Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(1), 72-80
Published Online January 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.61011

Hans汉斯

The Boundedness of Multilinear Fractional Integral Operators with Variable Kernel on Variable Exponent Lebesgue Spaces

Qiuyue Wan[1,2], Huiling Wu[1], Jiacheng Lan[1]

[1]Institute of Engineering and Design, Lishui University, Lishui Zhejiang
[2]School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang
Email: jiachenglan@163.com, qiuyuewan@126.com

Received: Oct. 28th, 2015; accepted: Jan. 25th, 2016; published: Jan. 29th, 2016

Abstract

In this paper, the authors study the boundedness of a class of multilinear fractional integral and the maximal operators with variable kernel. Under some assumptions, it is obtained that these operators $T_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}$ and $M_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}$ are both bounded from $L^{p(\cdot)}$ to $L^{q(\cdot)}$ by using the connection between multilinear and fractional integral operators and converting multilinear into simple fractional integral.

Keywords

Multilinear Fractional Integral, Variable Kernel, Variable Exponent Lebesgue Spaces

具有可变核的多线性积分算子在变指数Lebesgue空间的有界性

万秋阅[1,2]，吴慧伶[1]，兰家诚[1]

[1]丽水学院工程与设计学院，浙江 丽水
[2]浙江理工大学理学院，浙江 杭州
Email: jiachenglan@163.com, qiuyuewan@126.com

文章引用: 万秋阅, 吴慧伶, 兰家诚. 具有可变核的多线性积分算子在变指数 Lebesgue 空间的有界性[J]. 理论数学, 2016, 6(1): 72-80. http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.61011

收稿日期：2015年10月28日；录用日期：2016年1月25日；发布日期：2016年1月29日

摘　要

本文研究了具有可变核的多线性分数次积分算子和相对应的极大算子的有界性，通过多线性分数次积分与对应的分数次积分的联系，将多线性转化为较为简单的分数次积分，从而得到算子 $T_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}$ 和 $M_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}$ 在 $\left(L^{p(\cdot)},L^{q(\cdot)}\right)$ 上是有界的。

关键词

多线性分数次积分，可变核，变指数Lebesgue空间

1. 引言

多线性积分算子最初是由 Calderón [1]研究奇异积分算子代数引入的，随后 Meyer Y [2]对这类算子作了进一步推广，与奇异积分算子相关的多线性积分算子的研究逐渐得到了重视。1931 年，Orlicz 在文章[3]中首次提出变指数函数空间的概念。1955 年，Calderón 和 Zygmund [4]证明了 L^p 的有界性，经过数十年的发展，直到 1971 年，Muckenhoupt 和 Wheeden [5]证明了算子 $T_{\Omega,\alpha}$ 在 $\left(L^p,L^q\right)$ 的有界性。现在，在许多学者的研究努力下，已经出现了许多关于变指数 Lebesgue 空间中的一些算子理论和成果(参见[6]-[8]及其相关文献)。

设 $0<\alpha<n$，S^{n-1} 是 $R^n\ (n\ge 2)$ 上具有 Lebesgue 测度的单位球面，$\Omega(x,z)\in L^\infty\left(R^n\right)\times L^r\left(S^{n-1}\right)(r\ge 1)$ 是定义在 R^n 上的零次齐次函数，如果满足

1) 对任意的 $x,z\in R^n$ 和 $\lambda>0$，有 $\Omega(x,\lambda z)=\Omega(x,z)$；

2) $\|\Omega\|_{L^\infty\left(R^n\right)\times L^r\left(S^{n-1}\right)}:=\sup\limits_{x\in R^n}\left(\int_{S^{n-1}}\left|\Omega(x,z')\right|^r \mathrm{d}\sigma(z')\right)^{1/r}<\infty$。

带有变量核的积分算子 $T_{\Omega,\alpha}$ 定义为

$$T_{\Omega,\alpha}=\int_{R^n}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}f(y)\mathrm{d}y,$$

$$\overline{T}_{|\Omega|,\alpha}=\int_{R^n}\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)|\mathrm{d}y。$$

对应的分数次极大算子 $M_{\Omega,\alpha}$ 定义为

$$M_{\Omega,\alpha}=\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n-\alpha}}\int_{|x-y|<r}|\Omega(x,x-y)||f(y)|\mathrm{d}y,$$

当 $\alpha\equiv 1$ 时，具有可变核积分算子 $T_{\Omega,0}$ 与一类具有变系数的二阶线性椭圆方程有着密切的联系。早在 2001 年，丁勇，陆善镇[9]就已经给出了，当 $D^\gamma\in BMO\left(R^n\right)$ 时，

$$T_{\Omega,\alpha,A_1,A_2,\cdots,A_k}f(x)=\int_{R^n}\frac{\Omega(x,y)}{|x-y|^{n-\alpha+N}}\prod_{j=1}^{k}R_{m_j}\left(A_j;x,y\right)f(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $0<\alpha<n$，$N=\sum_{j=1}^{k}(m_j-1)(m_j\ge 2)$，$R_m(A;x,y)$ 表示 A 在 x 关于 y 展开的 $m+1$ 阶 Taylor 级数余项，即

$$R_{m+1}(A;x,y)=A(x)-\sum_{|\alpha|<m+1}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}A(y)(x-y)^{\alpha},$$

和与之对应的分数次极大算子

$$M_{\Omega,\alpha,A_1,A_2,\cdots,A_k}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n-\alpha+N}}\int_{R^n}\left|\Omega(x,y)\right|\left|\prod_{j=1}^{k}R_{m_j}(A_j;x,y)\right|\left|f(y)\right|\mathrm{d}y,$$

的加权 (L^p,L^q) 的有界性。

2002 年，谵稳固[10]讨论了当 $\Omega(x)\in \mathrm{Lip}_1(S^{n-1})$，$\alpha=0$ 时，即在不是分数次算子的情形，通过 λ 不等式得到 $T_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}$ 的 (L^p,L^q) 有界性。随后 2007 年，兰家诚、梅春亮[11]利用多线性分数次积分转化为相应的分数次积分的方法，得到具有可变核的带两个余项的算子 $T_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}$ 与 $M_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}$ 在 Lebesgue 空间有界。最近，吴慧伶和兰家诚[12]又论证了多线性积分算子 $T_{\Omega,\alpha,A}$ 与 $M_{\Omega,\alpha,A}$ 在变指数 Lebesgue 空间的有界性。2013 年，张普能和李亮[13]寻找具有光滑条件的核函数使得多线性算子保持有界性，他们运用 Sharp 极大函数点态估计以及变指数 Herz 型 Hardy 空间的中心原子分解定理证明了一类满足 Hormander 条件的多线性分数次积分算子从乘积 Herz 型 Hardy 空间到 Herz 空间是有界的。由此可见，近些年来关于多线性奇异积分算子的研究仍然是个重要课题，与多线性相关的一些算子，交换子以及加权估计等等在变指数函数空间的研究也仍然有许多工作要做。

本文则是在许多学者已得出的理论基础上，进一步研究具有可变核的带两个余项的多线性积分算子的在变指数 Lebesgue 空间的有界性。

2. 预备知识

定义 1 给定开集 $\Omega\subset R^n$ 及可测函数 $p(\cdot):R^n\to[1,\infty)$，$L^{p(\cdot)}(R^n)$ 表示 R^n 上所有可测函数 f 的集合，且满足对某个 $\lambda>0$，使得

$$\int_{R^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty。$$

赋予如下 Luxemburg-Nakano 范数

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}=\inf\left\{\lambda>0:\int_{R^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x\le 1\right\},$$

则 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 是 Banach 空间，称之为变指数 Lebesgue 空间。

对所有的紧子集 $E\subset\Omega$，定义空间 $L^{p(\cdot)}_{loc}(\Omega)$ 为 $L^{p(\cdot)}_{loc}(\Omega):=\{f:f\in L^{p(\cdot)}(E)\}$。定义 $P(R^n)$ 为 $p(\cdot):R^n\to[1,\infty)$ 的集合，使得

$$p^-=\operatorname{ess\,inf}\{p(x):x\in\Omega\}>1,\quad p^+=\operatorname{ess\,sup}\{p(x):x\in\Omega\}<\infty$$

变量 $p'(x)$ 是 $p(x)$ 的共轭，其中 $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1$ 成立。

Hardy-Littlewood 极大算子的有界性在变指数函数空间的研究中发挥着极大的作用，令 $f\in L^1_{loc}(R^n)$，

则 Hardy-Littlewood 极大算子定义为

$$Mf(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y,$$

其中上确界是对所有包含 x 的球 B 而取的。令 $B(\Omega)$ 为 $p(\cdot)\in P(R^n)$ 并使得 Hardy-Littlewood 极大算子 M 满足 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 有界的指数函数 $p(\cdot)$ 的集合。

定义 2 若 $p(\cdot)\in P(R^n)$ 满足

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{-C}{\log(|x-y|)},\ |x-y|\le 1/2,$$

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{C}{\log(\mathrm{e}+|x|)},\ |y|\ge|x|,$$

则 $p(\cdot)\in B(R^n)$，即 Hardy-Littlewood 极大算子 M 是 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 有界的。

定义 3 设 $0<\alpha<n$，$m\in N$，$\Omega\in L^\infty(R^n)\times L^r(S^{n-1})(r\ge 1)$ 是定义在 R^n 上的零次齐次函数，S^{n-1} 是 R^n 上的单位圆，带有可变核的多线性分数次积分算子 $T_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}$ 定义为

$$T_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}f(x)=\int_{R^n}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha+m_1+m_2-2}}R_{m_1}(A_1;x,y)R_{m_2}(A_2;x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $R_m(A;x,y)$ 表示 A 在 x 关于 y 展开的 $m+1$ 阶 Taylor 级数余项，即

$$R_{m+1}(A;x,y)=A(x)-\sum_{|\alpha|<m+1}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha A(y)(x-y)^\alpha,$$

与之对应的多线性分数次极大算子定义为

$$M_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n-\alpha+m_1+m_2-2}}\int_{|x-y<r|}|\Omega(x,x-y)||R_{m_1}(A_1;x,y)||R_{m_2}(A_2;x,y)||f(y)|\mathrm{d}y。$$

定义 4 [14] 对于 $\beta>0$，齐次 Lipschitz 空间 $\dot{\Lambda}_\beta$ 是满足下式所有 f 的空间，

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta}=\sup_{x,h\in R^n,h\neq 0}\frac{\left|\Delta_h^{[\beta]+1}f(x)\right|}{|h|^\beta}<\infty,$$

其中

$$\Delta_h^1f(x)=f(x+h)-f(x),$$

$$\Delta_h^{k+1}f(x)=\Delta_h^kf(x+h)-\Delta_h^kf(x),\quad k\ge 1。$$

3. 主要结果

3.1. 主要结果

定理 1 设 $0<\alpha<n$，$0<\beta<1$，且 $0<\alpha+2\beta<n$，$p(\cdot)\in B(R^n)$，$1<p^+<\dfrac{n}{\alpha+2\beta}$，同时定义 $q(x)$ 满足 $\dfrac{1}{p(x)}-\dfrac{1}{q(x)}=\dfrac{\alpha+2\beta}{n}$，而且存在 $r>(p'(x))^+$，使得 $\Omega\in L^\infty(R^n)\times L^r(S^{n-1})$，$D^\gamma A_j\in\dot{\Lambda}_\beta\ (j=1,2)$，则存在不依赖 f 的常数 $C>0$，使得

$$\left\|T_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}\right\|_{L^{q(\cdot)}\left(R^n\right)}\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\gamma|=m_j-1}\left\|D^\gamma A_j\right\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\right)\|f\|_{L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)}。$$

定理 2 设$0<\alpha<n$，$0<\beta<1$，且$0<\alpha+2\beta<n$，$p(\cdot)\in B\left(R^n\right)$，$1<p^+<\dfrac{n}{\alpha+2\beta}$，同时变量$q(x)$满足$\dfrac{1}{p(x)}-\dfrac{1}{q(x)}=\dfrac{\alpha+2\beta}{n}$，而且存在$r>\left(p'(x)\right)^+$，使得$\Omega\in L^\infty\left(R^n\right)\times L^r\left(S^{n-1}\right)$，$D^\gamma A_j\in\dot{\Lambda}_\beta\ (j=1,2)$，则存在不依赖$f$的常数$C>0$，使得

$$\left\|M_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}\right\|_{L^{q(\cdot)}\left(R^n\right)}\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\gamma|=m_j-1}\left\|D^\gamma A_j\right\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\right)\|f\|_{L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)}。$$

本文中常数$C>0$在不同地方代表不同的值。

3.2. 辅助性引理

引理 1 [11] 设$0<\alpha<n$，$0<\beta<1$，且$0<\alpha+2\beta<n$，如果$\Omega\in L^\infty\left(R^n\right)\times L^r\left(S^{n-1}\right)\left(r>\left(p'(x)\right)^+\right)$，$D^\gamma A_j\in\dot{\Lambda}_\beta\ (j=1,2)$，则存在不依赖$f$的常数$C>0$，使得

$$\left|T_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}\right|\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\gamma|=m_j-1}\left\|D^\gamma A_j\right\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\right)\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}\left(|f|\right)(x)。$$

引理 2 [11] 设$0<\alpha<n$，$\Omega\in L^\infty\left(R^n\right)\times L^r\left(S^{n-1}\right)\left(r>\left(p'(x)\right)^+\right)$，其中

$$\overline{T}_{|\Omega|,\alpha,A_1,A_2}f(x)=\int_{R^n}\frac{\left|\Omega(x,x-y)\right|}{|x-y|^{n-\alpha+m_1+m_2-2}}\left|R_{m_1}\left(A_1;x,y\right)\right|\left|R_{m_2}\left(A_2;x,y\right)\right|f(y)\mathrm{d}y,$$

则有$\overline{T}_{|\Omega|,\alpha,A_1,A_2}f(x)\ge M_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}f(x)$，$x\in R^n$。

引理 3 [15] 设$p(\cdot)\in B\left(R^n\right)$，函数$p'(x)$如之前的定义使空间$L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)$具有范数

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)}\le\sup\left\{\int_{R^n}\left|f(x)g(x)\right|\mathrm{d}x:\|g\|_{L^{p'(\cdot)}\left(R^n\right)}\le1\right\}\le r_p\|f\|_{L^{p'(\cdot)}\left(R^n\right)}$$

其中$r_p:=1+\dfrac{1}{p^-}+\dfrac{1}{p^+}$。

引理 4 对任意的$\varepsilon>0$，而且$0<\alpha+2\beta-\varepsilon<\alpha+2\beta+\varepsilon<n$，那么存在常数，$C=C(\alpha+2\beta,n,\varepsilon)$，使得下式成立

$$\left|\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}\left(|f|\right)\right|\le C\left[M_{\Omega,\alpha+2\beta-\varepsilon}f(x)\right]^{\frac{1}{2}}\left[M_{\Omega,\alpha+2\beta+\varepsilon}f(x)\right]^{\frac{1}{2}}。$$

类似于文献[16]中的证明，将其中的α用$\alpha+2\beta$替换，同样可以对该引理做以下证明。

证明：设$\delta>0$，$x\in R^n$，使得

$$\delta^{2\varepsilon}=\frac{M_{\Omega,\alpha+2\beta+\varepsilon}f(x)}{M_{\Omega,\alpha+2\beta-\varepsilon}f(x)}$$

首先由定义可以得到

$$\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}\left(|f|\right)(x)=\int_{|x-y|<\delta}\frac{\left|\Omega(x,x-y)\right|}{|x-y|^{n-(\alpha+2\beta)}}\left|f(y)\right|\mathrm{d}y+\int_{|x-y|\ge\delta}\frac{\left|\Omega(x,x-y)\right|}{|x-y|^{n-(\alpha+2\beta)}}\left|f(y)\right|\mathrm{d}y:=I_1+I_2$$

先对 I_1 进行估计

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\le \sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^{-j-1}\delta\le|x-y|<2^{-j}\delta}\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-(\alpha+2\beta)}}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&\le \sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{-j-1}\delta\right)^{-[n-(\alpha+2\beta)]}\int_{|x-y|<2^{-j}\delta}|\Omega(x,x-y)||f(y)|\mathrm{d}y\\
&\le \sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{-1}\right)^{-[n-(\alpha+2\beta)]}\frac{\left(2^{-j}\delta\right)^{\varepsilon}}{\left(2^{-j}\delta\right)^{n-(\alpha+2\beta-\varepsilon)}}\int_{|x-y|<2^{-j}\delta}|\Omega(x,x-y)||f(y)|\mathrm{d}y\\
&\le C\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j\varepsilon}\delta^{\varepsilon}\frac{1}{\left(2^{-j}\delta\right)^{n-(\alpha+2\beta-\varepsilon)}}\int_{|x-y|<2^{-j}\delta}|\Omega(x,x-y)||f(y)|\mathrm{d}y\\
&\le C\delta^{\varepsilon}M_{\Omega,\alpha+2\beta-\varepsilon}f(x),
\end{aligned}
$$

同样地，再对 I_2 进行估计

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\le \sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^{j-1}\delta\le|x-y|<2^{j}\delta}\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-(\alpha+2\beta)}}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&\le \sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{j}\delta\right)^{-\varepsilon}\frac{1}{\left(2^{j}\delta\right)^{n-(\alpha+2\beta+\varepsilon)}}\int_{|x-y|<2^{j}\delta}|\Omega(x,x-y)||f(y)|\mathrm{d}y\\
&\le C\delta^{-\varepsilon}M_{\Omega,\alpha+2\beta+\varepsilon}f(x),
\end{aligned}
$$

结合 I_1，I_2 便可得到

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}(|f|)\right| &\le C\left(\delta^{\varepsilon}M_{\Omega,\alpha+2\beta-\varepsilon}f(x)+\delta^{-\varepsilon}M_{\Omega,\alpha+2\beta+\varepsilon}f(x)\right)\\
&\le C\left[M_{\Omega,\alpha+2\beta-\varepsilon}f(x)\right]^{\frac{1}{2}}\left[M_{\Omega,\alpha+2\beta+\varepsilon}f(x)\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

证明完毕。

引理 5 设 $0<\alpha<\frac{n}{p_1^+}$，其中 $p(\cdot)\in B(R^n)$，同时定义 $p_2(\cdot)$ 满足 $\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}=\frac{\alpha}{n}$，$\Omega(x,z)$ 属于 $L^{\infty}(R^n)\times L^{r}(S^{n-1})\left(r>(p_1(x))^{+}\right)$，则对 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 上所有的函数 f，有

$$\|M_{\Omega,\alpha}f\|_{L^{p_2(\cdot)}(R^n)}\le C\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}(R^n)}.$$

引理 6 设 $0<\alpha<\frac{n}{p_1^+}$，$p_1(\cdot)\in B(R^n)$，同时定义 $p_2(\cdot)$ 满足 $\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}=\frac{\alpha}{n}$，$\Omega(x,z)$ 属于 $L^{\infty}(R^n)\times L^{r}(S^{n-1})\left(r>(p_1(x))^{+}\right)$，则对 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 上所有的函数 f，有

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{L^{p_2(\cdot)}(R^n)}\le C\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}(R^n)}.$$

以上两个引理的证明与吴慧伶和兰家诚在文献[17]中定理 1 和定理 2 的证明非常相似，这里就不再证明了。同时注意到，**引理 6** 对 $\overline{T}_{|\Omega|,\alpha}$ 同样也成立，见文献[18]。

引理 7 **[15]** 令 $p(\cdot):R^n\to[1,\infty)$，则有 $p^{+}<\infty$，那么 $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}<C_1$ 当且仅当 $|f|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}<C_2$ 成立。特别地，如果任意的常数 C_1 或 C_2 等于 1，则另一个也等于 1。

这里注意，$\left|f\right|_{L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)}=\int_{R^n}\left|f\left(x\right)\right|^{p(x)}\mathrm{d}x$。

4. 定理的证明

4.1. 定理 1 的证明

证明：由**引理 1** 可知

$$\left|T_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}\right|\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\gamma|=m_j-1}\left\|D^{\gamma}A_j\right\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\right)\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}\left(\left|f\right|\right)\left(x\right),$$

又由**引理 3** 和变指数 Lebesgue 空间中的范数定义可知

$$\begin{aligned}\left\|T_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}\right\|_{L^{q(\cdot)}\left(R^n\right)}&\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\gamma|=m_j-1}\left\|D^{\gamma}A_j\right\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\right)\sup\left\{\int_{R^n}\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}\left(\left|f\right|\right)\left|g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x:\left\|g\right\|_{L^{q'(\cdot)}\left(R^n\right)}\le1\right\}\\&\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\gamma|=m_j-1}\left\|D^{\gamma}A_j\right\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\right)\left\|\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}\left(\left|f\right|\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}\left(R^n\right)}\left\|g\left(x\right)\right\|_{L^{q'(\cdot)}\left(R^n\right)}\\&\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\gamma|=m_j-1}\left\|D^{\gamma}A_j\right\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\right)\left\|\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}\left(\left|f\right|\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}\left(R^n\right)},\end{aligned}$$

现在只需要证明$\left\|\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}\left(\left|f\right|\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}\left(R^n\right)}\le\left\|f\right\|_{L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)}$即可。首先定理的已知条件已经给出 $f\in L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)$，不是一般性，我们假设$\left\|f\right\|_{L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)}=1$。因为$\left(q\left(x\right)\right)^{+}<\infty$，由**引理 7** 不难得到$\left|\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}\right|_{L^{q(\cdot)}\left(R^n\right)}\le C$。

固定 ε， $0<\varepsilon<\min\left\{\alpha+2\beta,n-\left(\alpha+2\beta\right)\right\}$，使得

$$\frac{2}{\frac{\varepsilon\left(q\left(x\right)\right)^{+}}{n}+1}>1, \tag{1}$$

同时定义 $r\left(\cdot\right):R^n\to\left[1,\infty\right)$ 使其满足

$$r\left(x\right)=\frac{2}{\frac{\varepsilon q\left(x\right)}{n}+1}, \tag{2}$$

由式子(1)和(2)，可知 $r^{-}>1$。而且对于 R^n 上所有的 x，有

$$\frac{1}{p\left(x\right)}-\frac{1}{\frac{r\left(x\right)q\left(x\right)}{2}}=\frac{\alpha+2\beta-\varepsilon}{n}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{p\left(x\right)}-\frac{1}{\frac{r'\left(x\right)q\left(x\right)}{2}}=\frac{\alpha+2\beta+\varepsilon}{n}, \tag{4}$$

结合**引理 4**，

$$\int_{R^n}\left|\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}\left(\left|f\right|\right)\right|^{q(x)}\mathrm{d}x\le C\int_{R^n}\left[M_{\Omega,\alpha+2\beta-\varepsilon}f\left(x\right)\right]^{\frac{q(x)}{2}}\left[M_{\Omega,\alpha+2\beta+\varepsilon}f\left(x\right)\right]^{\frac{q(x)}{2}}\mathrm{d}x,$$

由**引理 3**，进一步得到

$$\int_{R^n}\left|\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}\left(|f|\right)\right|^{q(x)}\mathrm{d}x\le C\left\|\left[M_{\Omega,\alpha+2\beta-\varepsilon}f\left(x\right)\right]^{\frac{q(x)}{2}}\right\|_{L^{r(\cdot)}\left(R^n\right)}\left\|\left[M_{\Omega,\alpha+2\beta+\varepsilon}f\left(x\right)\right]^{\frac{q(x)}{2}}\right\|_{L^{r'(\cdot)}\left(R^n\right)}。$$

不失一般性，假设以上任意一个值都大于 1。同时根据范数定义，假设其最小值取决于 λ 且 $\lambda>1$。因为 $x\in R^n$，$\lambda>1$，则 $\lambda^{2/q(x)}\ge\lambda^{2/(q(x))^+}$，所以有

$$\int_{R^n}\left(\frac{\left[M_{\Omega,\alpha+2\beta-\varepsilon}f\left(x\right)\right]^{\frac{q(x)}{2}}}{\lambda}\right)^{r(x)}\mathrm{d}x=\int_{R^n}\left(\frac{M_{\Omega,\alpha+2\beta-\varepsilon}f\left(x\right)}{\lambda^{2/q(x)}}\right)^{\frac{r(x)q(x)}{2}}\mathrm{d}x\le\int_{R^n}\left(\frac{M_{\Omega,\alpha+2\beta-\varepsilon}f\left(x\right)}{\lambda^{2/(q(x))^+}}\right)^{\frac{r(x)q(x)}{2}}\mathrm{d}x$$

由式子(3)可知，$p(x)$ 和 $\dfrac{r(x)q(x)}{2}$ 满足**引理 5** 中的条件，注意到前文我们已经假设 $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}=1$，因此

$$\left\|\left[M_{\Omega,\alpha+2\beta-\varepsilon}f\left(x\right)\right]^{\frac{q(x)}{2}}\right\|_{L^{r(\cdot)}\left(R^n\right)}\le\left\|M_{\Omega,\alpha+2\beta-\varepsilon}f\left(x\right)\right\|_{L^{r(x)q(x)/2}\left(R^n\right)}^{(q(x))^+/2}\le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)}^{(q(x))^+/2}\le C\text{；}$$

运用同样的方法，对后一部分进行范数分析，也可以得到

$$\left\|\left[M_{\Omega,\alpha+2\beta+\varepsilon}f\left(x\right)\right]^{\frac{q(x)}{2}}\right\|_{L^{r'(\cdot)}\left(R^n\right)}\le\left\|M_{\Omega,\alpha+2\beta+\varepsilon}f\left(x\right)\right\|_{L^{r'(x)q(x)/2}\left(R^n\right)}^{(q(x))^+/2}\le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)}^{(q(x))^+/2}\le C\text{；}$$

结合这两部分，那么

$$\left|\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}f\left(x\right)\right|_{L^{q(\cdot)}\left(R^n\right)}\le\int_{R^n}\left|\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}f\left(x\right)\right|^{q(x)}\mathrm{d}x\le C\text{，}$$

所以

$$\left|\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}f\left(x\right)\right|_{L^{q(\cdot)}\left(R^n\right)}\le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)}\text{，}$$

因此，综合**引理 1** 和**引理 6** 有

$$\begin{aligned}\left\|T_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}\right\|_{L^{q(\cdot)}\left(R^n\right)}&\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\gamma|=m_j-1}\left\|D^\gamma A_j\right\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\right)\left\|\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta}\left(|f|\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}\left(R^n\right)}\\&\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\gamma|=m_j-1}\left\|D^\gamma A_j\right\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\right)\|f\|_{L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)}.\end{aligned}$$

定理 1 证明完成。

4.2. 定理 2 的证明

定理 2 的证明可以由**引理 1** 和**引理 2** 直接推得

$$\left\|M_{\Omega,\alpha,A_1,A_2}\right\|_{L^{q(\cdot)}\left(R^n\right)}\le\left\|\overline{T}_{|\Omega|,\alpha+2\beta,A_1,A_2}f\left(x\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}\left(R^n\right)}\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\gamma|=m_j-1}\left\|D^\gamma A_j\right\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\right)\|f\|_{L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)}.$$

定理 2 证明完成。

致　谢

本文是在根据许多学者已得到的成果的基础上进一步探讨的，由浙江省自然科学基金项目(Y6090681)

和浙江省教育厅重点科研项目(Z200805283)支持下完成的，借此向老师致以深深的敬意和由衷的感谢！同时也感谢《理论数学》的各位老师提出宝贵的建议。

参考文献 (References)

[1] Calderón, A. and Zygmund, A. (1989) Singular Integral Operators and Differential Equations. Springer, Netherlands, Vol. 41, 221-238.

[2] Meyer, Y. (1990) Ondelettes ét opérateurs, I, II. Herman, Paris.

[3] Orlicz, W. (1931) Uber konjugierte Exponentenfolgen. *Studia Mathematica*, **3**, 200-212.

[4] Calderón, A. and Zygmund, A. (1979) On Singular Integral with Variable Kernels. *Applicable Analysis*, **7**, 221-238.

[5] Muckenhoupt, B. and Wheeden, R.L. (1971) Weighted Norm Inequalities for Singular and Fractional Integrals. *Transactions of the American Mathematical Society*, **161**, 249-258.

[6] Ding, Y., Chen, J.C. and Fan, D.S. (2002) A Class of Integral Operators with Variable Kernels on Hardy Spaces. *Chinese Annals of Mathematics, Series A*, **23**, 289-296.

[7] Christ, M., Duoandikoetxea, J. and Rubio de Francia, J.L. (1986) Maximal Operators Related to the Radon Transform and the Calderón-Zygmund Method of Rotations. *Duke Mathematical Journal*, **53**, 189-209.

[8] Lu, S.Z. (1999) Multilinear Oscillatory Integrals with Calderón-Zygmund Kernel. *Science in China A*, **42**, 1039-1046. http://dx.doi.org/10.1007/BF02889505

[9] Ding, Y. and Lu, S.Z. (2001) Weighted Boundedness for a Class of Rough Multilinear Operators. *Acta Mathematica Sinica*, **17**, 517-526. http://dx.doi.org/10.1007/s101140100113

[10] 谵稳固. 多线性奇异积分的 Besov 估计[J]. 数学学报, 2002, 45(3): 417-424.

[11] 兰家诚, 梅春亮. 多线性分数次奇异积分在弱 Hardy 空间的 Lipschitz 估计. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 189-193.

[12] Wu, H.L. and Lan, J.C. (2013) Lipschitz Estimates for Fractional Multilinear Singular Integral on Variable Exponent Lebesgue Spaces. *Abstract and Applied Analysis*, **1**, 41-62. http://dx.doi.org/10.1155/2013/632384

[13] 张普能, 李亮. 多线性分数次积分算子在 Herz 型 hardy 空间中的有界性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2013, 36(5): 721-725.

[14] Lu, S.Z. and Zhang, P. (2003) Lipschitz Estimates for Generalized Commutators of Fractional Integrals with Rough Kernel. *Mathematische Nachrichten*, **252**, 70-85.

[15] Kováčik, O. and Rákosník, J. (1991) On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **1**, 592-618.

[16] Lu, S.Z., Ding, Y. and Yan, D.Y. (2007) Singular Integrals and Related Topics. World Scientific, Singapore, 149-150.

[17] Wu, H.L. and Lan, J.C. (2012) The Boundedness of Rough Fractional Integral Operators on Variable Exponent Lebesgue Spaces. *Analysis in Theory and Application*, **28**, 286-293.

[18] Ding, Y. and Lu, S.Z. (2000) Homogeneous Fractional Integrals on Hardy Spaces. *Tohoku Mathematical Journal*, **52**, 153-162.