Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(1), 56-64
Published Online January 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.61009

Hans汉斯

Exploration on the Nature of Solutions for a Differential Equation of Fractional Order

Shiyou Lin[1], Jie Ren[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University, Haikou Hainan
[2]Li'an Junior High School, Lingshui Hainan
Email: linsy1111@foxmail.com, 348723752@qq.com

Received: Dec. 30th, 2015; accepted: Jan. 24th, 2016; published: Jan. 29th, 2016

Abstract

We prove existence and uniqueness of the solution of a nonlinear differential equation of fractional order. The differential operator is the Caputo fractional derivative. For the solvability of the equation is equivalent to a class of Volterra integral equation, we study the existence and uniqueness of the integral equation. We prove the existence of the solution of integral equation by Schauder fixed point theorem and the uniqueness of the solution by contraction mapping principle.

Keywords

Differential Equation of Fractional Order, Caputo Derivative, Schauder Fixed Point Theorem, Contraction Mapping Principle

一类分数阶微分方程解的性质探讨

林诗游[1]，任　洁[2]

[1]海南师范大学数学与统计学院，海南　海口
[2]黎安初级中学，海南　陵水
Email: linsy1111@foxmail.com, 348723752@qq.com

收稿日期：2015年12月30日；录用日期：2016年1月24日；发布日期：2016年1月29日

文章引用：林诗游，任洁．一类分数阶微分方程解的性质探讨[J]．理论数学, 2016, 6(1): 56-64.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.61009

摘　要

本文主要证明了一类分数阶非线性微分方程解的存在性和唯一性。文中用到的微分算子是Caputo分数阶微分算子。因这类方程的可解性是与一类Volterra型的积分方程的可解性等价，所以我们主要研究了与之等价的积分方程解的存在性和唯一性。我们通过Schauder不动点定理证明了积分方程解的存在性，用压缩映象原理证明了解的唯一性。

关键词

分数阶微分方程，Caputo微分，Schauder不动点定理，压缩映象原理

1. 背景介绍

尽管分数阶微积分的概念几乎是与整数阶微积分同时出现的，但在过去很长时间内，由于缺乏实际应用背景的促进而发展缓慢。直至近年，由于在物理，化学，生物等领域的广泛应用(参看[1]-[4])，分数阶微分方程已成为数学领域中值得深入研究的重要方程之一。许多学者(参看[5]-[8])都研究过分数阶微分方程的性质，并取得了可观的收获。例如，Delbosco 和 Rodino [7]以及 El-Sayed [8]证明了下面这个非线性分数阶微分方程的解的存在性和唯一性定理：

$$D^{\alpha}=f(t,y),\ 0<\alpha<1.$$

这里的 D^{α} 是黎曼－刘维尔分数阶微分。

Diethelm 和 Ford [6]深入研究过下面的分数阶微分方程：

$$D^{\alpha}\left[y(t)-y(0)\right]=f(t,y),\ 0<\alpha<1.$$

同样的，这里的 D^{α} 表示黎曼－刘维尔分数阶微分。

Kosmatov [9]进一步证明了

$$\mathcal{D}^{\rho}u(t)=f\left(t,\mathcal{D}^{\beta}u(t)\right),t\in[0,1],\rho>\beta$$

这里 $\mathcal{D}^{\rho}$ 是指 Caputo 分数阶微分算子(参看[10])，这也是本文所用到的微分算子。

本文主要讨论的是一个分数阶非线性微分方程解的存在性和唯一性，研究方法主要是首先证明这个方程的可解性是与一个 Volterra 型的积分方程的可解性等价。文中用到的主要定理和 Caputo 微分算子的运算规则将在第 2 部分给出。第 3 部分和第 4 部分是关于方程的解的存在性和唯一性。

2. 预备知识和记号

首先给出本文用到的一个主要定理：

定理 2.1. (Schauder 不动点定理)设 X 是赋范线性空间，$\mathbf{C}\subset X$ 是非空的有界闭凸集。映射 $T:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 是连续的紧映射，那么 T 在 $\mathbf{C}$ 中有一个不动点。

设函数 $u\in C^{m}[0,1]$。如果 $\rho\in(m-1,m)$，这里 $m\in N$，那么 ρ 阶的 Caputo 分数阶微分定义为

$$\mathcal{D}^{\rho}u(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\rho)}\int_0^t(t-s)^{m-\rho-1}u^{(m)}(s)\mathrm{d}s. \tag{2.1}$$

$\mathcal{D}^{\rho}$ 的逆算子定义为

$$\mathcal{L}^{\rho}u(t)=\frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_0^t (t-s)^{\rho-1}u(s)\mathrm{d}s. \tag{2.2}$$

本文的目的是考察非线性微分方程

$$\mathcal{D}^{\rho}u(t)=f\left(t,g(t)u(t)\right),t\in[0,1], \tag{2.3}$$

其中 $\rho\in(m-1,m)$，此方程满足初值条件

$$u^{(k)}(0)=\eta_k,k=0,\cdots,m-1. \tag{2.4}$$

我们的目标为研究分数阶的问题，因此 $\rho\in N$ 的情况不在我们的考虑范围内。

在下面的定理中，我们给出了(2.1)和(2.2)这两个算子的关系和它们的一些性质。

定理 2.2. 设 $u\in C^m[0,1],\rho\in(m-1,m),m\in N,v\in C^1[0,1]$，那么对于 $t\in[0,1]$，成立

(a) $\mathcal{D}^{\rho}\mathcal{L}^{\rho}v(t)=v(t)$；

(b) $\mathcal{L}^{\rho}\mathcal{D}^{\rho}u(t)=u(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}u^{(k)}(0)$；

(c) $\lim_{t\to0_+}\mathcal{D}^{\rho}u(t)=\lim_{t\to0_+}\mathcal{L}^{\rho}u(t)=0$；

(d) 如果 $\rho_i\in(0,1],i=1,2,\cdots,n$，满足 $\rho=\sum_{i=1}^{n}\rho_i$，并且对于任一 $k=1,\cdots,m-1$，存在 $i_k<n$ 满足 $\sum_{j=1}^{i_k}\rho_j=k$，则下面的复合法则成立：

$$\mathcal{D}^{\rho}u(t)=\mathcal{D}^{\rho_n}\cdots\mathcal{D}^{\rho_2}\mathcal{D}^{\rho_1}u(t).$$

证明：(a) 令 $S=\mathcal{D}^{\rho}\mathcal{L}^{\rho}v(t)$，将(2.1)，(2.2)代入 S 中得

$$S=\mathcal{D}^{\rho}\mathcal{L}^{\rho}v(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\rho)}\cdot\frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_0^t (t-s)^{m-\rho-1}\left[\int_0^t (t-s)^{\rho-1}v(s)\mathrm{d}s\right]^{(m)}\mathrm{d}s$$

设 $G(t)=\int_0^t (t-s)^{\rho-1}v(s)\mathrm{d}s$，在上式中我们首先计算 $G^{(m)}(t)$。由

$$\begin{aligned}G^{(m-1)}(t)&=\prod_{i=1}^{m-1}(\rho-i)\int_0^t (t-s)^{\rho-m}v(s)\mathrm{d}s\\&=\prod_{i=1}^{m-1}(\rho-i)\int_0^t s_0^{\rho-m}v(t-s_0)\mathrm{d}s_0\ (s_0=t-s)\\&=\prod_{i=1}^{m-1}(\rho-i)\int_0^t s^{\rho-m}v(t-s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}G^{(m)}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^{(m-1)}(t)&=\prod_{i=1}^{m-1}(\rho-i)\int_0^t s^{\rho-m}v'(t-s)\mathrm{d}s\\&=\prod_{i=1}^{m-1}(\rho-i)\int_0^t (t-s_0)^{\rho-m}v'(s_0)\mathrm{d}s_0\ (s_0=t-s)\\&=\prod_{i=1}^{m-1}(\rho-i)\int_0^t (t-s)^{\rho-m}v'(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{\Gamma(m-\rho)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\rho)} \prod_{i=1}^{m-1}(\rho-i) \int_0^t (t-s)^{m-\rho-1} \int_0^s (s-h)^{\rho-m} v'(h) \mathrm{d}h \mathrm{d}s \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{m-1}(\rho-i)}{\Gamma(m-\rho)\Gamma(\rho)} \int_0^t \int_0^{t-h} (t-s-h)^{m-\rho-1} s^{\rho-m} v'(h) \mathrm{d}s \mathrm{d}h \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{m-1}(\rho-i)}{\Gamma(m-\rho)\Gamma(\rho)} \int_0^t \int_0^1 (t-h)^{m-\rho-1} (1-s_0)^{m-\rho-1} (t-h)^{\rho-m} s_0^{\rho-m} v'(h)(t-h) \mathrm{d}s_0 \mathrm{d}h \ \left(s_0 = (t-h)^{-1} s\right) \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{m-1}(\rho-i)}{\Gamma(m-\rho)\Gamma(\rho)} \int_0^1 (1-s_0)^{m-\rho-1} s_0^{\rho-m} \mathrm{d}s_0 \cdot \int_0^t v'(h) \mathrm{d}h \\
&= \left[\frac{\prod_{i=1}^{m-1}(\rho-i)}{\Gamma(m-\rho)\Gamma(\rho)} \int_0^1 (1-s_0)^{m-\rho-1} s_0^{\rho-m} \mathrm{d}s_0 \right] \cdot \left(v(t)-v(0)\right) = v(t)-v(0)
\end{aligned}
$$

不妨设 $v(0)=0$。则 $S=v(t)$，即 $\mathcal{D}^{\rho}\mathcal{L}^{\rho}v(t)=v(t)$，结论得证。(b)，(c)，(d)可类似证明，过程略。

分数阶微分的降阶可以通过以下定理实现，这也是下文将微分方程转化为积分方程时的主要技巧。

定理 2.3. 设函数 $u \in C^m[0,1], m-1<\beta<\rho<m$。那么对于所有的 $k \in 1,\cdots,m-1$ 及任意 $t \in [0,1]$ 成立

$$\mathcal{D}^{\rho-m+k} u^{(m-k)}(t) = \mathcal{D}^{\rho} u(t), \tag{2.5}$$

$$\mathcal{D}^{\rho-\beta}\mathcal{D}^{\beta} u(t) = \mathcal{D}^{\rho} u(t). \tag{2.6}$$

3. 解的存在性

这里我们主要为了在 $C^m[0,1]$ 中找到初值问题(2.3)和(2.4)的解。

设 f 满足下面的条件：

(H1) $f:[0,1]\times R \to R$ 是连续可微函数；

(H2) 存在非负函数 $a_1, a_2 \in C[0,1]$，使得

$$\left| f(t,z) \right| \le a_1(t) + a_2(t)|z|, t \in [0,1];$$

(H3) $f(0,0)=0$，存在 $(0,1]$ 的一个紧子区间，使得 $f(t,0)\ne 0$。

以下引理表明初值问题(2.3)和(2.4)解的存在性与 Volterra 型积分方程(3.2)解的存在性是等价的。

引理 3.1. $m-1<\rho<m$，f 满足(H1)和(H3)。函数 $u \in C^m[0,1]$ 是初值问题(2.3)和(2.4)的解的充要条件是

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{t^k}{k!}\eta_k + \int_0^t \frac{(t-s)^{m-2}}{(m-2)!} v(s) \mathrm{d}s, t \in [0,1] \tag{3.1}$$

这里 $v \in C[0,1]$ 是下面这个积分方程的解

$$v(t) = \eta_{m-1} + \frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)} \int_0^t (t-s)^{\rho-m} f\left(s, g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{t^k}{k!}\eta_k + \int_0^s \frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!} v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right)\mathrm{d}s \tag{3.2}$$

证明：(必要性)首先利用(2.5)式来对微分方程进行降阶。

$$\mathcal{D}^{\rho-m+1} u^{(m-1)}(t) = \mathcal{D}^{\rho} u(t) = f\left(t, g(t)u(t)\right)$$

作代换 $v(t)=u^{(m-1)}(t)$，在等式两边同时作用算子 $\mathcal{L}^{\rho-m+1}$。由定理 2.2(b)可得

$$v(t)=v(0)+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}f\left(s,g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right)\mathrm{d}s$$

由于 $v(0)=u^{(m-1)}(0)=\eta_{m-1}$，则上面的方程即为(3.2)。注意到 $v(t)=u^{(m-1)}(t)$，再应用积分公式即可得到(3.1)式。

(充分性)设 $v\in C[0,1]$ 是(3.2)的一个解。因为 $v\in C[0,1]$，函数

$$s\mapsto g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

在 $(0,1]$ 上连续，因此

$$s\mapsto f\left(s,g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right)$$

也在 $(0,1]$ 上连续。故 $v^{(1)}=u^{(m)}\in C[0,1]$，因此 $u\in C^m[0,1]$。而对(3.1)两边同求 $m-1$ 阶导，再考虑(3.2)可得

$$\begin{aligned}
&u^{(m-1)}(t)=v(t)\\
&=\eta_{m-1}+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}f\left(s,g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right)\mathrm{d}s\\
&=\eta_{m-1}+\mathcal{L}^{\rho-m+1}f(t,g(t)u(t))
\end{aligned}$$

注意到 $\rho-m+1\in(0,1)$，上边两式同时作用算子 $\mathcal{D}^{\rho-m+1}$，由定理(2.2)和(2.3)可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\rho}u(t)&=\mathcal{D}^{\rho-m+1}u^{(m-1)}(t)\\
&=\mathcal{D}^{\rho-m+1}\eta_{m-1}+\mathcal{D}^{\rho-m+1}\mathcal{L}^{\rho-m+1}f(t,g(t)u(t))\\
&=f(t,g(t)u(t)),\ t\in(0,1].
\end{aligned}$$

因此我们证得了 u 是(2.3)的解。又因为(3.2)式中的第二项在 $t\to0^+$ 时趋于 0，因此 $u^{(m-1)}(0)=v(0)=\eta_{m-1}$。故 $u^{(k)}(0)=\eta_k,k=0,\cdots,m-1$。

综上所述，$u\in C^m[0,1]$ 满足(2.3)和(2.4)，充分性得证。

定理 3.1. 设(H1)，(H2)，(H3)成立，如果下面两式成立：

$$A=\sup_{t\in[0,1]}\left[\frac{1}{(m-1)!\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_2(s)|g(s)|s^{m-1}\mathrm{d}s\right]<1,$$

$$\begin{aligned}
0<B=\sup_{t\in[0,1]}&\left(|\eta_{m-1}|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_1(s)\mathrm{d}s\right)\\
&+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_2(s)\left(|g(s)|\cdot\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k\right)\mathrm{d}s<\infty
\end{aligned}$$

那么积分方程(3.2)在 $C[0,1]$ 中有解。

证明： 在带有上确界范数 $\|\cdot\|_0$ 的赋范线性空间 $(C[0,1],\|\cdot\|_0)$ 中，我们定义映射 T 为

$$Tv(t)=\eta_{m-1}+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}f\left(s,g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right)\mathrm{d}s,t\in[0,1].$$

容易验证 T 有定义并且 $T:C[0,1]\to C[0,1]$。

定义 $\mathbf{C}=\left\{v\in C[0,1]:\|v\|_0\le R\right\}$，其中 $R=\dfrac{B}{1-A}$。则 $\mathbf{C}$ 是 $C[0,1]$ 中有界闭凸集。

对于 $v\in\mathbf{C}$，我们有

$$
\begin{aligned}
\|Tv\|_0&=\sup_{t\in[0,1]}\left|\eta_{m-1}+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}f\left(s,g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right)\mathrm{d}s\right|\\
&\le\sup_{t\in[0,1]}\left(|\eta_{m-1}|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}\left|f\left(s,g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right)\right|\mathrm{d}s\right)\\
&\le\sup_{t\in[0,1]}\left(|\eta_{m-1}|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}\left(a_1(s)+a_2(s)\left|g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right|\right)\mathrm{d}s\right)\\
&\le\sup_{t\in[0,1]}\left(|\eta_{m-1}|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_1(s)\mathrm{d}s\right)\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_2(s)\cdot|g(s)|\left(\left|\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k\right|+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}|v(\tau)|\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\
&\le\sup_{t\in[0,1]}\left(|\eta_{m-1}|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_1(s)\mathrm{d}s\right)\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_2(s)\left(|g(s)|\cdot\left|\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k\right|\right)\mathrm{d}s\\
&\quad+\sup_{t\in[0,1]}\left[\frac{1}{(m-1)!\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_2(s)|g(s)|s^{m-1}\mathrm{d}s\right]\cdot\|v\|_0\\
&=B+A\|v\|_0\le B+AR=R
\end{aligned}
$$

因此 $Tv\in\mathbf{C}$，即 $T:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$。另外容易验证映射 T 是连续的紧映射。

根据定理 2.1，T 在 $\mathbf{C}$ 中有一个不动点，此即积分方程(3.2)的解，证毕。

注：定理 3.1 中，要求 f 满足不等式 $|f(t,z)|\le a_1(t)+a_2(t)|z|,t\in[0,1]$，即要求 $f(t,z)$ 关于 z 的增长不高于线性，这样满足解的存在性的方程就被限制在了一个很小的范围内。通过以下的定理我们将会看到，当 $f(t,z)$ 关于 z 满足任意的多项式估计时，解的存在性仍然成立。

(H4) 存在非负函数 $a_1,a_2\in C[0,1],p\in N$，使得

$$|f(t,z)|\le a_1(t)+a_2(t)|z|^p,t\in[0,1];$$

定理 3.2. 设(H1)，(H3)，(H4)成立，定义

$$A=\frac{2^{p-1}}{\Gamma(\rho-m+1)\cdot[(m-1)!]^p}\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}s^{p(m-1)}a_2(s)|g(s)|^p\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
B=&\sup_{t\in[0,1]}\left(|\eta_{m-1}|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_1(s)\mathrm{d}s\right)\\
&+\frac{2^{p-1}}{\Gamma(\rho-m+1)}\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_2(s)\left(|g(s)|\cdot\left|\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k\right|\right)^p\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

如果成立 $B>0$，并且 $AB^{p-1}<\frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}$，那么积分方程(3.2)在 $C[0,1]$ 中有解。

证明： 在带有上确界范数 $\|\cdot\|_0$ 的赋范线性空间 $\left(C[0,1],\|\cdot\|_0\right)$ 中，我们定义映射 T 为

$$Tv(t)=\eta_{m-1}+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}f\left(s,g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right)\mathrm{d}s,\ t\in[0,1].$$

容易验证 T 有定义并且 $T:C[0,1]\to C[0,1]$。

定义 $\mathbf{C}=\left\{v\in C[0,1]:\|v\|_0\le R\right\}$，这里 R 待定。对于 $v\in\mathbf{C}$ 有

$$\begin{aligned}
\|Tv\|_0&=\sup_{t\in[0,1]}\left|\eta_{m-1}+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}f\left(s,g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right)\mathrm{d}s\right|\\
&\le\sup_{t\in[0,1]}\left(\left|\eta_{m-1}\right|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}\left|f\left(s,g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right)\right|\mathrm{d}s\right)\\
&\le\sup_{t\in[0,1]}\left(\left|\eta_{m-1}\right|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}\left(a_1(s)+a_2(s)\left|g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right|^p\right)\mathrm{d}s\right)\\
&\le\sup_{t\in[0,1]}\left(\left|\eta_{m-1}\right|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_1(s)\mathrm{d}s\right)\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_2(s)\cdot\left[|g(s)|\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}|v(\tau)|\mathrm{d}\tau\right)\right]^p\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

由幂平均不等式 $\frac{a+b}{2}\le\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$，也即 $(a+b)^p\le2^{p-1}\left(a^p+b^p\right)$。

$$\begin{aligned}
\text{上式}&\le\sup_{t\in[0,1]}\left(\left|\eta_{m-1}\right|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_1(s)\mathrm{d}s\right)\\
&\quad+\frac{2^{p-1}}{\Gamma(\rho-m+1)}\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_2(s)\left(|g(s)|\cdot\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k\right)^p\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{2^{p-1}}{\Gamma(\rho-m+1)}\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_2(s)\left(|g(s)|\cdot\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}\mathrm{d}\tau\right)^p\mathrm{d}s\cdot\|v\|_0^p\\
&\le\sup_{t\in[0,1]}\left(\left|\eta_{m-1}\right|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_1(s)\mathrm{d}s\right)\\
&\quad+\frac{2^{p-1}}{\Gamma(\rho-m+1)}\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}a_2(s)\left(|g(s)|\cdot\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k\right)^p\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{2^{p-1}}{\Gamma(\rho-m+1)\left[(m-1)!\right]^p}\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}s^{p(m-1)}a_2(s)|g(s)|^p\mathrm{d}s\cdot\|v\|_0^p\\
&=B+A\|v\|_0^p\le B+AR^p
\end{aligned}$$

类似定理 3.1 的证明，需要求得合适的 R，使得 $B+AR^p=R$ 成立。

考查函数 $l(x)=Ax^p-x+B$，令 $l'(x)=Apx^{p-1}-1=0$，则 $x=x_0=\sqrt[p-1]{\frac{1}{Ap}}$，由于 $x<x_0$ 时 $l'(x)<0$；$x>x_0$ 时 $l'(x)>0$，因此在 $x=\sqrt[p-1]{\frac{1}{Ap}}$ 时取到最小值，只需要 $l(x_0)=A\left(\sqrt[p-1]{\frac{1}{Ap}}\right)^p-\sqrt[p-1]{\frac{1}{Ap}}+B=B-\frac{p-1}{p}\sqrt[p-1]{\frac{1}{Ap}}<0$，方程 $l(x)=0$ 就有正根，也即 $AB^{p-1}<\frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}$ 时存在 $R>0$，使得 $B+AR^p=R$。因此 $AB^{p-1}<\frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}$ 时，$Tv\in\mathbf{C}$，即 $T:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$。

另外容易验证映射 T 是连续的紧映射。根据定理 2.1，T 在 $\mathbf{C}$ 中有一个不动点，此即积分方程(3.2)的解，证毕。

注：定理 3.2 成功地把定理 3.1 的结论推广到了 $f(t,z)$ 关于 z 满足任意多次的多项式估计的情形。但是定理 3.2 中对于 a_1，a_2 的限制比定理 3.1 严格，并且随着多项式次数 P 的提高，这个限制条件就越严格。因此在实际应用中，要根据具体情况选择这两个定理。

4. 解的唯一性

首先提出假设

(H5) 对于任意的 $R>0$，存在非负函数 γ，使得

$$\left|f(t,y)-f(t,z)\right|\le\gamma(t)|y-z|,t\in[0,1].$$

定理 4.1. 如果(H1)，(H3)，(H5)成立，并且有

$$\zeta=\sup_{t\in[0,1]}\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)\cdot(m-1)!}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}\gamma(s)\left|g(s)\right|s^{m-1}\mathrm{d}s<1,$$

$$0<\sup_{t\in[0,1]}\left(\left|\eta_{m-1}\right|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}\left|f\left(s,g(s)\cdot\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k\right)\right|\right)\mathrm{d}s<\infty,$$

那么积分方程(3.2)有唯一解。

证明： 在 Banach 空间 $\left(C[0,1],\|\cdot\|_0\right)$ 中，我们定义 $\mathbf{C}$ 为

$$\mathbf{C}=\left\{v\in\mathcal{B}:\|v\|_0\le R\right\}$$

其中半径

$$R=\frac{1}{1-\zeta}\sup_{t\in[0,1]}\left(\left|\eta_{m-1}\right|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}\left|f\left(s,g(s)\cdot\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k\right)\right|\right)\mathrm{d}s$$

定义映射 T 为

$$Tv(t)=\eta_{m-1}+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}f\left(s,g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k+\int_0^s\frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right)\mathrm{d}s,t\in[0,1].$$

容易验证 T 有定义并且 $T:C[0,1]\to C[0,1]$。

如果 $v\in C$，那么有

$$\begin{aligned}\|Tv\|_0&\le\|Tv-T0\|_0+\|T0\|_0\\&\le\zeta\|v\|_0+\sup_{t\in[0,1]}\left(\left|\eta_{m-1}\right|+\frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)}\int_0^t(t-s)^{\rho-m}\left|f\left(s,g(s)\cdot\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k\right)\right|\right)\mathrm{d}s\\&\le\zeta\|v\|_0+(1-\zeta)R\le R\end{aligned}$$

因此 T 是 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{C}$ 上的映射。

设 $v_1, v_2 \in \mathbf{C}$，那么

$$\|Tv_1 - Tv_2\|_0 = \sup_{t\in[0,1]} \left|Tv_1(t) - Tv_2(t)\right|$$

$$\le \sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)} \int_0^t (t-s)^{\rho-m} \left| f\left(s, g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k + \int_0^s \frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!} v_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\right)\right.$$

$$\left. - f\left(s, g(s)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-2}\frac{s^k}{k!}\eta_k + \int_0^s \frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!} v_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\right)\right| \mathrm{d}s$$

$$\le \sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)} \int_0^t (t-s)^{\rho-m} \gamma(s) \left| g(s)\cdot\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!} v_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^s \frac{(s-\tau)^{m-2}}{(m-2)!} v_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\right| \mathrm{d}s$$

$$\le \sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{\Gamma(\rho-m+1)\cdot(m-1)!} \int_0^t (t-s)^{\rho-m} \gamma(s) \left|g(s)\right| s^{m-1} \mathrm{d}s \|v_1 - v_2\|_0 = \zeta \|v_1 - v_2\|_0$$

由于 $\zeta < 1$，因此 T 是一个压缩映射。根据压缩映像原理，T 有唯一的不动点，此即积分方程(3.2)的解。

注：定理 4.1 在证明唯一性的时候用到了压缩映像原理，事实上同时能够得到解的存在性，因此原方程在满足条件(H5)时，解的存在性仍然成立。

致　谢

感谢编辑和审稿专家对本文所付出的劳动，本文受到海南省自然科学基金(项目名称：Gronwall 不等式的推广及其在微分方程中的应用；项目编号：20151011)的资助，在此一并表示感谢。

参考文献 (References)

[1] Miller, K.S. and Ross, B. (1993) An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley, New York.

[2] Podlubny, I. (1999) Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego.

[3] Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. (1993) Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon.

[4] West, B.J., Bologna, M. and Grigolini, P. (2003) Physics of Fractal Operators. Springer, New York. http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-21746-8

[5] Daftardar-Gejji, V. and Babakhani, A. (2004) Analysis of a System of Fractional Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **293**, 511-522. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.01.013

[6] Diethelm, K. and Ford, N.J. (2002) Analysis of Fractional Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **265**, 229-248. http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.2000.7194

[7] Delbosco, D. and Rodino, L. (1996) Existence and Uniqueness for a Nonlinear Fractional Differential Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **204**, 609-625. http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.1996.0456

[8] El-Sayed, A.M.A. (1988) Fractional Differential Equations. *Kyungpook Math. J*, **28**, 22-28.

[9] Kosmatov, N. (2009) Integral Equations and Initial Value Problems for Nonlinear Differential Equations of Fractional Order. *Nonlinear Analysis*: *Theory, Methods & Applications*, **70**, 2521-2529. http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2008.03.037

[10] Caputo, M. (1967) Linear Models of Dissipation Whose Q Is Almost Frequency Independent (Part II). *Geophysical Journal International*, **13**, 529-539. http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x