Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(2), 89-94
Published Online March 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.62013

A Note on the Definitions of Blocks of Epigroups

Qinqin Chen, Jingguo Liu*

School of Sciences, Linyi University, Linyi Shandong
Email: *liujingguo@lyu.edu.cn

Received: Feb. 28th, 2016; accepted: Mar. 9th, 2016; published: Mar. 16th, 2016

Abstract

A semigroup is called an epigroup if for any element in this semigroup some power of the element lies in the maximal subgroup of the given semigroup. In this paper two variants of definitions of blocks of semigroups are given and we prove that two of them turn out to coincide in the case of epigroups. We also offer the third definition of blocks of epigroups and show that if blocks of epigroups are subsemigroups, then this definition is equivalent to the other two.

Keywords

Epigroup, Block, Regular $\mathcal{D}$ -Class

关于完全π-正则半群分块定义的一个注记

陈琴琴，刘靖国*

临沂大学理学院，山东 临沂
Email: *liujingguo@lyu.edu.cn

收稿日期：2016年2月28日；录用日期：2016年3月9日；发布日期：2016年3月16日

摘 要

完全π-正则半群是其所含任意元的某个幂属于其最大子群的半群。论文给出了两个不同形式的半群分块

*通讯作者。

文章引用: 陈琴琴, 刘靖国. 关于完全 π-正则半群分块定义的一个注记[J]. 理论数学, 2016, 6(2): 89-94.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.62013

的定义，证明当所给半群为完全π-正则半群时这两个定义是等价的。论文还提供了分块的第三个定义，证明当分块为子半群时，完全π-正则半群的第三个分块定义与前两者等价。

关键词

完全π-正则半群，分块，正则$\mathcal{D}$-类

1. 引言与预备知识

完全π-正则半群S是其所含任意元x的某个幂x^n (n为正整数)属于其最大子群G_x的半群。包含元x的最大子群的单位元记作x^ω。易知$xx^\omega = x^\omega x$且$x^\omega x$是G_x中的群元，其在G_x中的群逆元记$\overline{x}$，映射$x \to \overline{x}$称作是S上的伪逆运算。Shevrin 的文献[1] [2]致力于完全π-正则半群的结构性理论研究(也见[3])。特别地，完全π-正则半群可以看作是伪逆运算为一元运算的一元半群。把完全π-正则半群看作是一元半群的思想最早在文献[1]提出，该方法表现在以下三个方面：提出问题，所讨论问题的结果陈述以及适当采取应用技巧。之后这种思想在后来的相关文献得到了新的发展，如文献[4]-[8]就采取这些方法研究该类半群。

半群分块的术语最早是定义在有限 0-单半群上，见 Graham [9]。而研究较早而且研究充分的是关于有限半群的分块为群的结果，具体内容参见文献[10] [11]或参考书目[12] [13]的相关章节。需要指出的是，上述文献用不同的方式定义了有限半群的分块。本文第 2 节，我们将把文献[11] [14]中的两个不同的有限半群上的分块定义推广到完全π-正则半群(甚至一般半群上)，证明了在完全π-正则半群情形下两个定义的等价性。最后在第 3 节，我们特别提到文献[12]分块的定义，指出并证明在特殊情况下，即分块为子半群的情形下，该定义和上述文献中的定义等价。

本文所用半群记号和术语详见参考文献[15]-[19]。下面给出本文需要的一些预备知识。

设a为半群S的一个元，元$a' \in S$称为a在S中的逆元，若$aa'a = a,\ a'aa' = a'$。元a在S中的逆元之集记为$V(a)$。半群S称为正则的，若S中的任一元都存在逆元。若$a^2 = a$，称a是S中的幂等元。若a属于S的一个子群，则称a是S中的群元。设A是S的子集，属于A的幂等元之集记为E_A，而属于A的群元之集记为$\mathrm{Gr}(A)$。由S的子集A生成的S的子半群记为$\langle A \rangle$。设A与B为半群S的两个子集，集合$\{x \in A : x \notin B\}$记为$A \setminus B$。假设A为半群S的一个理想(即$AS \subseteq A,\ SA \subseteq A$)，则$S/A$表示半群$S$的 Rees 商。

$\mathcal{J},\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{D}$和$\mathcal{H}$表示半群$S$上的 Green 关系，包含元$a$的$\mathcal{L}$-类记作$L_a$，类似可记$J_a, R_a, H_a$及$D_a$。如果$U$为半群$S$的子半群，则对$\mathcal{K} \in \{\mathcal{J},\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{D},\mathcal{H}\}$，$\mathcal{K}^U$表示$U$中的 Green 关系，从而我们有记号

$$K_a^U = \{u \in U : a\mathcal{K}^U u\}。$$

称半群S的$\mathcal{D}$-类D为正则的，若D中至少包含一个幂等元；此时D中任一元都是正则的。

下面重要的“定位”结果在后文中将会用到，来自([19]，命题 2.3.7)。

引理 1.1: 令a, b是半群S的一个$\mathcal{D}$-类D中的元。则$ab \in R_a \cap L_b$当且仅当$L_a \cap R_b$包含一个幂等元。

下述引理中的(i)~(iii)显然是([16]，定理 6.45)的推论，在([17]，引理 2.2)中有提及。

引理 1.2: 令S为一完全π-正则半群。则

(i) $\mathcal{J} = \mathcal{D}$；

(ii) 对$a \in S,\ x \in S^1$，若$a\mathcal{D}xa$，则$a\mathcal{L}xa$；

(iii) 对$a \in S,\ y \in S^1$，若$a\mathcal{D}ay$，则$a\mathcal{R}ay$。

令D为半群S的$\mathcal{D}$-类。称凭借集合$T = D^0$，0 为零元，为D的迹，其运算*如下定义：对任意$a, b \in D$，

$$a*b=\begin{cases}ab, & 若ab\in R_a\cap L_b,\\ 0, & 否则。\end{cases}$$

如果 S 为完全 π-正则半群，则由引理 1.2，$T=D^0$ 上的运算*可如下定义：对任意 $a,b\in D$，

$$a*b=\begin{cases}ab, & 若ab\in D,\\ 0, & 否则。\end{cases}$$

下面的引理来自([17]，引理 II.2.5；命题 II.4.8)。

引理 1.3： 令 D 为半群 S 的一个正则 $\mathcal{D}$-类，$T=D^0$ 为 D 的迹。

(i) T 的非零 $\mathcal{L}$-类为 S 的包含于 D 的非零 $\mathcal{L}$-类；

(ii) T 的非零 $\mathcal{R}$-类为 S 的包含于 D 的非零 $\mathcal{R}$-类；

(iii) T 为完全 0-单半群。

2. 分块的两个定义及等价性证明

2.1. 分块的两个定义

下列命题来自([11]，定理 3.1)，在该文献中，分块是定义在有限 0-单半群上，这儿同样可以证明该结论对一般的完全 0-单半群也成立。

命题 2.1： 令 S^0 为完全 0-单半群，$T=\langle \mathrm{Gr}S\rangle$。则 T 的正则 $\mathcal{D}$-类 B_i ($i\in I$)，称为 S^0 的分块，并具有如下性质：

(i) 对任意 $i\in I,\langle B_i\rangle=\langle \mathrm{Gr}(B_i)\rangle\subseteq B_i\cup 0$；

(ii) 对任意 $i\neq j, B_iB_j=B_jB_i=0$；

(iii) 对任意 $s\in S\setminus\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right), s^2=0$。

定义 2.1： 令 D 为半群 S 的正则 $\mathcal{D}$-类，则由引理 1.3，D 的迹 D^0 为完全 0-单半群。从而我们定义 D^0 的分块为半群 S 的分块。

定义 2.1'： 在上述定义中，如果不通过中介 D^0，我们也称半群 $T=\langle \mathrm{Gr}(D)\rangle$ 的正则 $\mathcal{D}$-类 B 为 D 的分块，并对 S 的分块 B 定义其商半群 B'：

$$B'=\begin{cases}B, & 若B=\langle B\rangle,\\ \langle B\rangle/(\langle B\rangle\setminus B), & 其他。\end{cases}$$

显然，如果 $B=\langle B\rangle$，则 B 是 S 的分块，否则 B 的迹 $B^0\cong B'$ 是 S 的分块，为完全 0-单半群。本文对 B,B' 不加区分(实际上，除了零元，二者具有同一凭借集合)，都称为 S 的分块。

Moura(见文献[14])也给出了有限半群 S 的分块的定义。下面我们叙述该定义，并且去掉该文献中有限半群条件的限制，推广到一般半群上。

令 S 为一半群，D 为 S 的正则 $\mathcal{D}$-类。如下定义 $\mathrm{Gr}(D)$ 上的等价关系“~”：

$a\sim b$ 当且仅当存在幂等元链 $e_0,e_1,\cdots,e_{n-1},e_n$ 使得 $a\mathcal{H}e_0, b\mathcal{H}e_n$，$e_i(\mathcal{R}\cup\mathcal{L})e_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$。

包含元 g 的~类记作 $\sim_g$，根据该定义显然有 $\sim_g\subseteq \mathrm{Gr}(D_g)$。

定义 2.2： 设 D 为半群 S 的一个正则 $\mathcal{D}$-类，由 D 中的一个 ~ 类生成的子半群模不属于 D 的元构成的理想，得到的 Rees 商称为 D 的分块。而 S 的所有正则 $\mathcal{D}$-类的分块称作 S 的分块。

2.2. 定义 2.1 和定义 2.2 的等价性的证明

注意到对任意 $e,f\in E_S$，

$$e\mathcal{L}f \Leftrightarrow ef=e,\ fe=f;\ e\mathcal{R}f \Leftrightarrow ef=f,\ fe=e,$$

并且 $H_e\subseteq \mathrm{Gr}(D_e)$，蕴含 H_e 是 $\langle \mathrm{Gr}(D_e)\rangle$ 的子群。从而若 $a\sim b$，则 $a\mathcal{D}^{\langle \mathrm{Gr}(D_a)\rangle}b$。这样我们可得如下结论。

引理 2.1: 设 D 为半群 S 的一个正则 $\mathcal{D}$-类，$T=\langle \mathrm{Gr}(D)\rangle$。对于 $a,b\in \mathrm{Gr}(D)$，如果 $a\sim b$，则 $(a,b)\in \mathcal{D}^{\mathrm{T}}$。

回到完全 π-正则半群的情形，下面的定理显然给出两个定义的一致性。首先注意到分块 B 是 $T=\langle \mathrm{Gr}(D)\rangle$ 的一个正则 $\mathcal{D}$-类，则由([19]，命题 2.3.2)，$E_B\neq\varnothing$。

定理 2.1: 设 D 为完全 π-正则半群 S 的一个正则 $\mathcal{D}$-类，并记 $T=\langle \mathrm{Gr}(D)\rangle$。则对于 T 的正则 $\mathcal{D}$-类 B 以及 $e\in E(B)$，有 $\langle B\rangle\cap D=\langle\sim_e\rangle\cap D$。

证明: 由分块的定义，$B=D_e^{\mathrm{T}}$，其中 $e\in E_S$。任取 $x\in B$，因为 $B\subseteq T=\langle \mathrm{Gr}(D)\rangle$，则形式上 $x=y_1y_2\cdots y_n$，其中 $y_k\in \mathrm{Gr}(D)$，$k=1,2,\cdots,n$。再取 $y\in V(x)\cap B$ (注意到 B 正则，则 $V(x)\cap B\neq\varnothing$)。记

$$x_k=y_ky_{k+1}\cdots y_nyy_1\cdots y_k,\ k=1,2,\cdots,n。$$

显然 $x=x_1x_2\cdots x_n$，且 $x_k\mathcal{R}^{\mathrm{T}}x_ky_{k+1}\cdots y_n=y_ky_{k+1}\cdots y_nyx\mathcal{L}^{\mathrm{T}}x$，这是因为

$$x_k=y_ky_{k+1}\cdots y_n\cdot y\cdot y_1\cdots y_k=y_ky_{k+1}\cdots y_nyx\cdot yy_1\cdots y_k,$$
$$x=xyx=y_1y_2\cdots y_{k-1}\cdot y_ky_{k+1}\cdots y_nyx.$$

于是，$x\mathcal{D}^{\mathrm{T}}x_k$，即 $x_k\in B\subseteq D$。另一方面，$y_k\in D$，即 $y_k\mathcal{D}^{S}x_k$，则由引理 1.2

$$y_k\mathcal{R}x_k=y_ky_{k+1}\cdots y_nyy_1\cdots y_k\mathcal{L}y_k,$$

这样 $x_k\mathcal{H}y_k$。易见 $x_k\in \mathrm{Gr}(D)$ (既然 $H_{y_k}\subseteq \mathrm{Gr}(D)$，并且 H_{y_k} 是 D 中的子群)，从而 $x_k\mathcal{H}^{\mathrm{T}}y_k$。现在 $x_k\in \mathrm{Gr}(B)$，$k=1,2,\cdots,n$。这样由引理 1.2，元 $x_k,y_{k+1}y_{k+2}\cdots y_nyy_1y_2\cdots y_k$ 和 x_{k+1} 落入如下图所示的 D_{x_k} 的“蛋壳”图。

$x_k=y_ky_{k+1}\cdots y_nyy_1\cdots y_k$		
$y_{k+1}y_{k+2}\cdots y_nyy_1\cdots y_k$		$x_{k+1}=y_{k+1}y_{k+2}\cdots y_nyy_1\cdots y_{k+1}$

容易看出 $y_{k+1}y_{k+2}\cdots y_nyy_1y_2\cdots y_k\in E_S$，这样 $x_k\sim x_{k+1}$，$k=1,2,\cdots,n-1$。现在对任意 $a\in B$，即 $a\mathcal{D}^{\mathrm{T}}e$，如前所证，$a=a_1a_2\cdots a_n$，其中 $a_i\in \mathrm{Gr}(B)\subseteq \mathrm{Gr}(D_e)$，$a_i\sim a_1$，$i=1,2,\cdots,n$。而 $a\mathcal{D}^{\mathrm{T}}e$ 蕴含着存在 $b\in B$ 使得 $a_i\mathcal{R}^{\mathrm{T}}b\mathcal{L}^{\mathrm{T}}e$，并有 $b=b_1b_2\cdots b_m$，其中 $b_j\in \mathrm{Gr}(B)$，$b_j\sim b_1, j=1,2,\cdots m$，特别有 $b_m\sim b_1$。但是由引理 1.2，$b_1\mathcal{R}b\mathcal{L}b_m$，从而 $a_i\mathcal{R}b_1$，$b_m\mathcal{L}e$，这当然蕴含着 $a_i\sim b_1$，$b_m\sim e$。既然 $a_i,b_1,b_m,e\in \mathrm{Gr}(D_e)$，$b_1\sim b_m$，则有 $a_i\sim e$。所以 $B\in\langle\sim_e\rangle$，从而 $\langle B\rangle\subseteq\langle\sim_e\rangle$。结果 $\langle B\rangle\cap D\subseteq\langle\sim_e\rangle\cap D$。

相反，令 $a=a_1a_2\cdots a_n\in\langle\sim_e\rangle$，其中 $a_i\in \mathrm{Gr}(D_e)$，$a_i\sim e$。则易证 $a\mathcal{D}^{\mathrm{T}}e$，即 $a_i\in B$。这样 $a\in\langle B\rangle$。□

3. 分块为半群的情形

文献[12]也定义了有限半群的分块的定义。下面我们给出该定义，注意这儿的半群不限于有限半群。

定义 3.1: 设 D 为半群 S 的一个正则 $\mathcal{D}$-类。称 D 的子集 B 为半群 S 的分块，若 B 为满足如下性质

$$ab\in B\Rightarrow ab\in B,\ 或ba\in B$$

的 D 的最大子集。对 S 的分块 B 定义其商半群 B'：

$$B' = \begin{cases} B, & 若 B = \langle B \rangle, \\ \langle B \rangle / (\langle B \rangle \setminus B), & 其他。 \end{cases}$$

由定义 3.1，设 D 的子集 B 为半群 S 的分块，则对任意 $b \in B$，对 $a \in D$，若有 $ab \in D$ 或 $ba \in D$ 至少有一个成立，则由 B 的最大性，可得 $a \in B$。

引理 3.1：设 B 如定义 3.1 所给出的完全 π-正则半群 S 的一个正则 $\mathcal{D}$-类 D 的分块，则 $B \subseteq \mathrm{Gr}(D)$。

证明：对任意 $a \in B$，由定义 3.1，$a^2 \in B$，从而 $a^2 \mathcal{D} a$，由引理 1.2，$a^2 \mathcal{H} a$，再由([19]，定理 2.2.5)，H_a 为 S 的子群，从而 $a \in \mathrm{Gr}(D)$。这就证明了 $B \subseteq \mathrm{Gr}(D)$。 □

注：由上述引理的证明，定义 3.1 中的分块都是 S 中的群元。

我们下面来证明定义 3.1 中的分块与定义 2.2 的关系。

命题 3.2：令 D 为完全 π-正则半群 S 的一个正则 $\mathcal{D}$-类，并记 $T = \langle \mathrm{Gr}(D) \rangle$。设 D_g^{T} 是 T 的包含 $g\,(g \in \mathrm{Gr}(D))$ 正则 $\mathcal{D}$-类，B 包含 g 且为满足性质

$$ab \in B \Rightarrow ab \in B,\ 或 ba \in B$$

D 的最大子集。则 $B \subseteq D_g^{\mathrm{T}}$。

证明：设 $a \in B$，则由引理 3.1，$a, g \in \mathrm{Gr}(D)$，又由 B 的性质有 $ag \in B$ 或者 $ga \in B$。不妨假定 $ag \in B$，由引理 1.2，$a \mathcal{R} ag \mathcal{L} g$，这样由引理 1.1，存在 $e \in E_S$ 使得 $a \mathcal{L} e \mathcal{R} ge$，这样就得到 $a \sim ge$，再由引理 2.1，$a \mathcal{D}^{\mathrm{T}} g$。这就证明了 $B \subseteq D_g^{\mathrm{T}}$。 □

需要说明的是，一般情形下，定义 2.2 和定义 3.1 并不等价，考察如下半群：

$$A_2 = \langle c, d : c^2 = 0, d^2 = d, cdc = c, dcd = d \rangle。$$

由定义 2.2 所定义的分块 $B_1 = \sim_d = \{d, cd, dc\}$，从而 $B_1' = A_2$。而由定义 3.1 定义的分块 $B_2 = \{d, cd\}$ (或 $B_3 = \{d, dc\}$)，此时 $B_2' = B_2$ $(B_3' = B_3)$。显然二者不等。

文献[12]所给分块定义主要考察分块为半群的情形，实际上，在命题 3.2 中分块 D_g^{T} 若为半群，则本文所给的三个定义等价，这是因为注意到命题 3.2 的结果 $B \subseteq D_g^{\mathrm{T}}$，只要证 $D_g^{\mathrm{T}} \subseteq B$ 即可。这是比较容易证明的，因为由命题 3.2，$B \subseteq D_g^{\mathrm{T}}$，而当 D_g^{T} 为半群，则对任意 $a, b \in D_g^{\mathrm{T}}$，必有 $ab \in D_g^{\mathrm{T}}$，由定义 3.1 中规定的 B 的最大性，可知一定有 $B = D_g^{\mathrm{T}}$。

资助项目

该论文得到临沂大学校级大学生创新创业训练项目的支持(2015 年度)。

参考文献 (References)

[1] Shevrin, L.N. (1995) On the Theory of Epigroups, I. *Russian Academy of Sciences*. *Sbornik Mathematics*, **82**, 485-512. http://dx.doi.org/10.1070/sm1995v082n02abeh003577

[2] Shevrin, L.N. (1995) On the Theory of Epigroups, II. *Russian Academy of Sciences*. *Sbornik Mathematics*, **83**, 133-154. http://dx.doi.org/10.1070/sm1995v083n01abeh003584

[3] Shevrin, L.N. (2005) Epigroups. In: Kudravtsev, V.B. and Rosenberg, I.G., Eds., *Structural Theory of Automata*, *Semigroups*, *and Universal Algebra*, Springer, Berlin, 331-380. http://dx.doi.org/10.1007/1-4020-3817-8_12

[4] Liu, J.G. (2014) A Relation on the Congruence Lattice of an Epigroup. *Advances in Mathematics* (*China*), **43**, 498-504.

[5] Liu, J.G. (2013) Epigroups in which the Operation of Taking Pseudo-Inverse Is an Endomorphism. *Semigroup Forum*, **87**, 627-638.

[6] Liu, J.G. (2013) Epigroups in which the Relation of Having the Same Pseudo-Inverse Is a Congruence. *Semigroup Forum*, **87**, 187-200. http://dx.doi.org/10.1007/s00233-012-9462-7

[7] Liu, J.G. (2015) Epigroups in which the Idempotent-Generated Subsemigroups Are Completely Regular. *Journal of Mathematical Research with Applications* (*China*), **35**, 529-542.

[8] Liu, J.G., Chen, Q.Q. and Han C.M. (2016) Locally Completely Regular Epigroups. *Communications in Algebra*.

[9] Graham, R.L. (1968) On Finite 0-Simple Semigroups and Graph Theory. *Mathematical Systems Theory*, **2**, 325-339. http://dx.doi.org/10.1007/bf01703263

[10] Margolis, S.W. and Pin, J.-E. (1985) Product of Group Languages. *FCT Conference*, *Lecture Notes in Computer Science*, **199**, 285-299. http://dx.doi.org/10.1007/bfb0028813

[11] Pin, J.-E. (1995) PG = BG: A Success Story. In: Fountain J., Ed., *NATO Advanced Study Institute Semigroups*, *Formal Languages and Groups*, Kluwer Academic, Dordrecht, 33-47. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-011-0149-3_2

[12] Almeida, J. (1994) Finite Semigroups and Universal Algebra (English Translation). World Scientific, Singapore.

[13] Rhodes, J. and Steinberg, B. (2009) The q-Theory of Finite Semigroups. Springer, New York. http://dx.doi.org/10.1007/b104443

[14] Moura, A. (2012) E-Local Pseudovarieties. *Semigroup Forum*, **85**, 169-181. http://dx.doi.org/10.1007/s00233-012-9413-3

[15] Clifford, A.H. and Preston G.B. (1961) The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. I, Mathematical Surveys, No.7. American Mathematical Society, Providence.

[16] Clifford, A.H. and Preston G.B. (1967) The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. II, Mathematical Surveys, No.7. American Mathematical Society, Providence.

[17] Grillet, P.A. (1995) Semigroups: An Introduction to the Structure Theory, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 193. Marcel Dekker Inc., New York.

[18] Higgins, P.M. (1992) Techniques of Semigroup Theory. Oxford University Press, Oxford.

[19] Howie, J.M. (1995) Fundamentals of Semigroup Theory. Clarendon, Oxford.