Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(1), 37-41
Published Online January 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.61006

Several Inequalities Related to Circumcentre Lines for *n*-Dimensional Simplexes

Le Zhang, Weidong Wang

Department of Mathematics, China Three Gorges University, Yichang Hubei
Email: wdwxh722@163.com

Received: Nov. 25th, 2015; accepted: Jan. 21st, 2016; published: Jan. 28th, 2016

Abstract

The essay has introduced the notion of circumcentre line, and has obtained several inequalities related to circumscribed sphere radius in an *n*-dimensional simplex by making use of it.

Keywords

***n*-Dimensional Simplex, Circumcentre Line, Circumscribed Sphere Radius**

*n*维单形中与外心线相关的几个不等式

章　乐，王卫东

三峡大学理学院数学系，湖北 宜昌
Email: wdwxh722@163.com

收稿日期：2015年11月25日；录用日期：2016年1月21日；发布日期：2016年1月28日

摘　要

本文引入了*n*维单形外心线的概念，并应用它建立了几个与*n*维单形外接球半径有关的不等式。

文章引用: 章乐, 王卫东. *n* 维单形中与外心线相关的几个不等式[J]. 理论数学, 2016, 6(1): 37-41.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.61006

关键词

***n*维单形，外心线，外接球半径**

最近，文[1]引入了与三角形高线，内角平分线和中线平行的一个新概念——三角形的外心线。结合这个新概念，文[1] [2]通过类比三角形中与高线、内角平分线和中线相关的不等式，建立了如下与三角形外心线相关的不等式。

定理 A ([2]). 在锐角ΔABC中，设三条外心线的长为e_a，e_b，e_c，外接圆半径为R。

若$\lambda \ge 1$，则

$$\frac{1}{e_a^\lambda}+\frac{1}{e_b^\lambda}+\frac{1}{e_c^\lambda} \ge \frac{2^\lambda 3^{1-\lambda}}{R^\lambda}; \tag{1}$$

若$0<\lambda<1$，则不等式(1)是逆向的。当$\lambda \ne 1$时，不等式(1)和它的逆形式中等号成立当且仅当ΔABC为正三角形；当$\lambda = 1$时，(1)是恒等式。

定理 B ([2]). 在锐角ΔABC中，设三条外心线的长为e_a，e_b，e_c，外接圆半径为R。若$\lambda > 0$，则

$$e_a^\lambda + e_b^\lambda + e_c^\lambda \ge \frac{3^{\lambda+1}}{2^\lambda} R^\lambda,$$

等号成立当且仅当ΔABC为正三角形。

定理 C ([1]). 在锐角ΔABC中，设三条外心线的长为e_a，e_b，e_c，外接圆半径为R，则有

$$\frac{1}{e_b e_c}+\frac{1}{e_c e_a}+\frac{1}{e_a e_b} \le \frac{4}{3R^2},$$

等号成立当且仅当ΔABC为正三角形。

关于三角形中与外心线相关的几何不等式研究，还可以参见文[3] [4]。

在文[5]中，段继艳和王卫东把定理 A 和定理 C 中的不等式推广到四面体中，建立了四面体中与外心线相关的不等式。本文将上述不等式推广到n维单形中，得到了n维单形中与外心线相关的不等式。这里，我们先给出n维单形外心线的概念如下：

定义 1. 设Ω为n维欧氏空间E^n中的单形，其顶点集为$\{A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}\}$，过$n$维单形$\Omega$的一个顶点$A_i$和它的外接球的球心的直线，与顶点$A_i$所对面所在的平面相交于一点，该顶点$A_i$与交点之间的线段就叫做$n$维单形$\Omega$中过顶点$A_i$的一条外心线。

在n维单形Ω中，我们记过顶点A_i的外心线长为$e_i\ (i=1,2,3,4,\cdots,n+1)$，$\Omega$的外接球的半径为$R$。结合定义 1，我们建立了如下$n$维单形中与外心线相关的不等式。

定理 1. 在n维单形Ω中，设外接球的球心O在Ω的内部，若$\lambda \ge 1$，则

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{e_i^\lambda} \ge \frac{n^\lambda (n+1)^{1-\lambda}}{R^\lambda}; \tag{2}$$

若$0<\lambda<1$，则不等式(2)是逆向的。等号成立当$\lambda \ne 1$时当且仅当Ω中诸外心线长$e_i\ (i=1,2,\cdots,n+1)$都相等；当$\lambda = 1$时，(2)是恒等式。

定理 2. 在n维单形Ω中，设外接球的球心O在Ω的内部，若$\lambda > 0$，则

$$\sum_{i=1}^{n+1} e_i^\lambda \ge \frac{(n+1)^{\lambda+1}}{n^\lambda} R^\lambda, \tag{3}$$

等号成立当且仅当 Ω 中外心线长 $e_i\left(i=1,2,\cdots,n+1\right)$ 都相等。

定理 3. 在 n 维单形 Ω 中，设外接球的球心 O 在 Ω 的内部，则有

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{1}{e_ie_j}\le\frac{n^3}{\left(2n+2\right)R^2}, \tag{4}$$

等号成立当且仅当在 Ω 中外心线长 $e_i\left(i=1,2,\cdots,n+1\right)$ 都相等。

下面我们给出上述定理 1~3 的证明。

引理 1 (Holder 不等式[6]). 设 $a_k,b_k\left(k=1,2,\cdots,n\right)$ 均为正实数， p,q 为实数，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，若 $p\ge1$，则有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\ge\sum_{k=1}^{n}a_kb_k, \tag{5}$$

等号成立当且仅当 $a_1:b_1=a_2:b_2=\cdots=a_n:b_n$；若 $0<p<1$ 或 $p<0$，则不等式(5)是逆向的。

定理 1 的证明. 由于外接球的球心 O 在 n 维单形 Ω 的内部，为此设 n 维单形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$，$OA_2A_3\cdots A_{n+1}$，$OA_1A_3A_4\cdots A_{n+1}$，$\cdots$，$OA_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 的体积分别为 V，V_1，V_2，$\cdots$，V_{n+1}，则 Ω 的体积为 $V=V_1+V_2+V_3+\cdots+V_{n+1}$。又设 $A_iO\ \left(i=1,2,3,\cdots,n+1\right)$ 的延长线交 A_i 所对面于点 A_i'，则知 $OA_i=R$，$A_i'A_i=e_i$。由于

$$\frac{V_i}{V}=\frac{A_i'O}{A_i'A_i}=\frac{A_i'A_i-A_iO}{A_i'A_i}=\frac{e_i-R}{e_i}=1-\frac{R}{e_i},$$

于是令 $\frac{V_i}{V}=x_i$，则有 $\sum_{i=1}^{n+1}x_i=1$，且

$$\frac{R}{e_i}=1-x_i。 \tag{6}$$

因而可得

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{R}{e_i}=\sum_{i=1}^{n+1}\left(1-x_i\right)=n+1-\sum_{i=1}^{n+1}x_i=n,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{e_i}=\frac{n}{R}。 \tag{7}$$

因此，利用(7)和 Holder 不等式(5)知：当 $\lambda\ge1$ 时有

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{e_i^{\lambda}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}1\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}\ge\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{e_i}=\frac{n}{R}。 \tag{8}$$

由此可得不等式(2)。

同理，当 $0<\lambda<1$ 时，利用 Holder 不等式(5)的逆形式，可得不等式(8)的逆形式，即得不等式(2)的逆为真。

显然，由(7)知，当 $\lambda=1$ 时，(2)中等号成立；当 $\lambda\ne1$ 时，根据 Holder 不等式取等号的条件知，不等式(8)和它的逆形式中等号成立当且仅当诸外心线长 $e_i\left(i=1,2,\cdots,n+1\right)$ 相等，即知不等式(2)和它的逆形式中等号成立当且仅当 Ω 的诸外心线长 $e_i\left(i=1,2,\cdots,n+1\right)$ 都相等。定理 1 证毕。

定理 2 的证明. 当$\lambda \ge 1$时，由 Holder 不等式(5)有

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} e_i^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\sum_{i=1}^{n+1} 1\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \ge \sum_{i=1}^{n+1} e_i \,, \tag{9}$$

且根据 Holder 不等式取等号的条件知，(9)中等号成立当且仅当诸外心线长$e_i\left(i=1,2,\cdots,n+1\right)$都相等。又由 Holde 不等式(5)有

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} e_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{e_i}\right) \ge \left(n+1\right)^2 \,,$$

由此利用(7)可得

$$\sum_{i=1}^{n+1} e_i \ge \frac{\left(n+1\right)^2}{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{e_i}} = \frac{\left(n+1\right)^2}{n} R \,, \tag{10}$$

且等号成立当且仅当诸外心线长$e_i\left(i=1,2,\cdots,n+1\right)$都相等。

于是由(9)和(10)知

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} e_i^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n+1} e_i}{\left(n+1\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}} \ge \frac{\left(n+1\right)^{1+\frac{1}{\lambda}}}{n} R \,,$$

即有

$$\sum_{i=1}^{n+1} e_i^{\lambda} \ge \frac{\left(n+1\right)^{\lambda+1}}{n^{\lambda}} R^{\lambda} \,。$$

此即为不等式(3)。根据不等式(9)和(10)中取等号的条件知：不等式(3)中等号成立当且仅当诸外心线长$e_i\left(i=1,2,\cdots,n+1\right)$都相等。

当$0<\lambda<1$时，由不等式(2)的逆和 Holder 不等式(5)有

$$\sum_{i=1}^{n+1} e_i^{\lambda} \ge \frac{\left(n+1\right)^2}{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{e_i^{\lambda}}} \ge \frac{\left(n+1\right)^2}{n^{\lambda}\left(n+1\right)^{1-\lambda}} = \frac{\left(n+1\right)^{\lambda+1}}{n^{\lambda}} R^{\lambda} \,,$$

由此仍然得到不等式(3)。定理 2 证毕。

定理 3 的证明. 由(6)知：

$$\begin{aligned} \sum_{1\le i<j\le n+1} \frac{R^2}{e_i e_j} &= \sum_{1\le i<j\le n+1} \left(1-x_i\right)\left(1-x_j\right) = \sum_{1\le i<j\le n+1} \left(1-x_i-x_j+x_i x_j\right) \\ &= \sum_{1\le i<j\le n+1} 1 - \sum_{1\le i<j\le n+1} \left(x_i+x_j\right) + \sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j = \frac{n\left(n+1\right)}{2} - n + \sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j \end{aligned} \,, \tag{11}$$

又

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \ge \frac{2}{n} \sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j \,, \tag{12}$$

等号成立当且仅当诸$x_i\left(i=1,2,3,\cdots,n+1\right)$都相等。

于是知

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j \ge \left(\frac{2n+2}{n}\right)\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j \text{,}$$

由此结合 $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$，则有 $\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j \le \frac{n}{2n+2}$。将其代入(11)中有

$$\sum_{1\le i<j\le n+1} \frac{R^2}{e_i e_j} = \frac{n^2-n}{2} + \sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j \le \frac{n^2-n}{2} + \frac{n}{2n+2} = \frac{n^3}{2n+2} \text{。}$$

因此即得不等式(4)。

由不等式(12)取等号的条件知，不等式(4)中等号成立当且仅当诸 $x_i\ (i=1,2,3,\cdots,n+1)$ 相等，由(6)即知诸 $e_i\ (i=1,2,\cdots,n+1)$ 相等，定理 3 证毕。

利用 Holder 不等式(5)和不等式(4)，易知

$$\sum_{1\le i<j\le n+1} e_i e_j \ge \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{1}{e_i e_j}} \ge \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{\frac{n^3}{2(n+1)R^2}} = \frac{(n+1)^3}{2n} R^2 \text{。}$$

根据 Holder 不等式(5)取等号的条件知，上述不等式中等号成立当且仅当诸 $e_i e_j\ (1\le i<j\le n+1)$ 相等，即诸 $e_i\ (i=1,2,\cdots,n+1)$ 相等。由此可得如下结论：

推论 1. 在 n 维单形 Ω 中，设外接球的球心 O 在 Ω 的内部，则有

$$\sum_{1\le i<j\le n+1} e_i e_j \ge \frac{(n+1)^3}{2n} R^2 \text{，}$$

等号成立当且仅当 n 维单形 Ω 中外心线长 $e_i\ (i=1,2,\cdots,n+1)$ 都相等。

基金项目

国家自然科学基金项目(11371224)；三峡大学“求索”大学生创新活动计划重点项目。

参考文献 (References)

[1] 贺小刚，吴恒，王卫东．三角形中一类新的几何不等式[J]．数学通报, 2012, 51(2): 62-63.

[2] 陈贝贝，王卫东．关于三角形外心线的几个不等式[J]．数学通报, 2012, 51(10): 58-60.

[3] 赵龙潮，王卫东．涉及三角形外心线的一类几何不等式[J]．数学通报, 2012, 51(7): 55-57.

[4] 刘合勇，邓秀方，王卫东．联系三角形外心线的几个不等式[J]．中学数学教学参考, 2014, 1-2(下旬): 127-129.

[5] 段继艳，王卫东．四面体中与外心线相关的几个不等式[J]．数学通报, 2014, 53(7): 57-58.

[6] 匡继昌．常用不等式[M]．第 4 版．济南：山东科技技术出版社, 2010.