Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(2), 116-120
Published Online March 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.62017

Hans汉斯

Entire Solutions of Fermat Type Functional Equations

Jiangmei Duan, Min Su

Department of Mathematics, Yunnan Normal University, Yunnan Kunming
Email: Djiangmei@163.com

Received: Mar. 10th, 2016; accepted: Mar. 23rd, 2016; published: Mar. 30th, 2016

Abstract

In this paper, a new proof is given for the result that if $n \ge 3$, there are no non-constant entire solutions of the functional equation $f^n(z)+g^n(z)=1$.

Keywords

Fermat Type Functional Equation, Entire Functions, Normal Families Theory

关于Fermat型函数方程的整函数解

段江梅，苏　敏

云南师范大学数学学院，云南　昆明
Email: Djiangmei@163.com

收稿日期：2016年3月10日；录用日期：2016年3月23日；发布日期：2016年3月30日

摘　要

本文对$n \ge 3$时，函数方程$f^n(z)+g^n(z)=1$没有非常数整函数解的结果给出新的证明。

文章引用：段江梅，苏敏．关于 Fermat 型函数方程的整函数解[J]．理论数学, 2016, 6(2): 116-120.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.62017

关键词

Fermat型函数方程，整函数，正规族理论

1. 引言及主要结果

1637 年法国数学家费马提出了如下猜想：当 $n \ge 3$ 时，丢番图方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有非平凡的整数解。1994 年这个猜想被英国数学 A. Wiles 完全证明。要寻找方程 $x^n + y^n = z^n$ 在整数环上的非平凡解，可以转化为求代数曲线 $x^n + y^n = 1$ 上的有理点。

然而早在 1965 年，当 $n \ge 2$ 时，关于 Fermat 型函数方程

$$f^n(z) + g^n(z) = 1 \tag{1}$$

在整函数环，或是亚纯函数域上的非平凡解的状况已经完全清楚了。容易证明：当 $n \ge 3$ 时，函数方程(1)不存在非常数的整函数解；当 $n \ge 4$ 时，函数方程(1)不存在非常数亚纯函数解。

类似地，研究丢番图方程 $x^n + y^n + z^n = t^n$ 整数解的存在性问题可以转化为研究方程 $x^n + y^n + z^n = 1$ 的有理数解的存在性问题。然而，当 $n \ge 6$ 时，方程 $x^n + y^n + z^n = t^n$ 整数解的状况不是十分清楚。

相应地，不妨先考虑当 $n \ge 2$ 时，Fermat 型函数方程

$$f^n(z) + g^n(z) + h^n(z) = 1 \tag{2}$$

在整函数环，或是亚纯函数域上的非平凡解。对于该问题的研究已有如下结论：

1985 年 W. K. Hayman [1]证明了：当 $n \ge 9$ 时，方程(2)不存在非常数亚纯解；当 $n \ge 7$ 时，方程(2)不存在非常数整函数解。此外，当 $2 \le n \le 5$ 时，G. G. Gundersen [2]-[4]等人找到了满足方程(2)的非常数整函数解；当 $n = 6$ 时，G. G. Gundersen [5]构造了满足方程(2)的非常数亚纯解。

近期，苏敏[6]等人证明了：当 $n = 6$ 时，方程(2)不存在级小于 1 的非常数整函数解；当 $n = 8$ 时，方程(2)不存在级小于 1 的非常数亚纯函数解。

本文主要利用正规族理论的知识对 $n \ge 3$ 时，函数方程(1)没有非常数整函数解的结果给出新的证明。

对于探究函数方程 $f^6(z) + g^6(z) + h^6(z) = 1$ 整函数解的存在性，运用本文的方法，利用正规族理论的 Zalcman 引理对特殊情况的整函数解作降级处理，具有一定的可行性。

定理 1：当 $n \ge 3$ 时，函数方程(1)没有级小于等于 1 的非常数整函数解。

定理 2：当 $n \ge 3$ 时，函数方程(1)没有非常数整函数解。

2. 几个概念与引理

在定理 1 的证明之前，先介绍本文中常用的几个概念与引理：

定义 1 [7]：设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数，如果从该族中的每一个函数序列 $f_n(z)(n = 1, 2, \cdots)$ 可以选出一个子序列 $f_{n_k}(z)(k = 1, 2, \cdots)$ 满足下列两个条件之一：

1) $f_{n_k}(z)(k = 1, 2, \cdots)$ 在 D 内闭一致收敛；

2) $f_{n_k}(z)(k = 1, 2, \cdots)$ 在 D 内闭一致趋于 ∞，

则称此函数族 $\mathcal{F}$ 在 D 内是正规的。

定义 2 [7]：设 $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$，我们称一非负实数为 z_1 与 z_2 之间的球面距离，记作 $d(z_1, z_2)$：

$$d(z_1,z_2)=\begin{cases}\dfrac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}}, & z_1,z_2\in\mathbb{C};\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & z_1\in\mathbb{C}, z_2=\infty.\end{cases}$$

定义 3 [7]：设 $f(z)$ 在 $|z|<R(0<R\le\infty)$ 内亚纯，我们称 $f^{\#}(z)=\dfrac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ 为 $f(z)$ 的球面导数。

定义 4 [7]：设 $f(z)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，$f(z)$ 的级定义为 $\rho=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log^+ T(r,f)}{\log r}$。

引理 1 [8]：设 $f(z)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数，其级 ρ 有穷，则对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $E\subset(1,+\infty)$，使得 $\int_E\dfrac{\mathrm{d}r}{r}<\infty$，且

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\le|z|^{\rho-1+\varepsilon}\quad\left(|z|\in R^+\setminus E\cup[0,1]\right).$$

引理 2 [7]：(Marty 定则)设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数。$\mathcal{F}$ 在 D 内正规的充要条件是：对于 D 内的任一有界闭区域 $\bar{d}\subset D$，存在相应的正数 M (与 $\bar{d}$ 有关)，使得对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 $f(z)$，有

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\le M\quad(z\in\bar{d})$$

即 $f^{\#}(z)\le M\ (z\in\bar{d})$。

引理 3 [7]：设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数。如果 $\mathcal{F}$ 在 $z_0\in D$ 内不正规，则存在 D 中的点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\mathcal{F}$ 中的函数列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$，正数列 $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数 $g(z)$，使得当 $n\to\infty$ 时，$z_n\to z_0,\rho_n\to0^+$ 且

$$f_n(z_n+\rho_n z)\to g(z)\,(\text{按球面距离在}\ \mathbb{C}\ \text{上内闭一致收敛}),$$

并且 $g^{\#}(z)\le g^{\#}(0)=1(z\in\mathbb{C})$。特别地，$g(z)$ 的级不超过 2。

引理 4 [7]：设 $f(z)$ 为整函数。若 $f(z)$ 的球面导数 $f^{\#}(z)$ 有界，则 $f(z)$ 的级至多为 1。

引理 5 [7]：若 $f(z)$ 是无穷级亚纯函数，则存在一个序列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$，使得当 $z_k\to\infty(k\to\infty)$ 时，有 $\dfrac{\log f^{\#}(z_k)}{\log|z_k|}\to\infty$。

3. 定理的证明

3.1. 定理 1 的证明

假设函数方程(1)存在级小于等于 1 的非常数整函数解 $f(z),g(z)$，则 $f^n(z),g^n(z)$ 一定线性无关，故 $W\left(f^n(z),g^n(z)\right)\not\equiv0$。

由(1)式可得方程组

$$\begin{cases}f^n(z)+g^n(z)=1,\\ nf^{n-1}(z)\cdot f'(z)+ng^{n-1}(z)\cdot g'(z)=0.\end{cases}$$

令 $\tau(z)=\begin{vmatrix}f(z) & g(z)\\ f'(z) & g'(z)\end{vmatrix}$，则 $W\left(f^n,g^n\right)=nf^{n-1}g^{n-1}\tau\not\equiv0$，显然 $\tau(z)\not\equiv0$。

另一方面，由克莱姆法则得

$$f^{n-1}(z)=\frac{g'(z)}{\tau(z)},g^{n-1}(z)=\frac{f'(z)}{\tau(z)},$$

从而

$$\tau^2(z)=\frac{f'g'}{f^{n-1}g^{n-1}}=\frac{1}{(fg)^{n-2}}\cdot\frac{f'}{f}\cdot\frac{g'}{g}, \tag{3}$$

故 $\tau^n=\frac{\tau^{n-2}}{f^{n-2}g^{n-2}}\cdot\frac{f'}{f}\cdot\frac{g'}{g}=\left(\frac{g'}{g}-\frac{f'}{f}\right)^{n-2}\frac{f'}{f}\cdot\frac{g'}{g}$。

由题设和(1)式知：$\rho_f=\rho_g\le 1$，

故由引理 1 知：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $E\subset(1,+\infty)$，使 $\int_E\frac{\mathrm{d}r}{r}<\infty$，且

$$|\tau(z)|^n\le\left(\left|\frac{g'}{g}\right|+\left|\frac{f'}{f}\right|\right)^{n-2}\left|\frac{f'}{f}\right|\cdot\left|\frac{g'}{g}\right|<2^n|z|^{n\varepsilon}\quad\left(|z|\in R^+\setminus E\cup[0,1]\right),$$

从而 $|\tau(z)|<2|z|^{\varepsilon}\ \left(|z|\in R^+\setminus E\cup[0,1]\right)$，

又由于 $\tau(z)$ 为整函数，所以 $\tau(z)$ 为常数，设 $\tau(z)\equiv A$。下面证明：$A=0$。

我们断言：$f(z)g(z)$ 为非常数整函数。事实上，若 $fg\equiv c$ (c为非零常数)，则 $f^n+\left(\frac{c}{f}\right)^n=1\ \Rightarrow$ $f^n(f^n-1)=-c^n$，所以 f^n 不取 0，1，这与 $f^n(z)$ 至多有一个有穷 picard 例外值矛盾。

由于 $f(z)g(z)$ 为非常数整函数，故存在 $B>0,r_0>0$，使当 $r>r_0$ 时，

$$\max_{|z|=r}|f(z)g(z)|\ge Br. \tag{4}$$

又由(3)、(4)式及引理 1 知：对上述的 r 及 $\forall\varepsilon>0$，存在 $E'\subset(1,+\infty)$，使 $\int_{E'}\frac{\mathrm{d}r}{r}<\infty$，且

$$|A|^2\le\frac{1}{\max\limits_{|z|=r}|f(z)g(z)|^{n-2}}\cdot\left|\frac{f'}{f}\right|\cdot\left|\frac{g'}{g}\right|\le\frac{1}{(Br)^{n-2}}\cdot r^{2\varepsilon}\quad\left(r\in R^+\setminus E'\cup[0,1]\right),$$

由于 $n\ge 3$，令 $r\to\infty$，$|A|^2\le 0$，故 $A=0$ 即 $\tau(z)=0$，矛盾，定理 1 得证。

3.2. 定理 2 的证明

假设函数方程(1)存在非常数的整函数解 $f(z),g(z)$，那么由 z 的任意性可以得到一组无穷级的整函数解 $F(z)=f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}\right),G(z)=g\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}\right)$。

由于 $F(z)$ 是无穷级整函数，由引理 5 知存在一个序列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$，使得当 $z_k\to\infty(k\to\infty)$ 时，有

$$\frac{\log F^{\#}(z_k)}{\log|z_k|}\to\infty. \tag{5}$$

记 $F_k(z)=F(z_k+z)(k=1,2,\cdots)$，$\mathcal{F}=\{F_k(z):k=1,2,\cdots\},\Delta=\{z:|z|<1\}$，由于

$$F_k^{\#}(0)=\frac{|F_k'(0)|}{1+|F_k(0)|^2}=\frac{|F'(z_k)|}{1+|F(z_k)|^2}=F^{\#}(z_k)$$

结合(5)式知 $F^{\#}(z_k)\to\infty(k\to\infty)$，所以 $F_k^{\#}(0)\to\infty(k\to\infty)$。于是由引理 2 知：$\mathcal{F}=\{F_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ 在原点的某邻域内不正规，从而由引理 3 知：存在点列 $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\Delta$，正数列 $\{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$，$\mathcal{F}$ 中的函数列不妨仍记为 $\{F_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ 以及 $\mathbb{C}$ 中的非常数整函数 $\tilde{f}(\xi)$，使得当 $k\to\infty$ 时，$\omega_k\to 0,\rho_k\to 0^+$，且

$$F_k(\omega_k+\rho_k\xi)\to\tilde{f}(\xi)\text{(按球面距离在}\mathbb{C}\text{上内闭一致收敛)},$$

即

$$f\left(e^{e^{z_k+\omega_k+\rho_k\xi}}\right)\to\tilde{f}(\xi)\text{(按球面距离在}\mathbb{C}\text{上内闭一致收敛)},$$

并且 $\tilde{f}^{\#}(\xi)\le\tilde{f}^{\#}(0)=1(z\in\mathbb{C})$，再由引理 4 知，$\tilde{f}(\xi)$ 的级 $\rho_{\tilde{f}}\le 1$，

此时必存在函数列 $\left\{g\left(e^{e^{z_{k_j}+\omega_{k_j}+\rho_{k_j}\xi}}\right)\right\}_{j=1}^{\infty}\subset\left\{g\left(e^{e^{z_k+\omega_k+\rho_k\xi}}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$，

使得当 $j\to\infty$ 时，$g^n\left(e^{e^{z_{k_j}+\omega_{k_j}+\rho_{k_j}\xi}}\right)\to 1-\tilde{f}^n(\xi)$(按球面距离在 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛)，

故存在非常数的整函数 $\tilde{g}(\xi)$ 使得 $1-\tilde{f}^n(\xi)=\tilde{g}^n(\xi)$，

即 $\tilde{f}^n(\xi)+\tilde{g}^n(\xi)=1$，故 $\rho_{\tilde{f}}=\rho_{\tilde{g}}\le 1$，与定理 1 矛盾，定理 2 得证。

参考文献 (References)

[1] Hayman, W.K. (1985) Waring's Problem für analytische Funktionen. *Bayerische Akademie der Wissenschaften Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. Sitzungsberichte*, **1984**, 1-13.

[2] Molluzzo, J. (1972) Monotonicity of Quadrature Formulas and Polynomial Representation. Doctoral Thesis, Yeshiva University, New York.

[3] Green, M. (1975) Some Picard Theorems for Holomorphic Maps to Algebraic Varieties. *American Journal of Mathematics*, **97**, 43-75. http://dx.doi.org/10.2307/2373660

[4] Gundersen, G.G. and Kauya Tohge. (2004) Entire and Meromorphic Solutions of $f^5(z)+g^5(z)+h^5(z)=1$. *Symposium on Complex Differential and Functional Equations*, *Report Series No.* 6, Department of Mathematics, University of Joensuu, Joensuu, 57-67.

[5] Gundersen, G.G. (1998) Meromorphic Solutions of $f^6(z)+g^6(z)+h^6(z)=1$. *Analysis*, **18**, 285-290.

[6] 苏敏, 李玉华. 关于函数方程非平凡亚纯解的研究[J]. 云南师范大学学报: 自然科学版, 2009, 29(2): 41-44.

[7] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[8] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of $f(z+\eta)$ and Difference Equations in the Complex Plane. *The Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. http://dx.doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1

[9] 杨乐. 值分布理论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.