Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 177-181
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63027

On the Equitable Presentation for a Quantum Deformed Algebra

Jiaqi Chen, Lixia Ye*

Department of Mathematics, Zhejiang International Studies University, Hangzhou Zhejiang
Email: *yelixia@sina.com

Received: Apr. 27th, 2016; accepted: May 10th, 2016; published: May 13th, 2016

Abstract

Basing on the quantum group $U_q(sl_2)$, we define a quantum deformed algebra $U_q\left(f_n\left(K,\bar{K}\right)\right)$ in this paper. Moreover, we construct its equitable presentation.

Keywords

Quantum Deformed Algebra, Hopf Algebra, Equitable Presentation

一类量子形变代数的等价表示

陈佳琦，叶丽霞*

浙江外国语学院数学系，浙江 杭州
Email: *yelixia@sina.com

收稿日期：2016年4月27日；录用日期：2016年5月10日；发布日期：2016年5月13日

摘 要

对量子群$U_q(sl_2)$进行推广，构造了一类量子形变代数$U_q\left(f_n\left(K,\bar{K}\right)\right)$，并对它的等价表示进行了研究。

*通讯作者。

文章引用: 陈佳琦, 叶丽霞. 一类量子形变代数的等价表示[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 177-181.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63027

关键词

量子形变代数，Hopf代数，等价表示

1. 引言

Hopf 代数和量子群在几何和物理学中有广泛应用，而有限维单李代数 sl_2 的量子包络代数 $U_q(sl_2)$ 是一类特殊的 Hopf 代数，是研究一般量子代数的基础。继文[1]对 $U_q(sl_2)$ 的等价表示进行研究之后，已有不少学者[2]-[5]对 $U_q(sl_2)$ 进行了推广。文[2]引进了量子代数 $U_q(f(K))$，并对其一些相关理论进行了研究。2000 年，王顶国等[3]研究了量子群 $U_q(f(K))$ 的 Hopf 代数结构和有限维表示，并进一步得到量子群 $U_q(f(K,H))$ 的有限维表示[4]。2008 年，潘艳[5]对量子群 $U_q(f(K))$ 的等价表示进行了研究。基于以上研究方法，可将量子包络代数 $U_q(sl_2)$ 再次推广，构造量子代数 $U_q(f_n(K,\bar{K}))$，并讨论其等价表示。

2. $U_q(f_n(K,\bar{K}))$ 的定义及等价表示

设 $\mathbb{C}$ 为复数域，q 不是单位根，n 是一个正整数。文[6]对有限维半单李代数 g，定义了一类弱量子代数 $wU_q(g)$，并构造了其弱 Hopf 代数结构。当 $g=sl_2$ 时，可类似地定义一类弱量子代数 $U_q(f_n(K,\bar{K}))$。

定义 1 设 n 是一个正整数，代数 $U_q(f_n(K,\bar{K}))$ 是由生成子 $K,\bar{K},J,E,F$ 生成，并满足以下关系式：

$$J=K\bar{K}=\bar{K}K,\quad JK=JK=K,\quad J\bar{K}=\bar{K}J=\bar{K}, \tag{1}$$

$$KE=q^2EK,\quad E\bar{K}=q^2\bar{K}E, \tag{2}$$

$$KF=q^{-2}FK,\quad F\bar{K}=q^{-2}\bar{K}F, \tag{3}$$

$$EF-FE=f_n(K,\bar{K}),\text{其中 } f_n(K,\bar{K})=\frac{K^n-\bar{K}^n}{q^n-q^{-n}}。 \tag{4}$$

当 n 是一个正偶数时，$wU_q(g)$ 是一个弱 Hopf 代数[6]，故 $U_q(f_n(K,\bar{K}))$ 在对应双代数结构下也构成一个弱 Hopf 代数。需要说明的是，当 $J=1$ 时，$U_q(f_n(K,\bar{K}))$ 同构于 $U_q(f(K))$。为了不失一般性，下文假设 $J\neq 1$，即 $K,\bar{K}$ 都不可逆。

类似于文[6]的定理 2.2，由定义 1 易证得性质 1 成立。

性质 1 在代数 $U_q(f_n(K,\bar{K}))$ 中，$J^2=J$ 且 $xJ=Jx=x$ 对 $\forall x\in U_q(f_n(K,\bar{K}))$ 都成立。

定义 2 $\mathbb{C}-$代数 $A_n(sl_2)$ 是由 $X,\bar{X},\bar{J},Y,Z$ 生成的，且满足以下关系式：

$$\bar{J}=\bar{X}X=X\bar{X},\quad \bar{J}X=X\bar{J}=X,\quad \bar{J}\bar{X}=\bar{X}\bar{J}=\bar{X}, \tag{5}$$

$$\frac{q^nYZ-q^{-n}ZY}{q^n-q^{-n}}=\bar{J}, \tag{6}$$

$$\frac{qZX-q^{-1}XZ}{q-q^{-1}}=X\bar{X}^n,\quad \frac{q\bar{X}Z-q^{-1}Z\bar{X}}{q-q^{-1}}=X^{n-1}, \tag{7}$$

$$\frac{qXY-q^{-1}YX}{q-q^{-1}}=X\bar{X}^n,\quad \frac{q\bar{X}Y-q^{-1}Y\bar{X}}{q-q^{-1}}=\bar{J}。 \tag{8}$$

由定义 2 可得到以下性质 2。

性质 2 在代数 $A_n(sl_2)$ 中，$\bar{J}^2=\bar{J}$，且 $\bar{J}x=x\bar{J}=x$ 对 $\forall x\in A_n(sl_2)$ 都成立。

引理 1 在代数 $A_n(sl_2)$ 中，如下关系式成立：

$$X^nZ=\left(1-q^{2n}\right)\bar{J}+q^{2n}ZX^n,\quad \bar{X}^nZ=\left(1-q^{-2n}\right)\bar{J}+q^{-2n}Z\bar{X}^n,\tag{9}$$

$$YX^n=\left(1-q^{2n}\right)\bar{J}+q^{2n}X^nY,\quad \bar{X}^nY=\left(1-q^{2n}\right)\bar{J}+q^{2n}Y\bar{X}^n。\tag{10}$$

证 由等式 $\dfrac{qZX-q^{-1}XZ}{q-q^{-1}}=X\bar{X}^n$ 可得 $XZ=X\bar{X}^n\left(1-q^2\right)+q^2ZX$，等式两边同时左乘 X 得，

$$X^2Z=X^2\bar{X}^n\left(1-q^{-2}\right)+q^{-2}XZX=X^2\bar{X}^n\left(1-q^{-4}\right)+q^{-4}ZX^2,$$

如此继续可得，

$$X^nZ=\left(1-q^{2n}\right)X^n\bar{X}^n+q^{2n}ZX^n=\left(1-q^{2n}\right)\bar{J}^n+q^{2n}ZX^n。$$

由性质 2 可知 $\bar{J}^n=\bar{J}$，故 $X^nZ=\left(1-q^{2n}\right)\bar{J}+q^{2n}ZX^n$。

由 $\dfrac{q\bar{X}Z-q^{-1}Z\bar{X}}{q-q^{-1}}=X^{n-1}$ 可得 $\bar{X}Z=X^{n-1}\left(1-q^{-2}\right)+q^{-2}Z\bar{X}$，等式两边同时左乘 $\bar{X}$ 得，

$$\bar{X}^2Z=\bar{X}X^{n-1}\left(1-q^{-2}\right)+q^{-2}\bar{X}Z\bar{X}=\bar{X}X^{n-1}\left(1-q^{-4}\right)+q^{-4}Z\bar{X}^2,$$

如此继续可得，

$$\bar{X}^nZ=\left(1-q^{-2n}\right)X^n\bar{X}^n+q^{-2n}Z\bar{X}^n=\left(1-q^{-2n}\right)\bar{J}+q^{-2n}Z\bar{X}^n,$$

则等式(9)得证。同理，由等式(8)可证等式(10)成立。

定理 1 $U_q\left(f_n\left(K,\bar{K}\right)\right)\cong A_n\left(sl_2\right)$，其中同构映射 $\varphi_1:U_q\left(f_n\left(K,\bar{K}\right)\right)\to A_n\left(sl_2\right)$ 满足

$$\varphi_1(K)=X,\quad \varphi_1(\bar{K})=\bar{X},\quad \varphi_1(J)=\bar{J},$$

$$\varphi_1(E)=\frac{\left(\bar{J}-X^nZ\right)q^{-n}}{q^n-q^{-n}},\quad \varphi_1(F)=\frac{Y-\bar{X}^n}{q^n-q^{-n}}。$$

φ_1 的逆映射 $\varphi_2:A_n\left(sl_2\right)\to U_q\left(f_n\left(K,\bar{K}\right)\right)$ 满足

$$\varphi_2(X)=K,\quad \varphi_2(\bar{X})=\bar{K},\quad \varphi_2(\bar{J})=J,$$

$$\varphi_2(Y)=\bar{K}^n+JF\left(q^n-q^{-n}\right),\quad \varphi_2(Z)=\bar{K}^n-\bar{K}^nE\left(q^{2n}-1\right)。$$

证 先证明 φ_1 为代数同态映射，即要证 φ_1 保持 $U_q\left(f_n\left(K,\bar{K}\right)\right)$ 定义中的关系式。

由性质 2 可知 $\bar{J}^n=\bar{J}$，由(7)可知 $XZ=X\bar{X}^n\left(1-q^2\right)+q^2ZX$，于是

$$\begin{aligned}\varphi_1(KE)&=\left(X\bar{J}-X^nXZ\right)q^{-n}\left(q^n-q^{-n}\right)^{-1}\\&=\left(X\bar{J}-X^nX\bar{X}^n\left(1-q^2\right)-q^2X^nZX\right)q^{-n}\left(q^n-q^{-n}\right)^{-1}\\&=q^2\left(\bar{J}-X^nZ\right)Xq^{-n}\left(q^n-q^{-n}\right)^{-1}\\&=\varphi_1\left(q^2EK\right)\end{aligned}$$

同理可证 $\varphi_1\left(E\bar{K}\right)=\varphi_1\left(q^2\bar{K}E\right)$， $\varphi_1\left(KF\right)=\varphi_1\left(q^{-2}FK\right)$， $\varphi_1\left(F\bar{K}\right)=\varphi_1\left(q^{-2}\bar{K}F\right)$。

下证 φ_1 保持等式(4)成立，由(6)式得 $ZY=q^{2n}YZ+\left(1-q^{2n}\right)\bar{J}$，由引理 1 得 $YX^n=\left(1-q^{2n}\right)\bar{J}+q^{2n}X^nY$，故

$$\begin{aligned}\varphi_1\left(EF-FE\right)&=\left(\left(\bar{J}-X^nZ\right)\left(Y-\bar{X}^n\right)-\left(Y-\bar{X}^n\right)\left(\bar{J}-X^nZ\right)\right)q^{-n}\left(q^n-q^{-n}\right)^{-2}\\&=\left(-X^nZY+X^nZ\bar{X}^n+YX^nZ-\bar{J}Z\right)q^{-n}\left(q^n-q^{-n}\right)^{-2}\\&=\frac{X^n-\bar{X}^n}{q^n-q^{-n}}=\varphi_1\left(\frac{K^n-K^{-n}}{q^n-q^{-n}}\right)\end{aligned},$$

因此 φ_1 是 $U_q\left(f_n\left(K,\bar{K}\right)\right)$ 到 $A_n\left(sl_2\right)$ 的 C-代数满同态。下证 φ_1 与 φ_2 是互逆映射。

$$\varphi_1\varphi_2\left(X\right)=\varphi_1\left(K\right)=X,\quad \varphi_1\varphi_2\left(\bar{X}\right)=\varphi_1\left(\bar{K}\right)=\bar{X},$$

$$\varphi_1\varphi_2\left(Y\right)=\varphi_1\left(\bar{K}^n+JF\left(q^n-q^{-n}\right)\right)=\bar{X}^n+\left(Y-\bar{X}^n\right)\left(q^n-q^{-n}\right)^{-1}\left(q^n-q^{-n}\right)=Y,$$

由 $Z\bar{J}=\bar{J}Z=Z$ 可知，

$$\begin{aligned}\varphi_1\varphi_2\left(Z\right)&=\varphi_1\left(\bar{K}^n-\bar{K}^nE\left(q^{2n}-1\right)\right)\\&=\bar{X}^n-\bar{X}^n\left(\bar{J}-X^nZ\right)q^{-n}\left(q^n-q^{-n}\right)^{-1}q^n\left(q^n-q^{-n}\right)=Z\end{aligned}。$$

反之，由 $EJ=JE=E$ 及 $FJ=JF=F$ 可知，

$$\varphi_2\varphi_1\left(K\right)=\varphi_2\left(X\right)=K,\quad \varphi_2\varphi_1\left(\bar{K}\right)=\varphi_2\left(\bar{X}\right)=\bar{K},$$

$$\begin{aligned}\varphi_2\varphi_1\left(E\right)&=\varphi_2\left(\left(\bar{J}-X^nZ\right)q^{-n}\left(q^n-q^{-n}\right)^{-1}\right)\\&=\left(J-K^n\left(\bar{K}^n-\bar{K}^nE\left(q^{2n}-1\right)\right)q^{-n}\left(q^n-q^{-n}\right)^{-1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2\varphi_1\left(F\right)&=\varphi_2\left(\left(Y-\bar{X}^n\right)q^{-n}\left(q^n-q^{-n}\right)^{-1}\right)\\&=\left(\bar{K}^n+JF\left(q^n-q^{-n}\right)-\bar{K}^n\right)\left(q^n-q^{-n}\right)^{-1}=F\end{aligned},$$

因此 φ_1 是 $U_q\left(f_n\left(K,\bar{K}\right)\right)$ 到 $A_n\left(sl_2\right)$ 的同构映射，于是代数 $U_q\left(f_n\left(K,\bar{K}\right)\right)\cong A_n\left(sl_2\right)$。

定理 1 中的代数 $A_n\left(sl_2\right)$ 可称为 $U_q\left(f_n\left(K,\bar{K}\right)\right)$ 的等价表示，其中 $X,\bar{X},\bar{J},Y,Z$ 为 $U_q\left(f_n\left(K,\bar{K}\right)\right)$ 的等价生成子。

基金项目

浙江省教育厅科研项目(Y201327644)；高等学校访问学者专业发展项目(FX2014082)。

参考文献 (References)

[1] Ito, T., Terwilliger, P. and Weng, C.-W. (2006) The Quantum Algebra and Its Equitable Presentation. *Journal of Algebra*, **298**, 284-301. http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.07.038

[2] Smith, S.P. (1990) A Class of Algebras Similar to the Enveloping Algebra of sl(2). *Transactions on AMS*, **322**, 285-314.

[3] Ji, Q.Z. and Wang, D.G. (2000) Finite-Dimensional Representations of Quantum Groups $U_q\left(f\left(K\right)\right)$. *East-West*

Math., **2**, 201-213.

[4] Wang, D.G. and Ji, Q.Z. (2002) Finite-Dimensional Representations of Quantum Group $U_q\left(f\left(K,H\right)\right)$. *Communications in Algebra*, **30**, 2191-2211.

[5] 潘艳. 量子群$U_q\left(f\left(K\right)\right)$的等价实现[D]: [硕士学位论文]. 扬州: 扬州大学, 2008.

[6] 叶丽霞, 吴志祥. 弱量子代数$\omega U_q\left(g\right)$的弱 Hopf 代数结构[J]. 高校应用数学学报, 2007, 22(3): 363-370.