Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5(5), 233-237
Published Online September 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55033

Hans汉斯

Properties of the Solution of the Nonlinear Difference Equation $x_n = qx_{n-1}^{-1} + px_{n-2}$

Wei Feng[1], Yuchen Feng[2]

[1]School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing
[2]Beijing No. 4 High School, Beijing
Email: wfeng_323@buaa.edu.cn, karlfeng1997@163.com

Received: Sep. 5th, 2015; accepted: Sep. 22nd, 2015; published: Sep. 25th, 2015

Abstract

In this paper, we obtain one sufficient condition of the boundedness of equation $x_n = qx_{n-1}^{-1} + px_{n-2}$, and discuss the convergence of the solution of equation and the sufficient and necessary condition of existence of the periodic point with period 2 of the equation.

Keywords

Difference Equation, Nonlinear, Boundedness, Convergence

非线性差分方程$x_n = qx_{n-1}^{-1} + px_{n-2}$解的性态

冯　伟[1]，冯宇辰[2]

[1]北京航空航天大学数学与系统科学学院，北京
[2]北京四中，北京
Email: wfeng_323@buaa.edu.cn, karlfeng1997@163.com

收稿日期：2015年9月5日；录用日期：2015年9月22日；发布日期：2015年9月25日

摘　要

本文给出了差分方程$x_n = qx_{n-1}^{-1} + px_{n-2}$解的有界性的一个充分性条件，同时探讨了解了收敛性及二周期

文章引用: 冯伟, 冯宇辰. 非线性差分方程$x_n = qx_{n-1}^{-1} + px_{n-2}$解的性态[J]. 理论数学, 2015, 5(5): 233-237.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55033

点存在的充分必要条件。

关键词

差分方程，非线性，有界性，收敛性

1. 引言

阶数 $k>1$ 的非线性差分方程：

$$x_n = F\left(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_{n-k}\right),\ \ n = 1, 2, \cdots \tag{1}$$

的全局行为在过去的几十年中备受人们关注。一般对此方程的研究前提是 F 和初始值集合 $\{x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_{n-k}\}$ 给定。到目前为止该领域的理论研究仍处在未成熟阶段，大多数成果是在 F 为有理式的情况下获得的。目前已获理论成果，详见文献[1]，国内李先义和朱德明在差分方程领域给出了一些很好的结果[2]。

本文研究非线性差分方程：

$$x_n = qx_{n-1}^{-1} + px_{n-2}\ \left(n \in N\right) \tag{2}$$

其初值为 x_0, x_{-1}，并且 p, q, x_0, x_{-1} 均为正值，$N = \{1, 2, \cdots\}$。

对于一般的差分方程(1)，若 F 是连续可导函数，我们可以得出其线性化方程：

$$Z_n = P_1 Z_{n-1} + \cdots + P_k Z_{n-k},\ \ \ n = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

这里 $P_i = \dfrac{\partial F}{\partial U_i}\left(\bar{X}, \bar{X}, \cdots, \bar{X}\right)$，$\left(\bar{X}, \bar{X}, \cdots, \bar{X}\right)$ 是方程(1)的平衡点。

一般可通过线性化方程(3)的特征方程 $\lambda^k - P_1\lambda^{k-1} - \cdots - P_k = 0$ 的特征根的情况来判断该平衡点的稳定性[3]。但方程(2)的线性化方程：

$$x_n = \left(1-p\right)x_{n-1} + px_{n-2}$$

的特征方程：

$$\lambda^2 - \left(1-p\right)\lambda - p = 0$$

的特征根为 1 与 $-p$，因此不能通过该方法判断该平衡点的稳定性。

由文献[4] [5]，我们做变换 $y_n = x_n x_{n-1}$，将方程(2)转化线性差分方程

$$y_n = py_{n-1} + q \tag{4}$$

我们通过研究(4)来获得方程(2)的性质。

2. 主要结论

定理 1：方程(2)存在二周期点的充分必要条件为 $x_0 x_{-1} = \dfrac{q}{1-p}$。

证明：

必要性：假定方程有一个二周期点，则 $x_0 = x_2$，可得方程 $x_0 = qx_1^{-1} + px_0$，变形得 $x_0 x_{-1} = \dfrac{q}{1-p}$。

充分性：因为 $x_0 x_{-1} = \dfrac{q}{1-p}$，所以：

$$x_1 = qx_0^{-1} + px_{-1} = x_{-1}\left(q\frac{1}{x_0x_{-1}} + p\right) = x_{-1}\left(q\frac{1-p}{q} + p\right) = x_{-1}$$

$$x_2 = qx_1^{-1} + px_0 = x_0\left(q\frac{1}{x_0x_1} + p\right) = x_0\left(q\frac{1}{x_0x_{-1}} + p\right) = x_0\left(q\frac{1-p}{q} + p\right) = x_0$$

同理可得 $x_0 = x_2 = x_4 = \cdots = x_{2n}$， $x_{-1} = x_1 = x_3 = \cdots = x_{2n-1}$。故 $x_0x_{-1} = \frac{q}{1-p}$ 是方程有二周期点的充分必要条件。证毕。

定理 2：当 $0 < p < 1$ 时，方程(4)的解全局收敛于其平衡点 $\frac{q}{1-p}$，且当其初值 y_0 大于 $\frac{q}{1-p}$ 时，其解单调递减收敛于 $\frac{q}{1-p}$，当其初值 y_0 小于 $\frac{q}{1-p}$ 时，其解单调递增收敛于 $\frac{q}{1-p}$。

证明：

假定方程(4)有一个平衡点 $\bar{y}$，则 $\bar{y} = p\bar{y} + q$， 求解得 $\bar{y} = \frac{q}{1-p}$。

由(4)得， $y_n = p^n y_0 + q\frac{1-p^n}{1-p}$。 当 $0 < p < 1$， $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{q}{1-p} = \bar{y}$。

因为： $y_n - y_{n-1} = p^n y_0 + q\sum\limits_{m=0}^{n-1} p^m - \left(p^{n-1}y_0 + q\sum\limits_{m=0}^{n-2} p^m\right) = (p-1)p^{n-1}y_0 + qp^{n-1} = p^{n-1}(1-p)\left(\frac{q}{1-p} - y_0\right)$。

所以，当 $y_0 < \frac{q}{1-p}$ 时，$\{y_n\}$ 相邻两项之差恒大于 0，方程(4)的解单调递增。又因方程(4)的 y_n y_n 趋向于 $\frac{q}{1-p}$，所以 $y_0 < \frac{q}{1-p}$ 时方程(4)的解单调递增收敛于 $\frac{q}{1-p}$。

同理可得 $y_0 > \frac{q}{1-p}$ 时，方程(4)的解单调递减收敛于 $\frac{q}{1-p}$。证毕。

定理 3：当 $0 < p < 1$ 时，如果初值 y_0 大于 $\frac{q}{1-p}$，方程(2)的解构成的数列 $\{x_0, x_2, x_4, \cdots\}$，$\{x_{-1}, x_1, x_3, \cdots\}$ 是单减数列，如果初值 y_0 小于 $\frac{q}{1-p}$， $\{x_0, x_2, x_4, \cdots\}$， $\{x_{-1}, x_1, x_3, \cdots\}$ 是单增数列。

证明：

当 $y_0 < \frac{q}{1-p}$ 时，y_n 单增，$y_0 < y_1 < \cdots < y_n$。又因 $y_n = x_n x_{n-1}$，故 $x_0x_{-1} < x_1x_0$，$x_1x_0 < x_2x_1$，$x_2x_1 < x_3x_2$，$x_3x_2 < x_4x_3$，$\cdots$，$x_{n-2}x_{n-1} < x_{n-1}x_n$。划去各个不等式两边相同的项，可得 $x_0 < x_2 < x_4 < \cdots$，$x_1 < x_3 < x_5 < \cdots$。所以 $\{x_{-1}, x_1, x_3, \cdots\}$ 和 $\{x_0, x_2, x_4, \cdots\}$ 是单增数列。

同理可得 $y_0 > \frac{q}{1-p}$ 时， $\{x_{-1}, x_1, x_3, \cdots\}$ 和 $\{x_0, x_2, x_4, \cdots\}$ 是单减数列。证毕。

定理 4：方程(2)的解构成的数列 $\{x_{2n}\}$ 有界等价于 $\{x_{2n-1}\}$ 有界。

证明：

设 $\{x_{2n}\}$ **有界**，由定理 3，知 $\{x_{2n}\}$ 单调，故 $\{x_{2n}\}$ 收敛于实数 A。当 $\{x_{2n}\}$ 单增时， $A > 0$。又因为 $x_{2n} = qx_{2n-1}^{-1} + px_{2n-2}$， 所以 $x_{2n-1} = \frac{q}{x_{2n} - px_{2n-2}}$ 收敛于 $\frac{q}{A(1-p)}$， 所以 $\{x_{2n-1}\}$ 有界。当 $\{x_{2n}\}$ 单减时，由定理 3 知 $\{x_{2n-1}\}$ 单减。由方程(2)的结构，如果初值非负，显然方程(2)的解是一个正数列。所以 $\{x_{2n-1}\}$ 有界。

同理可证如果$\{x_{2n-1}\}$有界，则$\{x_{2n}\}$有界。证毕。

定理 5：$0<p<1$时，(2)的解有界。

证明：

由定理 3，$\{x_{2n-1}\}$与$\{x_{2n}\}$有相同的单调性。

当$\{x_{2n-1}\}$与$\{x_{2n}\}$都单减时，又由于它们都是正数列，故有界。

当$\{x_{2n-1}\}$与$\{x_{2n}\}$都单增时，如果它们之一无界，由定理 4，则另一个也无界，故$x_0x_{-1},x_1x_0,x_2x_1,x_3x_2,\cdots$，即方程（4）的解$y_0,y_1,y_2,y_3,\cdots$也无界。由定理 2

这不可能，故$\{x_{2n-1}\}$与$\{x_{2n}\}$有界。

注 1：从定理 3 和定理 5 知道，方程(2)的解形成的数列$\{x_{2n-1}\}$与$\{x_{2n}\}$收敛。进一步，这两个数列收敛的极限的乘积趋近于常数$\dfrac{q}{1-p}$，这个常数是方程(2)任意两个二周期点的乘积。换言之，结合定理 1 知，方程(2)的任何解或者是一个二周期点，或者收敛于一个二周期点。

定理 6. 对于$x_0>0,x_{-1}>0$，方程(2)的解$\{x_n\}$构成的二维序列

$\{(x_{-1},x_0),(x_0,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4),\cdots\}$收敛于双曲线$x_{2n}x_{2n-1}=\dfrac{q}{1-p}$正的一支。

证明：在平面直角坐标系下，做点$(x_{-1},x_0),(x_0,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4),\cdots$。

由定理 2 得方程(4)的解一定收敛于$\dfrac{q}{1-p}$。又因$y_n=x_nx_{n-1}$，所以方程(2)的解中相邻两项之积必定收敛于$\dfrac{q}{1-p}$，即最后得出的点(x_n,x_{n-1})必定收敛于双曲线$x_{2n}x_{2n-1}=\dfrac{q}{1-p}$。又$\{x_n\}$是正数列，故必收敛于位于第一象限那一支，参见图 1，图 2。证毕。

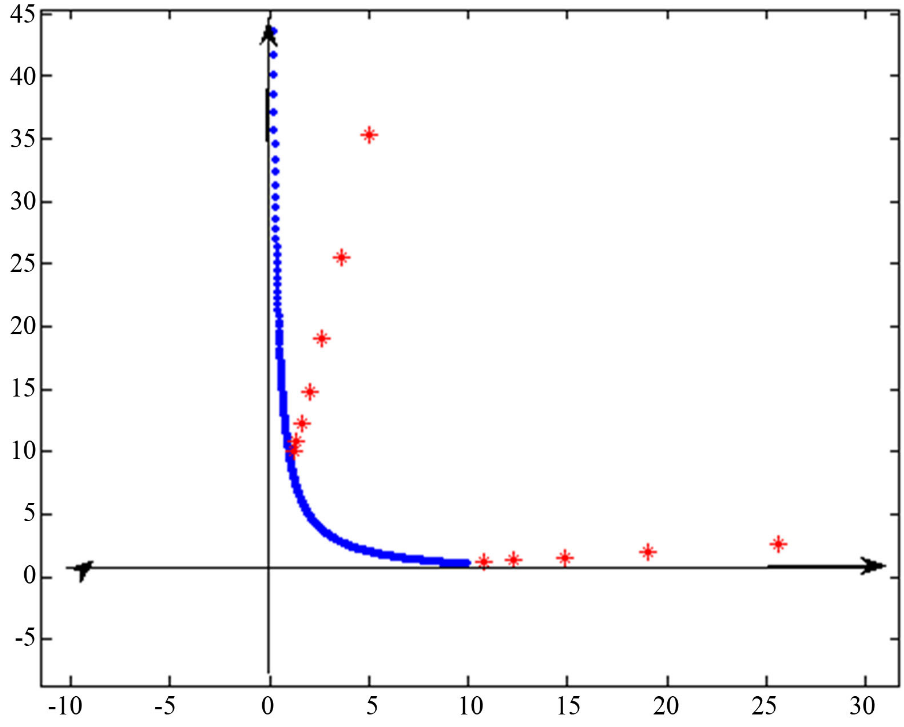

Figure 1. Convergence in the hyperbolic from above
图 1. 从双曲线上方收敛于双曲线

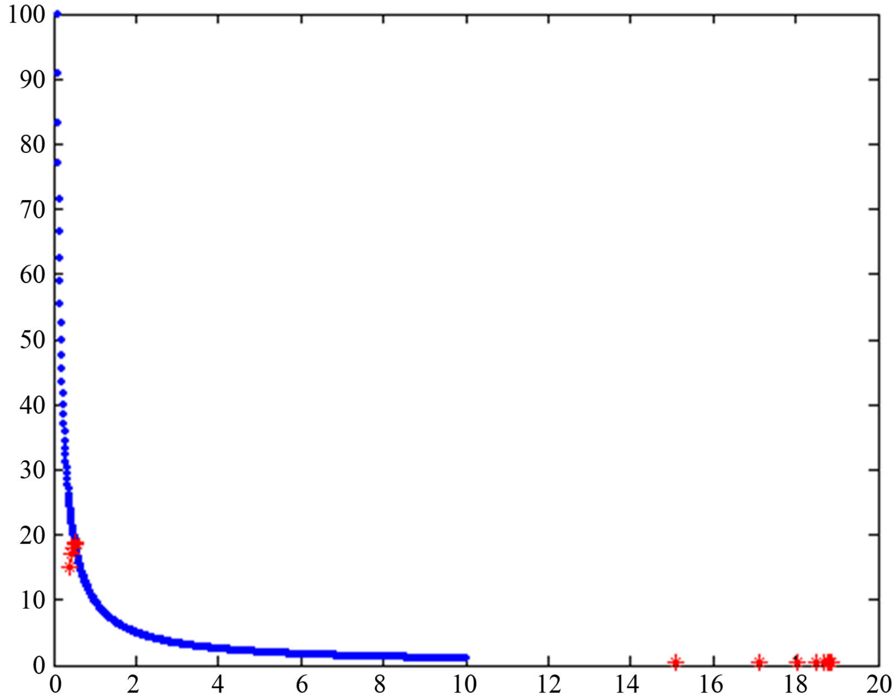

Figure 2. Convergence in the hyperbolic from below
图 2. 从双曲线下方收敛于双曲线

注 2：虽然方程(2)的解是有界的，但不是一致有界的，这由定理 3 及一致有界的定义容易给出，故略去细节。

基金项目

本项目由中央高校基本科研业务费专项资金资助。

参考文献 (References)

[1] Kocic, V.L. and Ladas, G. (1993) Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. Kluwer Academic Publishers, Norwell. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-017-1703-8

[2] Li, X.Y. and Zhu, D.M. (2003) Two rational recursive sequences. *Journal of Difference Equations and Applications*, **9**, 833-839.

[3] Wang, J.L., Cai, H.T. and Feng, W. (2009) Dynamics of the difference equation $x_n = \alpha + \beta \dfrac{x_{n-q}}{x_{n-2q}}$. *Journal of Shanxi University* (*Natural Science Edition*), **32**, 1-4

[4] Stevic, S. (2011) On the difference equation $x_n = x_{n-2}/(b_n + c_n x_{n-1} x_{n-2})$. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 4507-4513. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2011.10.032

[5] Duan, L.Y., Lun, D. and Deng, S.G. (2013) On boundedness of the nonlinear difference equation $x_n = qx_{n-1}^{-1} + px_{n-2}$. *Pure Mathematics*, **3**, 254-256. http://dx.doi.org/10.12677/PM.2013.34039