Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5(5), 167-170
Published Online September 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55025

On Abelian Hall π-Subgroups

Tao Xu

Department of Science, Hebei University of Engineering, Handan Hebei
Email: gtxutao@163.com

Received: Aug. 10th, 2015; accepted: Aug. 28th, 2015; published: Sep. 1st, 2015

Abstract

Let G be a finite group and H an abelian Hall π-subgroup of G. Then, there exists $g \in G$ such that $O_\pi(G) = H \cap H^g$. It generalizes Brodkey's result. In addition, the properties of π-separable groups with Abelian Hall π-subgroup are discussed.

Keywords

Sylow p-Subgroup, Hall π-Subgroup, π- Separable Group

关于阿贝尔Hall π-子群

徐　涛

河北工程大学理学院，河北 邯郸
Email: gtxutao@163.com

收稿日期：2015年8月10日；录用日期：2015年8月28日；发布日期：2015年9月1日

摘　要

设G是一个有限群，H是G的一个阿贝尔Hall π-子群，则存在 $g \in G$，使得$O_\pi(G) = H \cap H^g$。本文推广了Brodkey的结果。另外讨论了具有阿贝尔Hall π-子群的π-可分群的性质。

文章引用：徐涛．关于阿贝尔 Hall π-子群[J]．理论数学, 2015, 5(5): 167-170. http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55025

关键词

Sylow *p*-子群，Hall *π*-子群，*π*-可分群

1. 具有阿贝尔 Hall π-子群的有限群

本文采用的符号和术语都是标准的，按照文[1]。文中所涉及的群都是有限群。

Brodkey 在文[2]中证明了下面的命题。

命题 1：设 G 是一个有限群，G 有一个阿贝尔 Sylow p-子群，则存在 $P,Q\in Sylow_p(G)$，使得 $O_p(G)=P\cap Q$。

设 π 是有限多个素数的集合，我们把上述结果推广到有限群的 Hall π-子群，得到下面的定理。

定理 1：设 G 是一个有限群，H 是 G 的一个阿贝尔 Hall π-子群，则存在 $g\in G$，使得 $O_\pi(G)=H\cap H^g$。

为了完成定理 1 的证明，我们需要下面的引理。

引理 1：设有限群 G 包含一个幂零 Hall π-子群，如果 M 是 G 的所有 Hall π-子群中两两相交最小的，记 $M=H_1\cap H_2$，其中 H_1，H_2 是 G 的 Hall π-子群，则 $O_\pi(G)$ 是 M 中正规于 H_1 且正规于 H_2 的所有子群中最大的。

证明：任取 $K\le M$ 且 $K\lhd H_1$，$K\lhd H_2$。只需证 $K\le O_\pi(G)$ 即可。即证对于 G 的任意 Hall π-子群 H，都有 $K\le H$。考虑 K 的正规化子 $N_G(K)$。明显地，$H_1\le N_G(K)$。因此 H_1 是 $N_G(K)$ 的幂零 Hall π-子群。而 $H\cap N_G(K)$ 是 $N_G(K)$ 的一个 π-子群。由文[1]的定理 9.1.10 知道存在某个 $g\in N_G(K)$，使得 $H\cap N_G(K)\le H_1^g$。注意到 $H_2\le N_G(K)$，于是任取 $h_2\in H_2$，有 $K^{h_2}=K$。从而 $K^{g^{-1}h_2g}=K$，因此 $H_2^g\le N_G(K)$。所以

$$M^g=(H_1\cap H_2)^g=H_1^g\cap H_2^g\ge\left(H\cap N_G(K)\right)\cap H_2^g=H\cap\left(N_G(K)\cap H_2^g\right)=H\cap H_2^g$$

进而

$$M=\left(M^g\right)^{g^{-1}}\ge\left(H\cap H_2^g\right)^{g^{-1}}=H^{g^{-1}}\cap H_2$$

根据文[1]的定理 9.1.10 得到 $H^{g^{-1}}$ 是 G 的 Hall π-子群。故由 M 的极小性知 $M=H^{g^{-1}}\cap H_2$。因此 $K\le M\le H^{g^{-1}}$。从而 $K^g\le H$。注意到 $g\in N_G(K)$，于是 $K=K^g\le H$。证毕。

定理 1 的证明：因为 G 的 Hall π-子群 H 是阿贝尔群，所以根据文[1]的定理 9.1.10 得到 G 的 Hall π-子群都共轭于 H。于是存在某个 $g\in G$，使得 $H\cap H^g$ 是 G 的所有 Hall π-子群中两两相交最小的。注意到 H 和 H^g 都是阿贝尔群，因此由引理 1 得到 $H\cap H^g\le O_\pi(G)$。又 $O_\pi(G)\le H\cap H^g$，故存在某个 $g\in G$，使得 $O_\pi(G)=H\cap H^g$。

推论 1：设有限群 G 包含一个幂零 Hall π-子群，则存在 G 的 Hall π-子群 H，K，使得 $\zeta H\cap\zeta K\le O_\pi(G)$。

证明：设 M 是 G 的任意两个 Hall π-子群之交中最小的。记 $M:=H\cap K$，其中 H，K 是 G 的 Hall π-子群。显然 $\zeta H\cap\zeta K\le M$ 且 $\zeta H\cap\zeta K\lhd H$，$\zeta H\cap\zeta K\lhd K$。由引理 1 知 $\zeta H\cap\zeta K\lhd O_\pi(G)$。

由推论 1 可以自然地得到下面的推论 2。

推论 2：设有限群 G 包含一个幂零 Hall π-子群且 $O_\pi(G)=1$，则存在 G 的 Hall π-子群 H，K，使得 $\zeta H\cap\zeta K=1$。

注意到 $O_\pi\left(G/O_\pi(G)\right)=1$，应用推论 2 直接得到推论 3。

推论 3: 设有限群 G 包含一个幂零 Hall π-子群,则存在 $G/O_\pi(G)$ 的 Hall π-子群 $H/O_\pi(G)$,$K/O_\pi(G)$,使得 $\varsigma\left(H/O_\pi(G)\right)\cap\varsigma\left(K/O_\pi(G)\right)=1$。

推论 4: 设 G 是一个有限群,H 是 G 的一个阿贝尔 Hall π-子群,则 $\left|G:O_\pi(G)\right|\le\left|G:H\right|^2$。

证明: 设 K 是 G 的一个 Hall π-子群,由文[1]的定理 9.1.10 知 H 和 K 是共轭的,故 K 是阿贝尔群。由定理 1 可得存在某个 $g\in G$,使得 $O_\pi(G)=K\cap K^g$。由文[3]的定理 1.18 知:

$$\left|KK^g\right|=\frac{|K|\left|K^g\right|}{\left|K\cap K^g\right|}$$

因此

$$|G|\ge\left|KK^g\right|=\frac{|K|\left|K^g\right|}{\left|K\cap K^g\right|}=\frac{|H|^2}{\left|O_\pi(G)\right|}$$

从而

$$\frac{|G|}{|H|^2}\ge\frac{1}{\left|O_\pi(G)\right|}$$

进而 $\left|G:O_\pi(G)\right|\le\left|G:H\right|^2$。

推论 5: 设 G 是一个有限群,H 是 G 的一个阿贝尔 Hall π-子群且 $|H|^2>|G|$,则 $O_\pi(G)>1$。

证明: 由推论 4 知 $\left|G:O_\pi(G)\right|\le\left|G:H\right|^2$。因为 $|H|^2>|G|$,所以 $\left|G:O_\pi(G)\right|<|G|$,因此 $O_\pi(G)>1$。

推论 6: 设 G 是一个有限群,H 是 G 的一个阿贝尔 Hall π-子群,如果 $|H|=m$,$\left|O_\pi(G)\right|=n$ 且 $m\ne n$,那么 $|G|\ge m\left(\frac{m}{n}+1\right)$。特别地,若 $O_\pi(G)=1$,则 $|G|\ge m(m+1)$。

证明: 由定理 1 知存在某个 $g\in G-H$,使得 $O_\pi(G)=H\cap H^g$ (如果 $g\in H$,则 $O_\pi(G)=H$,这就矛盾于 $m\ne n$。考虑 $O_\pi(G)$ 在 H^g 中的右陪集。

$$H^g=\bigcup_{i=1}^{\frac{m}{n}}O_\pi(G)g^{-1}x_ig\text{,其中 } x_i\in H$$

因此 $H^{g^{-1}x_ig}\left(1\le i\le\frac{m}{n}\right)$ 是 H 的不同的共轭类。又 $H^{g^{-1}x_ig}\ne H^g$,因此 H 在 G 中的共轭类至少有 $\frac{m}{n}+1$ 个。故

$$|G|\ge\left|N_G(H)\right|\left(\frac{m}{n}+1\right)\ge|H|\left(\frac{m}{n}+1\right)=m\left(\frac{m}{n}+1\right)。$$

注记: 在推论 6 的条件下,根据推论 4 我们可以得到 $|G|\ge\frac{|H|^2}{\left|O_\pi(G)\right|}=\frac{m^2}{n}$。但是不难发现这一结果不如推论 6 得到的结果好。

2. 具有阿贝尔 Hall π-子群的 π-可分群

下面是具有阿贝尔 Hall π-子群的 π-可分群的两个定理。首先给出定理中涉及到的符号和需要的引理。

对任意的有限群 G,我们用 $O_{\pi'\pi}(G)$ 表示 $O_\pi\left(G/O_{\pi'}(G)\right)$ 在 G 中的原像。类似地,$O_{\pi'\pi\pi'}(G)$ 表示 $O_{\pi'}\left(G/O_{\pi'\pi}(G)\right)$ 在 G 中的原像。

引理 2 [4]: 设 G 是一个 π-可分群,$O_{\pi'}(G)=1$,则 $C_G\left(O_\pi(G)\right)\le O_\pi(G)$。

定理 2: 设 G 是一个 π-可分群,H 是 $O_{\pi'\pi}(G)$ 的一个阿贝尔 Hall π-子群,如果 $O_{\pi'}(G)=1$,则 H 是 G 的极大正规 π-子群,$C_G(H)=H$ 且 $|G:H|$ 整除 $(|H|-1)!$。

证明：由定义知道$O_{\pi'\pi}(G)=O_{\pi}(G)$。这表明$O_{\pi'\pi}(G)$是$\pi$-群，因此

$$H=O_{\pi}(G)=O_{\pi'\pi}(G)$$

从而H是G的极大正规π-子群。由引理 2 知$C_G(H)\le H$。又H是阿贝尔群，故$H\le C_G(H)$。因此$C_G(H)=H$。进一步，$G/H=G/C_G(H)\le AutH$。所以$|G:H|$整除$(|H|-1)!$。证毕。

定理 3：设G是一个π-可分群，H是$O_{\pi'\pi}(G)$的一个 Hall π-子群，如果G有阿贝尔 Hall π-子群，那么$G=O_{\pi'\pi\pi'}(G)$。

证明：断言$C_G(H)\le O_{\pi'\pi}(G)$。如果$O_{\pi'}(G)=1$，则有$O_{\pi'\pi}(G)$的定义知道

$$O_{\pi}(G)=O_{\pi'\pi}(G)=H$$

再由引理 2 知$C_G(O_{\pi}(G))\le O_{\pi}(G)$可得$C_G(H)\le O_{\pi'\pi}(G)$。如果$O_{\pi'}(G)>1$，对$|G|$进行归纳。记$\bar{G}:=G/O_{\pi'}(G)$。由归纳假设知$C_{\bar{G}}(\bar{H})\le O_{\pi'\pi}(\bar{G})$。注意到$O_{\pi'}(\bar{G})=1$，因此

$$\begin{aligned}O_{\pi'\pi}(\bar{G})&=O_{\pi'\pi}(\bar{G})/O_{\pi'}(\bar{G})=O_{\pi}(\bar{G}/O_{\pi'}(\bar{G}))=O_{\pi}(\bar{G})\\&=O_{\pi}(G/O_{\pi'}(G))=O_{\pi'\pi}(G)/O_{\pi'}(G)\end{aligned}$$

又$C_{\bar{G}}(\bar{H})=\overline{C_G(H)}$。所以$\overline{C_G(H)}\le O_{\pi'\pi}(G)/O_{\pi'}(G)$。故$C_G(H)\le O_{\pi'\pi}(G)$。断言成立。

设N是G的包含H的阿贝尔 Hall π-子群。明显地，$N\le C_G(H)$。由上述断言知$N\le O_{\pi'\pi}(G)$。又H是$O_{\pi'\pi}(G)$的 Hall π-子群，故$H=N$。即$O_{\pi'\pi}(G)$包含G的 Hall π-子群。因此$G/O_{\pi'\pi}(G)$是π'-群。进而

$$G/O_{\pi'\pi}(G)=O_{\pi'}(G/O_{\pi'\pi}(G))=O_{\pi'\pi\pi'}(G)/O_{\pi'\pi}(G)$$

所以$G=O_{\pi'\pi\pi'}(G)$。证毕。

注意到有限可解群是π-可分群，下面的推论是显然的。

推论 7：设G是一个有限可解群，对任意素数集合π，H是$O_{\pi'\pi}(G)$的一个 Hall π-子群，如果G有阿贝尔 Hall π-子群，则$G=O_{\pi'\pi\pi'}(G)$。

基金项目

国家自然科学基金(11371124)，河北省自然科学基金(F2015402033)和河北工程大学博士基金资助项目。

参考文献 (References)

[1] Robinson, D.J.S. (1996) A course in the theory of groups. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-8594-1

[2] Brodkey, J.S. (1963) A note on finite groups with an Abelian Sylow groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **14**, 132-133. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-1963-0142631-X

[3] 徐明曜(1999) 有限群导引. 科学出版社, 北京.

[4] Isaacs, M.I. (2008) Finite group theory. American Mathematical Society, Providence. http://dx.doi.org/10.1090/gsm/092