Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 156-166
Published Online July 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.54024

Join Dense Embeddings of Posets in Completely Distributive Lattices

Xiaoquan Xu

Department of Mathematics and Computer Science, Nanchang Normal University, Nanchang Jiangxi
Email: xiqxu2002@163.com

Received: Jul. 10th, 2015; accepted: Jul. 23rd, 2015; published: Jul. 30th, 2015

Abstract

Based on regular relations, the join dense embedding theorem of posets in completely distributive lattices is established, and it is proved that up to isomorphism, such embeddings are unique, that is, they all are the join dense embeddings induced by certain regular relations on posets.

Keywords

Poset, Subset System, Completely Distributive Lattice, Join Dense Embedding, Regular Relation

偏序集到完全分配格的并稠嵌入

徐晓泉

南昌师范学院数学与计算机系，江西 南昌
Email: xiqxu2002@163.com

收稿日期：2015年7月10日；录用日期：2015年7月23日；发布日期：2015年7月30日

摘 要

基于正则关系，建立了偏序集到完全分配格的并稠嵌入定理，证明了在同构的意义下，偏序集到完全分配格的并稠嵌入是唯一的，即均是由一些正则关系诱导的并稠嵌入。

关键词

偏序集，子集系统，完全分配格，并稠嵌入，正则关系

1. 引言

将一个格或偏序集嵌入到一个好的结构中，特别是嵌入到方体[0, 1]X 中是格序结构研究的一个重要内容。上世纪五、六十年代，Raney [1] [2]和 Bruns [3]对完备格 L 到完备链的同态给出了一个构造法。基于这一构造法，Raney [1] [2]、Bruns [3]、Lawson [4] [5]、Bandelt 与 Erné[6]等人建立了若干重要类型的分配格(包括完全分配格和连续格)到方体的嵌入定理。Raney 和 Bruns 的经典方法是建立在对相应的弱辅助关系的极大完备链作深入分析之上的，颇为复杂，不便应用，且需要选择公理 AC。而它的最大缺陷在于它对偏序集情形的失效。为克服这一缺陷，我们在文[7] (也见文[8]和文献[9])中给出完全分配格到单位闭区间[0, 1]一类基本完备格同态的一个直接而简洁的构造，这一构造法只需要较弱的可数相关选择公理 DCω。基于此构造法。我们容易建立完全分配格、连续格和一般的 Z–连续 domain 到方体的嵌入定理(参看[7] [8] [10])。值得注意的是，由于完全分配格可用完备格同态嵌入到某方体[0, 1]X 中，因而偏序集到某方体的嵌入问题可以转化为偏序集到完全分配格的嵌入问题嵌入。

众所周知，二元关系能以一种自然的方式生成完备格。设 ρ 是集 X 上的一个二元关系，$A\subseteq P$，定义 $\rho(A)=\{x\in X:\exists a\in A使(a,x)\in\rho\}$，称为 A 在 ρ 下的像。在集包含序下，$\Phi_\rho(X)=\{\rho(A):A\subseteq X\}$ 为完备格。从格序结构的角度二元关系引起人们的关注源于 Raney 和 Zareckiǐ 的工作。Raney 在文[2]中证明了：若集 X 上的二元关系 ρ 是幂等的，则 $\Phi_\rho(X)$ 为完全分配格。进一步，Zareckiǐ 在文[11]中证明了下述经典结果：集 X 上二元关系 ρ 是正则的当且仅当 $(\Phi_\rho(X),\subseteq)$ 为完全分配格。Zareckiǐ 的工作引起了人们对正则关系的关注，这里可提到 Markowsky [12]，Schein [13]，Bandelt [14] [15]和 Yang [16]等人的工作。在文[17]-[22]中，我们拓展了他们的工作，并给出了正则关系及更一般的正则型关系(包括它们的“代数型”)在拓扑和 Domain 理论中的一系列重要应用。

在本文中，我们将基于二元关系讨论偏序集到方体的嵌入问题，特别是偏序集到完全分配格的一种特殊嵌入－并稠嵌入问题。基于正则关系，我们建立了偏序集到完全分配格的并稠嵌入定理，证明了在同构的意义下，偏序集到完全分配格的(保 Z–并的)并稠嵌入是唯一的，即均是由一些正则关系(或幂等关系)诱导的并稠嵌入。

2. 预备

本节给出本文所需的一些基本概念和记号。

在本文中，**Set** 表示集合范畴，**Poset** 表示以偏序集为对象，保序映射为态射的范畴。

设 $(P,\leq)$ 为偏序集，$\forall x\in P, A\subseteq P$，记 $\uparrow x=\{y\in P:x\leq y\}$，$\uparrow A=\bigcup_{a\in A}\uparrow a$；对偶地定义 $\downarrow x$ 和 $\downarrow A$。

设 $P, Q\in ob$(**Poset**)映射 $f:P\to Q$ 称为是单调的(也称是保序的)，若 $\forall x,y\in P, x\leq y$，有 $f(x)\leq f(y)$；f 称为是序嵌入，若 $\forall x,y\in P$ 有 $x\leq y\Leftrightarrow f(x)\leq f(y)$。

定义 2.1 (Baranga [23])：函子 Z：**Poset→Set** 称为是 **Poset** 上的一个子集系统，简称 Z 是一个子集系统，若 Z 满足以下条件：

(1) $\forall P\in ob$(**Poset**)，$Z(P)\subseteq 2^P$。

(2) $\forall P$，$Q\in ob$(**Poset**)，保序映射 f：$P\to Q$，$A\in Z(P)$，有 $Z(f)(A)=f(A)\in Z(P)$。

(3) $\exists P\in ob$(**Poset**)使 $Z(P)$ 含有 P 的非单点的非空子集。

以下是三个常用的子集系统：

(1) $\boldsymbol{P}(\forall P\in ob(\mathbf{Poset})$，$\boldsymbol{P}(P)$ 为 P 的子集全体)。

(2) $\boldsymbol{D}(\forall P\in ob(\mathbf{Poset})$，$\boldsymbol{D}(P)$ 为 P 的定向子集全体)。

(3) $\boldsymbol{F}(\forall P\in ob(\mathbf{Poset})$，$\boldsymbol{F}(P)$ 为 P 的有限子集全体)。

在以下讨论中，Z 总表示 **Poset** 上的一个子集系统。$\forall P\in ob(\mathbf{Poset})$，称 $Z(P)$ 为 P 上的一个子集系统。更一般地，若 $\Phi\subseteq\boldsymbol{P}(P)$ 满足：$\{\{x\}:x\in P\}\subseteq\Phi$，则称 Φ 是 P 上的一个广义子集系统。

定义 2.2 设 Z 是一个子集系统，P 和 Q 是偏序集，$\Phi\subseteq\boldsymbol{P}(P)$。

(1) P 称为是 Φ-*domain* (或 Φ-完备的)，若 $\forall S\in\Phi$，S 在 P 中有上确界 $\vee S$。

(1) P 称为是 Z–*domain*，若 P 是 $Z(P)$–*domain*。D-*domain* 也称为是定向完备偏序集，简称为 *dcpo*。

(1) P 称为是 Z–*domain*，$f:P\to Q$。f 称为是保 Z–并的，若 $\forall S\in Z(P)$，有 $f(\vee S)=\vee f(S)$。当 $Z=\mathrm{D}$ 时，保 Z–并映射就是在熟知的 Scott 连续映射[4] [9]。

定义 2.3 设 P 是偏序集，$\prec$ 是 P 上的一个二元关系。

(1) $\prec$ 称为是一个附加序，若 $\forall x,y,u,v\in P$，有

(i) $x\prec y\Rightarrow x\le y$，

(ii) $x\le u\prec v\le y\Rightarrow x\prec y$。

(2) $\prec$ 称为是逼近的，若 $\forall x\in P,\ x=\vee\{p\in P:p\prec x\}$。

(3) $\prec$ 称为具有插入性质，若满足：

(INT) $\forall x,y\in P,x\prec y,\exists z\in P$使$x\prec z\prec y$。

定义 2.4 设 Φ- 是偏序集 P 上的一个广义子集系统，P 是 Φ-*domain*, $x,y\in P$。

(1) 称 x Φ-below y，记为 $x\ll_\Phi y$，若 $\forall S\in\Phi,y\le\vee S,\exists s\in S$使$x\le s$。显然 $\ll_\Phi$ 是 P 上的一个附加序。记 $\Downarrow_\Phi x=\{u\in P:u\ll_\Phi x\}$。$P$ 称为是 Φ-弱连续domain，若 $\ll_{\mathrm{M}}$ 是逼近的，即 $\forall x\in P,x=\vee\Downarrow_{\mathrm{M}}x$；进一步，若 P 还满足：$\forall x\in P,\Downarrow_\Phi x\in I_\Phi(P)=\{\downarrow S:S\in\Phi\}$，则称 P 为 Φ-连续domain；若 P 为 Φ- 连续 domain，且 $\ll_\Phi$ 具有插入性质，则称 P 为 Φ-强连续domain。

(2) 设 P 是 Z-domain。称 x Z-*below* y，记为 $x\ll_Z y$，若 $x\ll_{Z(P)}y$。记 $\Downarrow_Z x=\{u\in P:u\ll_Z x\}$。$\ll_{\boldsymbol{D}}$ 就是熟知的 way below 关系 $\ll$ (参看[4] [9])，$\Downarrow_{\boldsymbol{D}}x$ 简记为 $\Downarrow x$；$\ll_{\boldsymbol{P}}$ 称为完全 below 关系，简记为 $\lhd$。

(3) P 称为是 Z–弱连续 domain，Z–连续 domain 和 Z–强连续 domain，若 P 分别是 $Z(P)$–弱连续 domain，$Z(P)$–连续 domain 和 $Z(P)$–强连续 domain。当 $Z=\boldsymbol{D}$ 时，Z–连续 domain 简称为连续 domain(参看[4] [9])；当 $Z=\boldsymbol{P}$ 时，Z–(强)连续 domain 简称为强连续格。

定义 2.5 集 X 上的二元关系 称为具有插入性质，若满足

(INT) $\forall x,y\in X,x\prec y,\exists z\in X$ 使$x\prec z\prec y$。

连续 domain 所具有的最为重要的性质之一是其上的 *way below* 关系 $\ll$ 具有插入性质(即 domain 的连续性与强连续性等价)，即有

定理 2.6 ([4] [9])：设 P 为连续 domain，$p,q\in P$。若$p\ll q$, 则$\exists r\in P$使$p\ll r\ll q$。

推论 2.7 设 P 为连续偏序集，则 $\ll$ 具有定向择一性质，即满足下述

(DC) $\forall p\in P,\ D\in\boldsymbol{D}(P)$, 若$\vee D$存在, 且 $p\ll\vee D$, 则$\exists d\in D$使$p\ll d$。

关于完全 *below* 关系，有下述

引理 2.8 设完备格 L 上的完全 *below* 关系 $\lhd$ 是逼近的，$x,y\in L$。若$x\lhd y$, 则$\exists z\in L$使$x\lhd z\lhd y$。

证明： $\forall s\lhd x$，由 $\lhd$ 是逼近的，$s=\vee\{u\in L:u\lhd s\}$。令 $A=\bigcup_{s\lhd y}\{u\in L:u\lhd s\}$。

则 $\vee A=\bigvee_{s\lhd y}\{u\in L:u\lhd s\}=\bigvee_{s\lhd y}s=y$；从而由 $x\lhd y,\exists w\in A$使$x\le w$。由 $w\in A,\exists z\lhd y$使$w\lhd z$。故 $x\lhd z\lhd y$。

关于 $\lhd$ 的择一性，易知有下述

引理 2.9： 完备格 L 上的关系 $\lhd$ 具有下述完全择一性质：

(CC) $\forall x \in L, A \subseteq L,$ 有 $x \lhd \vee A \Leftrightarrow \exists a \in A$ 使 $x \lhd a$。

定义 2.10： 设 L 是完备格，$\Phi \subseteq 2^L$。L 称为是 Φ-分配格，若 $\forall \{M_i : i \in I\} \subseteq \Phi$，有

(MD) $\bigwedge_{i\in I} \vee M_i = \bigvee_{\varphi \in \Pi M_i} \wedge \varphi(I)$。

当 $\Phi = \boldsymbol{P}(L)$ 或 $\boldsymbol{D}(L)$ 时，Φ-分配格分别称为是完全分配格[1] [2]和定向分配格[4] [9]。

下面的结论是众所周知的(参见[4] [6]-[9])。

定理 2.11 (AC)：设 L 是完备格，Φ 是 L 上的一个广义子集系统。则下述两条件等价：

(1) L 是 Φ-分配格；

(2) L 是 Φ-弱连续的，即 $\forall x \in L,\ x = \vee\{u \in L : u \ll_\Phi x\}$。

推论 2.12 ([4] [9]) (AC)：设 L 是完备格，则下述两条件等价：

(1) L 是定向分配格；

(2) L 是连续格。

推论 2.13 (Raney [1] [2]) (AC)：设 L 是完备格，则下述两条件等价：

(1) L 是完全分配格；

(2) L 是强连续格，即 $\forall x \in L,\ x = \vee\{u \in L : u \lhd x\}$。

由引理 2.8 和推论 2.13，有下述

推论 2.14 (Raney [1] [2]) (AC)：设 L 是完全分配格，则 L 上的完全 *below* 关系 $\lhd$ 具有插入性质。

定义 2.15： 设 P,Q 是 Z–*domain*。映射 $f: P \to Q$ 称为是保任意交的，若 $\forall A \subseteq P$，当 $\wedge A$ 存在时，$\wedge f(A)$ 存在，且 $f(\wedge A) = \wedge f(A)$。映射 $f: P \to Q$ 称为是 Z–同态，若 f 保任意交和 Z–并。当 $Z = \boldsymbol{D}$ 时，Z–同态也称为 Lawson 同态。

3. 正则关系与完全分配格

$\forall X$，$Y \in ob(\mathbf{Set})$，称 ρ 为 X 与 Y 之间的一个二元关系，若 $\rho \subseteq X \times Y$。当 $X = Y$ 时，简称 ρ 为 X 上的一个二元关系。为简便起见，用 $\rho \subseteq X \times Y$ 表示 X 与 Y 之间的一个二元关系。X 与 Y 之间的二元关系全体记为 $\mathbf{Rel}(X, Y)$。

定义 3.1： 设 $\rho \subseteq X \times Y,\ \tau \subseteq Y \times Z,\ A \subseteq X$。定义

(1) $\tau \circ \rho = \{(x,z) : \exists y \in Y$ 使 $(x,y) \in \rho$ 和 $(y,z) \in \tau\}$，称之为 ρ 与 τ 的复合。

(2) $\rho^{-1} = \{(y,x) : (y,x) \in Y \times X, (x,y) \in \rho\}$，称之为 ρ 的逆。

(3) $\rho(A) = \{y \in Y : \exists a \in A$ 使 $(a,y) \in \rho\}$，称之为 A 在 ρ 下的像。$\rho(\{x\})$ 简记为 $\rho(x)$。

(4) $\Phi_\rho(X) = \{\rho(A) : A \subseteq X\}$。

易知，完备格 $(\Phi_\rho(X), \subseteq)$ 中的并运算 $\vee$ 为通常的集合并运算 $\bigcup$，但其中的交运算 $\wedge$ 一般不是集合交运算 $\bigcap$。

$\forall X \in ob(\mathbf{Set})$，易知 $(\mathbf{Rel}(X, X), \ \ )$ 是有单位元 $\Delta(X) = \{(x,x) : x \in X\}$ 的半群。$\forall \rho \in \mathbf{Rel}(X, X)$，若 $\rho^2 = \rho \circ \rho = \rho$，则称 ρ 是幂等的；若 ρ 是半群 $(\mathbf{Rel}(X, X), \ \ )$ 中的正则元，即 $\exists \sigma \in \mathbf{Rel}(X, X)$ 使 $\rho \circ \sigma \circ \rho = \rho$，则称 ρ 是正则的。更为一般地，我们引入下述

定义 3.2： 关系 $\rho \subseteq X \times Y$ 称为是正则的，若 $\exists \sigma \subseteq Y \times X$ 使 $\rho \circ \sigma \circ \rho = \rho$。

显然，关系的正则性是自对偶的，即若 $\rho \subseteq X \times Y$ 是正则的，则 $\rho^{-1} \subseteq Y \times X$ 是正则的。

例 3.3： (1) 集 X 与其幂集 $\boldsymbol{P}(X)$ 之间的关系 $\in \subseteq X \times \boldsymbol{P}(X)$ 是正则的。事实上，定义 $\boldsymbol{P}(X)$ 与 X 之间

的一个二元关系 $\sigma \subseteq \boldsymbol{P}(X)\times X$ 如下：$(A,a)\in\sigma \Leftrightarrow A=\{a\}$。则有 $\in\circ\sigma\circ\in=\in$。

(2) 集 X 到集 Y 的任一映射 $f:X\to Y$ 作为 X 与 Y 之间的一个二元关系是正则的。事实上，定义 $\tau\subseteq Y\times X$ 如下：$(y,x)\in\tau \Leftrightarrow y=f(x)$。则有 $f\circ\tau\circ f=f$。

关于正则关系，Zareckiǐ 在文[11]证明了下述重要结果。

定理 3.4 (Zareckiǐ[11])：设 $\rho\subseteq X\times Y$，则下述两条件等价：

(1) ρ 是正则的；

(2) $\left(\Phi_\rho(X),\ \subseteq\right)$ 是完全分配格。

关于正则关系及其它正则型关系的讨论，读者可参看文[13]-[22]。

4. 偏序集到完全分配格的并稠嵌入

设 $\prec$ 是偏序集 P 上的一个二元关系，若 $\prec$ 是附加序，且作为关系是正则的，则称 $\prec$ 是 P 上的一个正则附加序；类似地，称 $\prec$ 是 P 上的一个幂等附加序，若 $\prec$ 是附加序，且作为关系是幂等的(等价于 $\prec$ 具有插入性质)。

定义 4.1 (Z–择一性质)：设 P 是 Z–domain，ρ是 P 上的一个二元关系。ρ称为具有 Z–择一性质，若ρ满足

(ZC) $\forall x\in P, S\in Z(P)$,若$x\rho\vee S$,则$\exists s\in S$使$x\rho s$。

定义 4.2：设 P 是 Z–domain。

(1) P 称为是 Z–正则 domain，若 P 上存在一个具有 Z–择一性质的、逼近的正则附加序。

(2) P 称为是 Z–幂等 domain，若 P 上存在一个具有 Z–择一性质的、逼近的幂等附加序。

显然，对偏序集 P 上的附加序ρ，ρ是幂等的当且仅当ρ具有插入性质。

引理 4.3：设 P 是 Z–domain。

(1) 若 P 是 Z–正则 domain，则 P 是 Z–弱连续 domain。

(2) P 是 Z–幂等 domain $\Leftrightarrow$ P 上存在一个幂等的、逼近的附加序 $\prec\subseteq\ll_Z$。

证明：(1)：由 P 是 Z–正则 domain，P 上存在一个具有 Z–择一性质的、逼近的正则附加序 $\prec$。下证 $\prec\subseteq\ll_Z$。设 $x\prec y$。$\forall S\in Z(P)$，若 $y\le\vee S$，则由 $\prec$ 是 P 上的附加序，有 $x\prec\vee S$。由 $\prec$ 具有 Z–择一性质，$\exists s\in S$使$x\prec s$；从而由 $\prec$ 是 P 上的附加序，有 $x\le s$。故 $x\ll_Z y$。因而证明了 $\prec\subseteq\ll_Z$。由 $\prec$ 的逼近性得到 $\ll_Z$ 的逼近性。故 P 是 Z–弱连续 domain。

(2)：设 P 是 Z–幂等 domain，则 P 上存在一个具有 Z–择一性质的、逼近的幂等附加序 $\prec$。由(1)的证明，有 $\prec\subseteq\ll_Z$。反之，设 P 上存在一个幂等的、逼近的附加序 $\prec\subseteq\ll_Z$，下证 $\prec$ 具有 Z–择一性质。设 $x\in P, S\in Z(P), x\prec\vee S$。由 $\prec$ 是幂等的，$\exists y\in P$使$x\prec y\prec\vee S$。由 $\prec\subseteq\ll_Z$，有 $y\ll_Z\vee S$；从而 $\exists s\in S$使$y\le s$。由 $\prec$ 是附加序，有 $x\prec s$。故 $\prec$ 具有 Z–择一性质。所以 P 是 Z–幂等 domain。

命题 4.4：设 P 是偏序集，ρ是 P 上逼近的正则附加序。

令 $L=\left(\Phi_{\rho^{-1}}(X),\subseteq\right)$，$Z_\rho=\{S\subseteq P:\vee S$存在,且$\forall x\in P$,若$x\rho\vee S$,则$\exists s\in S$使$x\rho s\}$。

定义一个二元关系 $\rho^\nabla\subseteq P\times P$ 如下：$x\rho^\nabla y\Leftrightarrow\rho^{-1}(x)\lhd_L\rho^{-1}(y)$。则

(1) $\rho\subseteq\rho^\nabla\subseteq\le$。

(2) ρ^∇ 是 P 上具有 Z_ρ-择一性质的、逼近的幂等附加序。

(3) ρ是幂等的当且仅当 $\rho=\rho^\nabla$。

(4) 若 P 是 Z–domain，ρ具有 Z–择一性质，则 $Z(P)\subseteq Z\rho$。故 ρ^∇ 也具有 Z–择一性质。

证明：(1) 设 $x\rho y$。下证 $\rho^{-1}(x)\lhd_L\rho^{-1}(y)$。设 $\rho^{-1}(y)\subseteq\bigcup_{i\in I}\rho^{-1}(A_i)$。由 $x\in\rho^{-1}(y)$，$\exists i\in I$ 使 $x\in\rho^{-1}(A_i)$；

从而 $\exists a_i \in A_i$ 使 $x\rho a_i$。由 ρ 是附加序，有 $x \le a_i$；因而有 $\rho^{-1}(x) \subseteq \rho^{-1}(a_i) \subseteq \rho^{-1}(A_i)$。故 $\rho^{-1}(x) \lhd_L \rho^{-1}(y)$，即 $x\rho^{\nabla} y$。由 ρ 是逼近的附加序，易知 $\rho^{\nabla} \subseteq \le$。

(2) 由(1)和 ρ 是附加序，易知 ρ^{∇} 是 P 上的附加序。下证 ρ^{∇} 是幂等的。显然 ρ^{∇} 是传递的，故只需证 ρ^{∇} 具有插入性质。设 $x\rho^{\nabla} y$，即 $\rho^{-1}(x) \lhd_L \rho^{-1}(y)$。由 ρ 是 P 上的正则关系(因而 ρ^{-1} 是 P 上的正则关系)和定理 3.4，L 是完全分配格；从而由推论 2.14，$\exists \rho^{-1}(A) \in L$ 使 $\rho^{-1}(x) \lhd_L \rho^{-1}(A) \lhd_L \rho^{-1}(y)$。由 $\rho^{-1}(A) = \bigcup_{a \in A} \rho^{-1}(a)$ 和引理 2.9，$\exists a \in A$ 使 $\rho^{-1}(x) \lhd_L \rho^{-1}(a) \lhd_L \rho^{-1}(y)$。故 $x\rho^{\nabla} a\rho^{\nabla} y$。即证明了 ρ^{∇} 是幂等的。最后证 ρ^{∇} 具有 Z_ρ-择一性质。设 $x \in P,\ S \in Z_\rho,\ x\rho^{\nabla} \vee S$，即 $\rho^{-1}(x) \lhd_L \rho^{-1}(\vee S)$。由 Z_ρ 的定义，有 $\rho^{-1}(\vee S) = \bigcup_{s \in S} \rho^{-1}(s)$；从而由引理 2.9，$\exists s \in S$ 使 $\rho^{-1}(x) \lhd_L \rho^{-1}(s)$，即 $x\rho^{\nabla} s$。故 ρ^{∇} 满足 Z_ρ-择一性质。

(3) 若 $\rho = \rho^{\nabla}$，则由(2)知 ρ 是幂等的。反之，设 ρ 是幂等的，下证 $\rho^{\nabla} \subseteq \rho$。设 $x\rho^{\nabla} y$，即 $\rho^{-1}(x) \lhd_L \rho^{-1}(y)$。由 ρ 是幂等的附加序(即 ρ 是具有插入性质的附加序)，有 $\rho^{-1}(y) = \{u \in P : u\rho y\} = \bigcup_{v\rho y} \{u \in P : u\rho v\} = \bigcup_{v\rho y} \rho^{-1}(v)$；从而 $\exists v \in P$ 使 $v\rho y$ 和 $\rho^{-1}(x) \subseteq \rho^{-1}(v)$。由 ρ 是逼近的附加序，有 $x = \vee \rho^{-1}(x) \le \vee \rho^{-1}(v) = v$；因而由 $v\rho y$ 和 ρ 是附加序，有 $v\rho y$。故 $\rho^{\nabla} \subseteq \rho$。由(1)，有 $\rho = \rho^{\nabla}$。

(4) 由 Z_ρ 的定义。

定义 4.5： 设 P,Q 是偏序集。映射 $f : P \to Q$ 称为是并稠的，若 $f(P)$ 是 Q 的并生成集，即 $\forall y \in Q,\ y = \vee\left(\downarrow y \cap f(P)\right)$。

引理 4.6： 设 P 是偏序集，L 是完备格，$f : P \to L$ 是并稠序嵌入。则 f 保任意交。

证明： 设 $A \subseteq P$ 在 P 中存在下确界。由 f 是序嵌入，有 $f(\wedge A) \le \wedge f(A)$。另一方面，由 f 是并稠的，有 $\wedge f(A) = \vee\{f(p) : p \in P \text{且} f(p) \le \wedge f(A)\}$。$\forall q \in P$，若 $f(q) \le \wedge f(A)$ (即 $\forall a \in A$，$f(q) \le f(a)$)，则由 f 是序嵌入，有 $q \le \wedge A$；从而 $f(q) \le f(\wedge A)$。故 $\wedge f(A) = \vee\{f(p) : p \in P \text{且} f(p) \le \wedge f(A)\} \le f(\wedge A)$。所以 $f(\wedge A) = \wedge f(A)$。

命题 4.7： 若完备格 L 可用保任意交的映射嵌入到某完全分配格中，则 L 可用保任意交的映射并稠地嵌入到某完全分配格中。

证明： 由假设，L 可用保任意交的映射 f 嵌入到某完全分配格 L_1 中。令 L_2 为 L_1 中以 $f(L)$ 作为并生成集而生成的完备并子格，即 $L_2 = \{\vee_L B : B \subseteq f(L)\}$。则由 f 保任意交和 L_1 是完全分配格，易知 L_2 是 L_1 的完备子格，从而是完全分配的。定义映射 $g : L \to L_2$ 如下：$\forall x \in L, g(x) = f(x)$。则 g 是保任意交的嵌入，且是并稠的。

下面给出本文的主要结果。

定理 4.8 (AC) 设 P 是 Z–domain，则下述各条件等价：

(1) P 可用 Z–同态并稠地嵌入到某完全分配格中；

(2) P 可用保 Z–并映射并稠地嵌入到某完全分配格中；

(3) P 是 Z–幂等 domain；

(4) P 是 Z–正则 domain；

(5) $\exists Z^* \supseteq Z(P)$ 使 P 是 Z^*-强连续 domain；

(6) $\exists Z^* \supseteq Z(P)$ 使 P 是 Z^*-弱连续 domain，且 P 上的 Z^*-*below* 关系 $\ll_{Z^*}$ 具有插入性质。

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2)：由引理 4.6。

(1) $\Rightarrow$ (3)：设 P 可用 Z–同态 f 并稠嵌入到完全分配格 L 中。在 P 上定义一个二元关系 ρ_f 如下：

$$\forall x, y \in P, x\rho_f y \Leftrightarrow f(x) \lhd f(y) \tag{1}$$

ρ_f 称为是由 f 诱导的关系。显然 ρ_f 是 P 上的一个附加序。

(a) $\rho_f \subseteq \ll_Z$。

设 $x\rho_f y$。$\forall S\in Z(P)$，若 $y\le \vee S$，则由 f 是 Z-同态，有 $f(y)\le f(\vee S)=\vee f(S)$；从而由 $f(x)\lhd f(y)$，$\exists s\in S$ 使 $f(x)\le f(s)$。由 f 为序嵌入，有 $x\le s$。故 $x\ll_Z y$。

(b) ρ_f 是幂等的。

设 $x\rho_f y$，即 $f(x)\lhd f(y)$。由推论 2.14，$\exists t\in L$ 使 $f(x)\lhd t\lhd f(y)$。由 f 是并稠的，有 $t=\vee(\downarrow t\cap f(P))$。由引理 2.9，$\exists z\in P$ 使 $f(z)\le t$，且 $f(x)\lhd f(z)$；从而有 $x\rho_f z\rho_f y$。因而 ρ_f 具有插入性质。显然 ρ_f 是传递的。故 ρ_f 是幂等的。

(c) ρ_f 是逼近的。

设 $x\in P\backslash\downarrow y$。则由 f 为序嵌入，有 $f(x)\in L\backslash\downarrow f(y)$。由推论 2.8，$\exists t\in L$ 使 $t\lhd f(x), t\in L\backslash\downarrow f(y)$。由 f 是并稠的，$t=\vee(\downarrow t\cap f(P))$。故 $\exists u\in P$ 使 $f(u)\le t$ 且 $f(u)\in L\backslash\downarrow f(y)$；因而有 $u\rho_f x,\ u\in P\backslash\downarrow y$ (因为 f 是序嵌入)。故 ρ_f 是逼近的。

综合(a)，(b)和(c)，P 是 Z–幂等的。

(3) $\Rightarrow$ (4)：显然。

(4) $\Rightarrow$ (5)：由 P 是 Z–正则的，P 上存在一个满足 Z–择一原则的、逼近的正则附加序 $\prec$。显然 $\prec^{-1}$ 也是正则的。令 $L=\left(\Phi_{\prec^{-1}}(P),\subseteq\right)$。则由定理 3.4 和引理 4.3 的证明，知 L 是完全分配格，且 $\prec\subseteq\ll_Z$。令

$$Z^*=\left\{S\subseteq P:\vee S\text{存在, 且}\prec^{-1}(\vee S)=\prec^{-1}(S)=\bigcup_{s\in S}\prec^{-1}(s)\right\}。\tag{2}$$

则 P 是 Z^*-domain。由 $\prec$ 具有 Z–择一性质，有 $Z(P)\subseteq Z^*$。显然 P 是 Z^*- 完备的。

(a) 若 $\{S_i:i\in I\}\subseteq Z^*,\{\vee S_i:i\in I\}\in Z^*$，则 $\bigcup_{i\in I}S_i\in Z^*$。

事实上，由 $\{S_i:i\in I\}\subseteq Z^*$ 和 $\{\vee S_i:i\in I\}\in Z^*$，有 $\vee\bigcup_{i\in I}S_i=\underset{i\in I}{\vee}\vee S_i$ 存在，且

$\prec^{-1}\left(\vee\bigcup_{i\in I}S_i\right)=\prec^{-1}\left(\underset{i\in I}{\vee}\vee S_i\vee S\right)=\prec^{-1}\left(\{\vee S_i:i\in I\}\right)$ (因为 $\{\vee S_i:i\in I\}\in Z^*$) $=\bigcup_{i\in I}\prec^{-1}(\vee S_i)=\bigcup_{i\in I}\prec^{-1}(S_i)$ (因为 $\forall i\in I,S_i\in Z^*$) $=\prec^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}S_i\right)=\prec^{-1}$。故 $\bigcup_{i\in I}S_i\in Z^*$。

(b) $\prec\subseteq\ll_{Z^*}$。故 P 是 Z^*-弱连续 domain。

设 $x\prec y$。$\forall S\in Z^*$，若 $y\le\vee s$，则由 $\prec$ 是附加序和 Z^* 的定义，有 $x\prec^{-1}(\vee S)=\prec^{-1}(S)=\bigcup_{s\in S}\prec^{-1}(s)$；从而 $\exists s\in S$ 使 $x\prec s$。由 $\prec$ 是附加序，有 $x\le s$。故 $x\ll_{Z^*}y$。所以 $\prec\subseteq\ll_{Z^*}$。由 $\prec$ 是逼近的，P 是 Z^*-弱连续 domain。

(c) $\forall u,v\in P$，若 $\prec^{-1}(u)\lhd_L\prec^{-1}(v)$，则 $u\ll_{Z^*}v$。

设 $\prec^{-1}(u)\lhd_L\prec^{-1}(v)$。$\forall S\in Z^*$，若 $v\le\vee S$，则由 $\prec$ 是附加序和 Z^* 的定义，有

$\prec^{-1}(v)\subseteq\prec^{-1}(\vee S)=\prec^{-1}(S)=\bigcup_{s\in S}\prec^{-1}(s)$。由 $\prec^{-1}(u)\lhd_L\prec^{-1}(v)$，$\exists s\in S$ 使 $\prec^{-1}(u)\subseteq\prec^{-1}(s)$；从而由 $\prec$ 的逼近性，有 $u=\vee\prec^{-1}(u)\le\vee\prec^{-1}(s)=s$。故 $u\ll_{Z^*}v$。

(d) $\forall x\in P,\Downarrow_{Z^*}x\in Z^*$。

由(b)，$x=\vee\Downarrow_{Z^*}x$。下证 $\prec^{-1}(x)=\bigcup_{u\ll_{Z^*}x}\prec^{-1}(u)$。由 $L=\left(\Phi_{\prec^{-1}}(P),\subseteq\right)$ 的完全分配性，性质(c)和 $\left\{\prec^{-1}(t):t\in P\right\}$ 是 L 的并生成集，有 $\prec^{-1}(x)=\bigcup\left\{\prec^{-1}(u):u\in P\text{且}\prec^{-1}(u)\lhd_L\prec^{-1}(x)\right\}\subseteq\bigcup_{u\ll_{Z^*}x}\prec^{-1}(u)\subseteq\prec^{-1}(x)$，

即 $\prec^{-1}\left(\vee\Downarrow_{Z^*}\right)=\prec^{-1}(x)=\prec^{-1}\left(\vee\Downarrow_{Z^*}\right)$。故 $\Downarrow_{Z^*}x\in Z^*$。

(e) $\ll_{Z^*}$ 具有插入性质。

设 $x \ll_{Z^*} y$。由(d)，$\{\Downarrow_{Z^*} t : t \in \Downarrow_{Z^*} y\} \subseteq Z^*$，$\{t = \vee \Downarrow_{Z^*} t : t \in \Downarrow_{Z^*} y\} = \Downarrow_{Z^*} y \in Z^*$。由(a)，有 $\bigcup_{t \ll_{Z^*} y} \Downarrow_{Z^*} t \in Z^*$。显然 $y = \vee \bigcup_{t \ll_{Z^*} y} \Downarrow_{Z^*} t$。由 $x \ll_{Z^*} y$，$\exists t \in P$使$x \ll_{Z^*} t \ll_{Z^*} y$。由性质(b)，(d)和(e)，$P$ 是 Z^*-强连续 domain。

(5) $\Rightarrow$ (6)：显然。

(6) $\Rightarrow$ (1)：设 $\exists Z^* \supseteq Z(P)$ Z^*-弱连续 domain，且 P 上的 Z^*-*below* 关系 $\ll_{Z^*}$ 具有插入性质。显然 $\ll_{Z^*}$ 是传递的，故 $\ll_{Z^*}$ 是幂等的。因而 $\rho = \ll_{Z^*}^{-1}$ 是幂等的。令 $L = (\Phi_\rho(P), \subseteq)$。则由定理 3.4，知 L 是完全分配格。定义映射 $f : P \to L$ 如下：

$$\forall x \in P, f(x) = \rho(x) = \Downarrow_{Z^*} x \tag{3}$$

则有

(a) f 是序嵌入。

$\forall x, y \in P$，由 P 是弱 Z^*-连续的，有 $x \le y \Leftrightarrow \Downarrow_{Z^*} x \subseteq \Downarrow_{Z^*} y$。故 f 是序嵌入。

(b) f 是并稠的。

因为 $\{\rho(x) = \Downarrow_{Z^*} x : x \in P\}$ 是 $(\Phi_\rho(P), \subseteq) = \left\{\rho(A) = \Downarrow_{Z^*} A = \bigcup_{a \in A} \Downarrow_{Z^*} a : A \subseteq P\right\}$ 的并生成集，故 f 是并稠的。

(c) f 保 Z^*-并。

$\forall S \in Z^*$，由 $\ll_{Z^*}$ 具有插入性质，易知 $\Downarrow_{Z^*} \vee S = \bigcup_{s \in S} \Downarrow_{Z^*} s$。

故 $f(\vee S) = \rho(\vee S) = \Downarrow_{Z^*} \vee S = \bigcup_{s \in S} \Downarrow_{Z^*} s = \bigcup_{s \in S} f(s)$。因而 f 保 Z^*-并。

由(a)，(b)，(c)和引理 4.6，f 是 Z–同态，且是并稠嵌入。故 P 可用 Z–同态 f 并稠地嵌入到完全分配格 L 中。

推论 4.9：设 P 是 domain，则下述各条件等价：

(1) P 可用 Lawson 同态并稠地嵌入到某完全分配格中；

(2) P 可用 Scott 连续映射并稠地嵌入到某完全分配格中；

(3) P 是 $\boldsymbol{D}$ -幂等 domain；

(4) P 是 $\boldsymbol{D}$ -正则 domain；

(5) $\exists \Phi \supseteq \boldsymbol{D}(P)$ 使 P 是 Φ –强连续 domain；

(6) $\exists \Phi \supseteq \boldsymbol{D}(P)$ 使 P 是 Φ –弱连续 domain，且 P 上的 Φ –*below* 关系 $\ll_\Phi$ 具有插入性质。

由命题 4.7 和定理 4.8，有下述

推论 4.10：设 L 是完备格，则下述各条件等价：

(1) L 可用 Z–同态嵌入到某方体$[0, 1]^X$之中；

(2) L 是 Z–幂等的；

(3) L 是 Z–正则的；

(4) $\exists M^* \supseteq Z(P)$使 L 是 M^* -强连续的；

(5) $\exists M^* \supseteq Z(P)$使 L 是 M^* -弱连续的，且 L 上的 M^*-*below* 关系 $\ll_{M^*}$ 具有插入性质。

定义 4.11：设 P 是偏序集，ρ是 P 上逼近的正则附加序。令 $L = \left(\Phi_{\rho^{-1}}(P), \subseteq\right)$。映射 $f_\rho : P \to L$，$f_\rho(x) = \rho^{-1}(x) = \{u \in P : u\rho x\}$，称为是由$\rho$诱导的并稠嵌入。

注 4.12：设 P 是 Z–domain，ρ是 P 上具有 Z–择一性质的、逼近的附加序。则ρ诱导的并稠嵌入 $f_\rho : P \to L$ 保 Z–并。

证明：$\forall S \in Z(P)$，有 $f_\rho(\vee S) = \rho^{-1}(\vee S) = \{u \in P : u\rho \vee S\} = \bigcup_{s\in S}\{u \in P : u\rho \vee s\}$ (因为ρ是具有 Z–择一性质的附加序) $= \bigcup_{s\in S}\rho^{-1}(s) = \bigcup_{s\in S} f_\rho(s)$。故 $f_\rho : P \to L$ 保 Z–并。

注 4.13：若 P 上存在(具有 Z–择一性质的)逼近的正则附加序ρ，则通过ρ所诱导的(保 Z–并)映射 f_ρ，P 可并稠地嵌入到完全分配格$\left(\Phi_{\rho^{-1}}(P),\subseteq\right)$中；从而由命题 4.4，$P$ 可由(具有 Z–择一性质的)逼近的幂等附加序 ρ^∇ 诱导的(保 Z–并)映射 f_{ρ^∇} 并稠嵌入到完全分配格$\left(\Phi_{(\rho^\nabla)^{-1}}(P),\subseteq\right)$。因而，对通过逼近的附加序所诱导的映射把偏序集并稠地嵌入到某完全分配格而言，附加序的正则性要求和幂等性要求并没有本质区别。

下面的结果表明，在同构的意义下，偏序集到完全分配格的(保 Z–并的)并稠嵌入是唯一的，即只有由一些正则关系(或幂等关系)诱导的并稠嵌入。

定理 4.14：设 P 是 Z–domain，P 可用映射 f 并稠地嵌入到某完全分配格 L 中。在 P 上定义一个二元关系 ρ_f 如下：$x\rho_f y \Leftrightarrow f(x) \lhd f(y)$。则

(1) ρ_f 是逼近的幂等附加序。

(2) 存在唯一的完备格同构 $h:\left(\Phi_{(\rho_f)^{-1}}(P),\subseteq\right) \to L$ 使 $f = h\circ f_{\rho_f}$。

(3) 若 f 保 Z–并，则 ρ_f 满足 Z–择一原则，从而由 ρ_f 诱导的并稠嵌入 f_{ρ_f} 保 Z–并。

证明 (1)：由定理 4.8 中(1) $\Rightarrow$ (3)的证明。

(2)：首先证明下述性质

(a) $\forall A, B \subseteq P$，若 $\rho_f^{-1}(A) = \rho_f^{-1}(B)$，则 $\vee f(A) = \vee f(B)$。

令 $t = \vee f(A)$。由 L 是完全分配格和 f 是并稠嵌入，$t = \vee\left\{f(u) : u \in P, f(u) \lhd t\right\}$。$\forall u \in P$，若 $f(u) \lhd t$，则由引理 2.9，$\exists a \in A$ 使 $f(u) \lhd f(a)$，即 $u\rho_f a$。由 $\rho_f^{-1}(A) = \rho_f^{-1}(B)$，$\exists b \in B$ 使 $u\rho_f b$，即 $f(u) \lhd f(b) \le \vee f(B)$。故 $t = \vee f(A) \le \vee f(B)$。同理有 $\vee f(B) \le \vee f(A)$。所以 $\vee f(A) = \vee f(B)$。

由性质(a)，我们可定义一个映射 $h:\left(\Phi_{(\rho_f)^{-1}}(P),\ \subseteq\right) \to L$ 如下：

$$\forall \rho_f^{-1}(A) \in \Phi_{(\rho_f)^{-1}}(P),\ h\left(\rho_f^{-1}(A)\right) = \vee f(A) \tag{4}$$

则

(b) $f = h\circ f_{\rho_f}$。

(c) h 保任意并。

$\forall\{A_i : i \in I\} \subseteq 2^P, h\left(\bigcup_{i\in I}\rho_f^{-1}(A_i)\right) = h\left(\rho_f^{-1}\bigcup_{i\in I}(A_i)\right) = \vee f\left(\bigcup_{i\in I}(A_i)\right) = \vee_{i\in I}\vee f(A_i) = \vee_{i\in I} h\left(\rho_f^{-1}(A_i)\right)$。故 h 保任意并。

(d) 由 f 是并稠的，知 h 是满映射。

(e) h 是单射。

设 $h\left(\rho_f^{-1}(A)\right) = h\left(\rho_f^{-1}(B)\right)$，即 $\vee f(A) = \vee f(B)$，下证 $\rho_f^{-1}(A) = \rho_f^{-1}(B)$。设 $x \in \rho_f^{-1}(A)$，则 $\exists a \in A$ 使 $x\rho_f a$，即 $f(x) \lhd f(a)$；从而 $f(x) \lhd f(a) \le \vee f(A) = \vee f(B)$。由引理 2.9，$\exists b \in B$ 使 $f(x) \lhd f(b)$，即 $x\rho_f b$。因而 $x \in \rho_f^{-1}(b) \subseteq \rho_f^{-1}(B)$。故 $\rho_f^{-1}(A) \subseteq \rho_f^{-1}(B)$。同理有 $\rho_f^{-1}(B) \subseteq \rho_f^{-1}(A)$。故 $\rho_f^{-1}(A) = \rho_f^{-1}(B)$。所以 h 是单射。

由(b)~(e)，$h:\left(\Phi_{(\rho_f)^{-1}}(P),\subseteq\right) \to L$ 是格同态，且 $f = h\circ f_{\rho_f}$。设 $\varphi:\left(\Phi_{(\rho_f)^{-1}}(P),\ \subseteq\right) \to L$ 是满足

$f=\varphi\circ f_{\rho_f}$ 的另一个格同态。则 $\forall x\in P$，有 $\varphi\circ f_{\rho_f}(x)=\varphi\left(\rho_f^{-1}(x)\right)=f(x)$。故 $\forall\rho_f^{-1}(A)\in\Phi_{(\rho_f)^{-1}}(P)$，有 $\varphi\left(\rho_f^{-1}(A)\right)=\varphi\left(\bigcup_{a\in A}\rho_f^{-1}(a)\right)=\bigvee_{a\in a}\varphi\left(\rho_f^{-1}(a)\right)=\bigvee_{a\in a}f(a)=\vee f(A)=h(A)$。即有 $\varphi=h$。故满足条件 $f=h\circ f_{\rho_f}$ 的格同构 $h:\left(\Phi_{(\rho_f)^{-1}}(P),\subseteq\right)\to L$ 是唯一的。

(3) 设 f 保 Z–并。下证 ρ_f 满足 Z–择一原则。$\forall x\in P,S\in Z(P)$，若 $x\rho_f\vee S$，即 $f(x)\lhd f(\vee S)$，则由 f 保 Z–并，有 $f(x)\lhd f(\vee S)=\vee f(S)$；从而由引理 2.9，$\exists s\in S$使$f(x)\lhd f(s)$，即 $x\rho_f s$。故 ρ_f 具有 Z–择一性质。由注 4.12，由 ρ_f 诱导的并稠嵌入 f_{ρ_f} 保 Z–并。

基金项目

国家自然科学基金(No. 11161023)，“赣鄱英才 555 工程”领军人才培养计划和江西省自然科学基金(No. 20114BAB201008)。

参考文献 (References)

[1] Raney, G.N. (1953) A subdirect-union representation for completely distributive complete lattices. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **4**, 518-522. http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1953-0058568-4

[2] Raney, G.N. (1960) Tight Galois connections and complete distributivity. *Transactions of the American Mathematical Society*, **97**, 418-426. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-1960-0120171-3

[3] Bruns, G. (1961) Distributivität und subdirekte Zerlegbarkeit vollständiger Vergände. *Archiv der Mathematik*, **12**, 418-426.

[4] Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M. and Scott, D.S. (1980) A compendium of continuous lattices. Springer Verlag. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-67678-9

[5] Lawson, J.D. (1969) Topological semilattices with small semilattices. *Journal London Mathematical Society*, **2**, 719-724. http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s2-1.1.719

[6] Bandelt, H.J. and Erné, M. (1984) Representations and embeddings of *M*-distributive lattices. *Houston Journal of Mathematics*, **10**, 315-324.

[7] Xu, X.Q. (1995) Construction of homomorphisms of M-continuous lattices. *Transactions of the American Mathematical Society*, **347**, 3167-3175.

[8] 徐晓泉 (1995) M-连续格到 Hilbert 方体的嵌入. *数学学报*, **38**, 827-830.

[9] Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M. and Scott, D.S. (2003) Continuous lattices and domains. Cambridge University Press, Cambridge. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511542725

[10] Xu, X.Q. (1995) Embeddings of Z–domains in cubes. In: Fuzzy Logic and its Applications, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 333-342. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-0125-4_33

[11] Zareckiĭ, K.A. (1963) The semigroup of binary relations. *Matematicheskii Sbornik*, **61**, 291-305.

[12] Markowsky, G. (1972) Idempotents and product representations with applications to the semigroup of binary relations. *Semigroup Forum*, **5**, 95-119. http://dx.doi.org/10.1007/bf02572880

[13] Schein, B.M. (1976) Regular elements of the semigroup of all binary relations. *Semigroup Forum*, **13**, 95-102. http://dx.doi.org/10.1007/BF02194925

[14] Bandelt, H.J. (1980) Regularity and complete distributivity. *Semigroup Forum*, **19**, 123-126. http://dx.doi.org/10.1007/BF02572509

[15] Bandelt, H.J. (1982) On regularity classes of binary relations. In: *Universal Algebra and Applications*, Banach Center Publications, Vol. 9, PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 329-333.

[16] Yang, J.C. (1969) A theorem on the semigroup of binary relations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **22**, 134-135. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-1969-0241557-6

[17] Xu, X.Q. and Liu Y.M. (2003) Relational representations of hypercontinuous lattices. In: *Domain Theory, Logic, and Computation*, Kluwer Academic Publishers, 65-74. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-017-1291-0_3

[18] Xu, X.Q. and Liu Y.M. (2004) Regular relations and strictly completely regular ordered spaces. *Topology and Its Applications*, **135**, 1-12. http://dx.doi.org/10.1016/S0166-8641(03)00108-1

[19] Xu, X.Q. and Liu Y.M. (2004) Regular relations and monotone normal ordered spaces. *Chinese Ann. of Math*., **25B**, 157-164. http://dx.doi.org/10.1142/S0252959904000160

[20] Xu, X.Q. and Luo M.K. (2006) Regular relations and normality of topologies. *Semigroup Forum*, **72**, 477-480. http://dx.doi.org/10.1007/s00233-004-0179-0

[21] 徐晓泉，刘应明 (2008) 正则关系与完全正则空间. *数学年刊*, **29A**, 819-828.

[22] 徐晓泉，罗懋康 (2009) 正则关系与正规空间. *数学学报*, **52**, 393-402.

[23] Baranga, A. (1996) Z-continuous posets. *Discrete Mathematics*, **152**, 33-45. http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X(94)00307-5