_{-3}\left(\widehat{W}\right) = \cdots = \mathrm{Der}_{-n-1}\left(\widehat{W}\right) = \{0\}$，而 $\mathrm{Der}\widehat{W} = \oplus_{t\in J} \mathrm{Der}_t \widehat{W}$，其中 $J = \{-n-1, -n, \cdots, n, n+1\}$，所以 $\mathrm{Der}\widehat{W} = \mathrm{Der}_{-1}\widehat{W} \oplus \mathrm{Der}_0\widehat{W} \oplus \mathrm{Der}_1\widehat{W} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Der}_{n+1}\widehat{W}$，于是任意的 $f \in \mathrm{Der}\widehat{W}$ 可表为：$f = f_{-1} + f_0 + f_1 + \cdots + f_{n+1}$，其中 $f_j \in \mathrm{Der}_j\widehat{W}, j = -1, 0, 1, \cdots, n, n+1$。

由命题 3.2 知 $\mathrm{Der}_{-1}\left(\widehat{W}\right) = \mathrm{ad}\widehat{W}_{-1}$，所以存在 $X_{-1} \in \widehat{W}_{-1}$，使得 $f_{-1} = \mathrm{ad}X_{-1}$。

对 $f_j \in \mathrm{Der}_j\widehat{W}, j = 0, 1, \cdots, n, n+1$，因 $\mathrm{Der}_j\widehat{W} = \left(\mathrm{Der}_j\widehat{W}\right)_{\bar{0}} \oplus \left(\mathrm{Der}_j\widehat{W}\right)_{\bar{1}}$，所以存在 $f_{j\bar{0}} \in \left(\mathrm{Der}_j\widehat{W}\right)_{\bar{0}}, f_{j\bar{1}} \in \left(\mathrm{Der}_j\widehat{W}\right)_{\bar{1}}$，使得 $f_j = f_{j\bar{0}} + f_{j\bar{1}}$，由命题 3.1 知，存在 $X_{j0}, X_{j1} \in \widehat{W}_t$，使得 $f_{j\bar{0}} = \mathrm{ad}X_{j0}, f_{j\bar{1}} = \mathrm{ad}X_{j1}$，于是 $f_j = f_{j\bar{0}} + f_{j\bar{1}} = \mathrm{ad}X_{j0} + \mathrm{ad}X_{j1} = \mathrm{ad}\left(X_{j0} + X_{j1}\right)$，因此若令 $Y = X_{-1} + \sum_{j=0}^{n+1}\left(X_{j0} + X_{j1}\right)$，则有 $f = \mathrm{ad}Y, \forall f \in \mathrm{Der}\widehat{W}$，因此 $\mathrm{Der}\widehat{W} \subseteq \mathrm{ad}\widehat{W}$，但 $\mathrm{ad}\widehat{W} \subseteq \mathrm{Der}\widehat{W}$，故此 $\mathrm{Der}\widehat{W} = \mathrm{ad}\widehat{W}$。

4. 结论

本文确定了有限维单模李超代数 $\widehat{W}$ 的导子超代数，从而说明 $\widehat{W}$ 与已有的有限维单模李超代都不同构，进一步要讨论它的限制性及表示。

参考文献 (References)

[1] 张永正，刘文德 (2004) 模李超代数. 科学出版社，北京.

[2] 徐晓宁 (2010) 有限维模李超代数 $\Omega, \Gamma, \mathfrak{D}$. 博士论文，东北师范大学，长春.

[3] 远继霞 (2011) Cartan 型李超代数. 博士论文，哈尔滨工业大学，哈尔滨.

[4] 任丽 (2012) Cartan 型李超代数. 博士论文，东北师范大学，长春.

[5] 王璐，张丽华 (2014) 有限维模李超代数 $\widehat{W}(n,m)$ 的单性. *理论数学*, **4**, 247-250.

[6] 董艳琴 (2011) 广义 Cartan 型模李超代数. 博士论文，东北师范大学，长春.