Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 182-189
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63028

Hans汉斯

Generalized Derivations of Hom-Lie Color Algebra

Jinsen Zhou[1], Guangzhe Fan[2]

[1]School of Information Engineering, Longyan University, Longyan Fujian
[2]Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai
Email: zjs9932@126.com, yzfanguangzhe@126.com

Received: Apr. 29th, 2016; accepted: May 10th, 2016; published: May 13th, 2016

Abstract

Firstly, we recall some concepts associated with a Hom-Lie color algebra. Moreover, we give the definitions of the generalized derivations, quasi-derivations, center derivations, centroids and quasi-centroids. Furthermore, we investigate some properties and connections between these derivations. Finally, we obtain that the generalized derivations are equal to the sum of quasi-derivations and quasi-centroids.

Keywords

Hom-Lie Color Algebras, Derivations, Generalized Derivations, Quasi-Derivations, Centroids, Quasi-Centroids

Hom-李Color代数的广义导子

周金森[1]，范广哲[2]

[1]龙岩学院信息工程学院，福建 龙岩
[2]同济大学数学系，上海
Email: zjs9932@126.com, yzfanguangzhe@126.com

收稿日期：2016年4月29日；录用日期：2016年5月10日；发布日期：2016年5月13日

文章引用：周金森，范广哲. Hom-李 Color 代数的广义导子[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 182-189.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63028

摘　要

首先回忆与Hom-李color代数相关的概念，并且给出它的广义导子、拟导子、中心导子、型心和拟型心的定义。进一步地，研究这些导子之间的性质和联系。最后得到广义导子可以写成拟导子与拟型心之和。

关键词

Hom-李Color代数，导子，广义导子，拟导子，型心，拟型心

1. 引言

众所周知，Hom-李代数和李 color 代数都是李代数的重要推广。和这两类代数相关的结构理论和表示理论已被广泛研究。Hom-李 color 代数是 Hom-李代数及李 color 代数的进一步推广。然而到目前为止，对于 Hom-李 color 代数的研究还是非常少。文献[1]介绍了 Hom-李 color 代数的概念，并且构造了几类新的 Hom-李 color 代数。

导子和广义导子在李理论的发展过程中起着非常重要的作用，文献[2]-[7]研究了李代数，李超代数，Hom-李代数，李 color 代数等各类代数的广义导子。文献[8]研究了 Hom-李 color 代数的表示理论并且给出了广义导子的定义，但没有考虑广义导子的性质。本文主要研究了 Hom-李 color 代数的广义导子，拟导子，中心导子，型心和拟型心的性质，并且研究了它们之间的联系。

本文的主要结论归结为引理 3.1，3.2 和定理 3.4，3.5，3.7。

本文总假定 F 是特征为 0 的代数闭域，$F^* = F \setminus \{0\}$，Γ 是 Abelian 群，文中出现的 θ, u, v, γ 均属于 Γ。

2. 预备知识

首先来回忆一些与 Hom-李代数，李 color 代数以及 Hom-李 color 代数相关的概念和定义。详见文献[1] [8] [9]。

定义 2.1 Hom-李代数是一个三元组 $(L,[\cdot,\cdot],\alpha)$，其中 L 为数域 F 上的线性空间，二元运算 $[\cdot,\cdot]: L\times L \to L$ 满足双线性性，$\alpha: L\to L$ 是线性映射，且满足

1) $[x,y] = -[y,x]$，

2) $[\alpha(x),[y,z]]+[\alpha(y),[z,x]]+[\alpha(z),[x,y]]=0$。

对于任意 $x,y,z\in L$。

线性空间 V 称为 Γ-阶化的，如果存在 V 的一簇子空间 $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$，满足 $V=\oplus_{\gamma\in\Gamma}V_\gamma$。$V$ 中的一个元素 a 称为 γ 次齐次元，如果 $a\in V_\gamma, \gamma\in\Gamma$。在这种情况下，$\gamma$ 称为 a 的 color。通常用 $\bar{a}$ 表示 a 的 color，这样 V 中的每个齐次元素 a 都有唯一的群 Γ 中的元素 $\bar{a}$ 与之对应。为了方便，常省掉“-”。在本文中，用 hg(V)表示 V 中所有齐次元素。

若 $V=\oplus_{\gamma\in\Gamma}V_\gamma$，$W=\oplus_{\gamma\in\Gamma}W_\gamma$ 是两个 Γ-阶化线性空间，线性映射 $f: V\to W$ 称为 θ 次，如果 $f(V_\gamma)\subseteq W_{\gamma+\theta}, \forall\gamma\in\Gamma$。进一步，$f$ 是 0 次，即 $f(V_\gamma)\subseteq W_\gamma$，，则称 f 是偶的。

代数 A 称为 Γ-阶化的，若 A 是 Γ-阶化线性空间，即 $A=\oplus_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ 且 $A_\theta A_\mu\subseteq A_{\theta+\mu}, \forall\theta,\mu\in\Gamma$。

若 A，B 都是 Γ-阶化代数，称同态 $\alpha: A\to B$ 是偶的，如果 $\alpha(A_\gamma)\subseteq B_\gamma$。

定义 2.2 称 ε 为 Γ 上的双特征映射，$\varepsilon:\Gamma\times\Gamma\to F^*$，若满足

1) $\varepsilon(\theta,\mu)\varepsilon(\mu,\theta)=1$，
2) $\varepsilon(\theta,\mu+\nu)=\varepsilon(\theta,\mu)\varepsilon(\theta,\nu)$，
3) $\varepsilon(\theta+\mu,\nu)=\varepsilon(\theta,\nu)\varepsilon(\mu,\nu)$，

对于任意 $\theta,\mu,\nu\in\Gamma$。

定义 2.3 李 color 代数是一个三元组 $(L,[\cdot,\cdot],\varepsilon)$，其中 L 为 Γ-阶化代数，即 $L=\oplus_{\gamma\in\Gamma}L_\gamma$，二元运算 $[\cdot,\cdot]:L\times L\to L$ 满足双线性性，ε 为 Γ 上的双特征映射，且满足

1) $[x,y]=-\varepsilon(x,y)[y,x]$，
2) $\varepsilon(z,x)[x,[y,z]]+\varepsilon(x,y)[y,[z,x]]+\varepsilon(y,z)[z,[x,y]]=0$，

对于任意 $x,y,z\in\mathrm{hg}(L)$。

定义 2.4 Hom-李 color 代数是一个四元组 $(L,[\cdot,\cdot],\varepsilon,\alpha)$，其中 L 是 Γ-阶化代数，ε 为 Γ 上的双特征映射，偶的双线性映射 $[\cdot,\cdot]:L\times L\to L$，偶的同态 $\alpha:L\to L$，且满足

1) $[x,y]=-\varepsilon(x,y)[y,x]$，
2) $\varepsilon(z,x)[\alpha(x),[y,z]]+\varepsilon(x,y)[\alpha(y),[z,x]]+\varepsilon(y,z)[\alpha(z),[x,y]]=0$，

对于任意 $x,y,z\in\mathrm{hg}(L)$。

注记 2.5 如果 $(L,[\cdot,\cdot],\varepsilon,\alpha)$ 是一个 Hom-李 color 代数，当取 $\alpha=id_L$ 时，此时 $(L,[\cdot,\cdot],\varepsilon,\alpha)$ 变成了一个李 color 代数。若对于任意 $\forall x,y\in L$，都有 $\varepsilon(x,y)=1$，则 $(L,[\cdot,\cdot],\varepsilon,\alpha)$ 是一个 Hom-李代数。因此，可以看出 Hom-李 color 代数是 Hom-李代数和李 color 代数的进一步推广。

$(L,[\cdot,\cdot],\varepsilon,\alpha)$ 是一个 Hom-李 color 代数，若对任意 $\forall x,y\in L$，都有 $\alpha([x,y])=[\alpha(x),\alpha(y)]$，则称 L 为保积的 Hom-李 color 代数。

下面给出 Hom-李 color 代数的各类导子和型心的概念。

命题 2.6 $Pl_\gamma(L)=\left\{D\in Hom(L,L)\middle|D(L_\mu)\subseteq L_{\gamma+\mu},\forall\mu\in\Gamma\right\}$，$[D,\alpha]=0$，则 $(Pl(L),[\cdot,\cdot],\varepsilon,\tilde{\alpha})$ 是一个 Hom-李 color 代数，其中李 color 括积为

$$[D_\theta,D_\mu]=D_\theta D_\mu-\varepsilon(\theta,\mu)D_\mu D_\theta。$$

对于任意 $D_\theta,D_\mu\in\mathrm{hg}(Pl(L))$，且同态 $\tilde{\alpha}:Hom(L,L)\to Hom(L,L)$ 是偶的，满足 $\tilde{\alpha}(D)=D\alpha$，对于任意 $D\in Hom(L,L)$。

证明　直接计算易知。

定义 2.7 设 L 为保积的 Hom-李 color 代数，$D\in Pl_\gamma(L)$ 称为 L 的 γ 次 α^k-导子，如果

$$[D,\alpha]=0，$$

$$D([x,y])=[D(x),\alpha^k(y)]+\varepsilon(\gamma,x)[\alpha^k(x),D(y)]，$$

对于任意 $x,y\in\mathrm{hg}(L)$。

我们把 L 的 γ 次 α^k-导子的全体记为 $Der_{\alpha^k}^{\gamma}(L)$，则 $Der(L)=\oplus_{k\geq0}Der_{\alpha^k}(L)$，其中 $Der_{\alpha^k}(L)$ 是 Γ-阶化的，即 $Der_{\alpha^k}(L)=\oplus_{\gamma\in\Gamma}\left(Der_{\alpha^k}(L)\right)_\gamma=\oplus_{\gamma\in\Gamma}Der_{\alpha^k}^{\gamma}(L)$。

定义 2.8 $D\in Pl_\gamma(L)$ 称为 L 的 γ 次 α^k-广义导子，如果存在 $D',D''\in Pl_\gamma(L)$ 使得

$$[D,\alpha]=[D',\alpha]=[D'',\alpha]=0，$$

$$D''([x,y]) = [D(x), \alpha^k(y)] + \varepsilon(\gamma, x)[\alpha^k(x), D'(y)],$$

对于任意 $x, y \in \mathrm{hg}(L)$。

我们把 L 的 γ 次 α^k-广义导子的全体记为 $GDer_{\alpha^k}^{\gamma}(L)$，则

$$GDer(L) = \oplus_{k\geq 0} GDer_{\alpha^k}(L) = \oplus_{k\geq 0}\left(\oplus_{\gamma\in\Gamma}\left(GDer_{\alpha^k}(L)\right)_{\gamma}\right)，其中\left(GDer_{\alpha^k}(L)\right)_{\gamma} = GDer_{\alpha^k}^{\gamma}(L)。$$

定义 2.9 $D \in Pl_{\gamma}(L)$ 称为 L 的 γ 次 α^k-拟导子，如果存在 $D' \in Pl_{\gamma}(L)$ 使得

$$[D, \alpha] = [D', \alpha] = 0,$$

$$D'([x,y]) = [D(x), \alpha^k(y)] + \varepsilon(\gamma, x)[\alpha^k(x), D(y)],$$

对于任意 $x, y \in \mathrm{hg}(L)$。

我们把 L 的 γ 次 α^k-拟导子的全体记作 $QDer_{\alpha^k}^{\gamma}(L)$，则

$$QDer(L) = \oplus_{k\geq 0} QDer_{\alpha^k}(L) = \oplus_{k\geq 0}\left(\oplus_{\gamma\in\Gamma}\left(QDer_{\alpha^k}(L)\right)_{\gamma}\right)，其中\left(QDer_{\alpha^k}(L)\right)_{\gamma} = QDer_{\alpha^k}^{\gamma}(L)。$$

定义 2.10 设 L 为 Hom-李 color 代数，若 $D \in Pl_{\gamma}(L)$，且满足

$$[D, \alpha] = 0,$$

$$D([x,y]) = [D(x), \alpha^k(y)] = \varepsilon(\gamma, x)[\alpha^k(x), D(y)],$$

对于任意 $x, y \in \mathrm{hg}(L)$，则称 D 为 L 的 γ 次 α^k-型心。

$C_{\alpha^k}^{\gamma}(L)$ 代表 L 的所有 γ 次 α^k-型心，则

$$C(L) = \oplus_{k\geq 0} C_{\alpha^k}(L) = \oplus_{k\geq 0}\left(\oplus_{\gamma\in\Gamma}\left(C_{\alpha^k}(L)\right)_{\gamma}\right)，其中\left(C_{\alpha^k}(L)\right)_{\gamma} = C_{\alpha^k}^{\gamma}(L)。$$

定义 2.11 设 L 为 Hom-李 color 代数，若 $D \in Pl_{\gamma}(L)$，且满足

$$[D, \alpha] = 0,$$

$$[D(x), \alpha^k(y)] = \varepsilon(\gamma, x)[\alpha^k(x), D(y)],$$

对于任意 $x, y \in \mathrm{hg}(L)$，则称 D 为 L 的 γ 次 α^k-拟型心。

$QC_{\alpha^k}^{\gamma}(L)$ 代表 L 的所有 γ 次 α^k-型心，则

$$QC(L) = \oplus_{k\geq 0} QC_{\alpha^k}(L) = \oplus_{k\geq 0}\left(\oplus_{\gamma\in\Gamma}\left(QC_{\alpha^k}(L)\right)_{\gamma}\right)，其中\left(QC_{\alpha^k}(L)\right)_{\gamma} = QC_{\alpha^k}^{\gamma}(L)。$$

定义 2.12 设 L 为 Hom-李 color 代数，若 $D \in Pl_{\gamma}(L)$，且满足

$$[D, \alpha] = 0,$$

$$D([x,y]) = [D(x), \alpha^k(y)] = 0$$

对于任意 $x, y \in \mathrm{hg}(L)$，则称 D 为 L 的 γ 次 α^k-中心导子。

$ZDer_{\alpha^k}^{\gamma}(L)$ 代表 L 的所有 γ 次 α^k-型心，则

$$ZDer(L) = \oplus_{k\geq 0} ZDer_{\alpha^k}(L) = \oplus_{k\geq 0}\left(\oplus_{\gamma\in\Gamma}\left(ZDer_{\alpha^k}(L)\right)_{\gamma}\right)，其中\left(ZDer_{\alpha^k}(L)\right)_{\gamma} = ZDer_{\alpha^k}^{\gamma}(L)。$$

根据以上定义，我们可得如下结论：

$$ZDer(L)\subseteq Der(L)\subseteq QDer(L)\subseteq GDer(L)\subseteq Pl(L)\text{。}$$

定义 2.13 若 $Z(L)=\{x\in L|[x,y]=0,\forall y\in L\}$，则 $Z(L)$ 称为 L 的中心。

3. 各类导子和型心的性质

引理 3.1 $(L,[\cdot,\cdot],\varepsilon,\alpha)$ 是一个保积的 Hom-李 color 代数，则

1) $GDer(L)$，$QDer(L)$ 和 $C(L)$ 是 $Pl(L)$ 的子代数；

2) $ZDer(L)$ 是 $Der(L)$ 的理想。

证明 1) 设 $D_1\in GDer_{\alpha^k}^{\theta}(L)$，$D_2\in GDer_{\alpha^s}^{\mu}(L)$，则 $\forall x\in \mathrm{hg}(L)$，$y\in L$，可得

$$\begin{aligned}[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}(y)]&=D_1''([D_2(x),\alpha^s(y)])-\varepsilon(\theta,\mu+x)[\alpha^k(D_2(x)),D_1'(\alpha^s(y))]\\&=D_1''([D_2(x),\alpha^s(y)])-\varepsilon(\theta,\mu+x)[D_2(\alpha^k(x)),\alpha^s(D_1'(y))]\\&=D_1''D_2''([x,y])-\varepsilon(\mu,x)D_1''([\alpha^s(x),D_2'(y)])-\varepsilon(\theta,\mu+x)D_2''([\alpha^k(x),D_1'(y)])\\&\quad+\varepsilon(\theta,\mu+x)\varepsilon(\mu,x)[\alpha^{k+s}(x),D_2'D_1'(y)]\end{aligned}$$

类似地，可得

$$\begin{aligned}[D_2D_1(x),\alpha^{k+s}(y)]&=D_2''D_1''([x,y])-\varepsilon(\theta,x)D_2''([\alpha^k(x),D_1'(y)])-\varepsilon(\mu,\theta+x)D_1''([\alpha^s(x),D_2'(y)])\\&\quad+\varepsilon(\mu,\theta+x)\varepsilon(\theta,x)[\alpha^{k+s}(x),D_1'D_2'(y)]\end{aligned}$$

因而 $[[D_1,D_2](x),\alpha^{k+s}(y)]=[D_1'',D_2'']([x,y])-\varepsilon(\mu+\theta,x)[\alpha^{k+s}(x),[D_1',D_2'](y)]$

即 $[D_1'',D_2'']([x,y])=[[D_1,D_2](x),\alpha^{k+s}(y)]+\varepsilon(\mu+\theta,x)[\alpha^{k+s}(x),[D_1',D_2'](y)]$

又因为 $[D_1',D_2']$，$[D_1'',D_2'']=Pl_{\theta+\mu}(L)$，可得 $[D_1,D_2]\in GDer_{\alpha^{k+s}}^{\theta+\mu}(L)$，即证 $GDer(L)$ 是 $Pl(L)$ 的子代数。

同理，$QDer(L)$ 是 $Pl(L)$ 的子代数。

设 $D_1\in C_{\alpha^k}^{\theta}(L)$，$D_2\in C_{\alpha^s}^{\mu}(L)$，则 $\forall x\in \mathrm{hg}(L)$，$y\in L$，可得

$$\begin{aligned}[[D_1,D_2](x),\alpha^{k+s}(y)]&=[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}(y)]-\varepsilon(\theta,\mu)[D_2D_1(x),\alpha^{k+s}(y)]\\&=D_1([D_2(x),\alpha^s(y)])-\varepsilon(\theta,\mu)D_2([D_1(x),\alpha^k(y)])\\&=D_1D_2([x,y])-\varepsilon(\theta,\mu)D_2D_1([x,y])\\&=[D_1,D_2]([x,y])\end{aligned}$$

同理可证 $\varepsilon(\mu+\theta,x)[\alpha^{k+s}(x),[D_1,D_2](y)]=[D_1,D_2]([x,y])$。

可得 $[D_1,D_2]\in C_{\alpha^{k+s}}^{\theta+\mu}(L)$，从而 $C(L)$ 是 $Pl(L)$ 的子代数。

2) 设 $D_1\in ZDer_{\alpha^k}^{\theta}(L)$，$D_2\in Der_{\alpha^s}^{\mu}(L)$，则 $\forall x\in \mathrm{hg}(L)$，$y\in L$，可得

$$\begin{aligned}[D_1,D_2]([x,y])&=D_1D_2([x,y])-\varepsilon(\theta,\mu)D_2D_1([x,y])\\&=D_1([D_2(x),\alpha^s(y)])+\varepsilon(\mu,x)([\alpha^s(x),D_2(y)])\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[[D_1,D_2](x),\alpha^{k+s}(y)\right]&=\left[[D_1D_2](x),\alpha^{k+s}(y)\right]-\varepsilon(\theta,\mu)\left[D_2D_1(x),\alpha^{k+s}(y)\right]\\&=\left[D_1(D_2(x)),\alpha^{k+s}(y)\right]-\varepsilon(\theta,\mu)D_2\left(\left[D_1(x),\alpha^{k}(y)\right]\right)\\&\quad+\varepsilon(\theta,\mu)\varepsilon(\mu,\theta+x)\left[\alpha^{s}(D_1(x)),D_2(\alpha^{k}(y))\right]\\&=\varepsilon(\mu,x)\left[D_1(\alpha^{s}(x)),\alpha^{k}(D_2(y))\right]\\&=0\end{aligned}$$

因此$[D_1,D_2]\in ZDer_{\alpha^{k+s}}^{\theta+\mu}(L)$，从而$ZDer(L)$是$Der(L)$的理想。

引理 3.2 $(L,[\cdot,\cdot],\varepsilon,\alpha)$是一个保积的 Hom-李 color 代数，则有如下两个结论：

1) $[Der(L),C(L)]\subseteq C(L)$；

2) $[QDer(L),QC(L)]\subseteq QC(L)$；

证明 1) 设$D_1\in Der_{\alpha^k}^{\theta}(L)$，$D_2\in C_{\alpha^s}^{\mu}(L)$，则$\forall x,y\in \mathrm{hg}(L)$，

一方面，可得

$$\begin{aligned}\left[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}(y)\right]&=D_1\left(\left[D_2(x),\alpha^{s}(y)\right]\right)-\varepsilon(\theta,\mu+x)\left[\alpha^{k}(D_2(x)),D_1(\alpha^{s}(y))\right]\\&=D_1\left(\left[D_2(x),\alpha^{s}(y)\right]\right)-\varepsilon(\theta,\mu+x)\left[D_2(\alpha^{k}(x)),\alpha^{s}(D_1(y))\right]\\&=D_1D_2([x,y])-\varepsilon(\theta,\mu+x)\varepsilon(\mu,x)\left[\alpha^{k+s}(x),D_2D_1(y)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[D_2D_1(x),\alpha^{k+s}(y)\right]&=D_2\left(\left[D_1(x),\alpha^{k}(y)\right]\right)\\&=D_2D_1([x,y])-\varepsilon(\theta,x)D_2\left(\left[\alpha^{k}(x),D_1(y)\right]\right)\\&=D_2D_1([x,y])-\varepsilon(\theta,x)\varepsilon(\mu,x)\left[\alpha^{k+s}(x),D_2D_1(y)\right]\end{aligned}$$

因而$\left[[D_1,D_2](x),\alpha^{k+s}(y)\right]=[D_1,D_2]([x,y])$。

另一方面，可得

$$\begin{aligned}\left[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}(y)\right]&=D_1\left(\left[D_2(x),\alpha^{s}(y)\right]\right)-\varepsilon(\theta,\mu+x)\left[\alpha^{k}(D_2(x)),D_1(\alpha^{s}(y))\right]\\&=\varepsilon(\mu,x)D_1\left(\left[\alpha^{s}(x),D_2(y)\right]\right)-\varepsilon(\theta,\mu+x)\varepsilon(\mu,x)\left[\alpha^{k+s}(x),D_2D_1(y)\right]\\&=\varepsilon(\mu,x)\left(D_1\left[\alpha^{s}(x),\alpha^{k}(D_2(y))\right]\right)+\varepsilon(\mu,x)\varepsilon(\theta,x)\left[\alpha^{k+s}(x),D_2D_1(y)\right]\\&\quad-\varepsilon(\theta,\mu+x)\varepsilon(\mu,x)\left[\alpha^{k+s}(x),D_2D_1(y)\right]\end{aligned}$$

由于$D_2\in C_{\alpha^s}^{\mu}(L)$，可得

$$\left[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}(y)\right]=\varepsilon(\mu,\ \theta+x)\left[\alpha^{s}(D_1(x)),D_2(\alpha^{k}(y))\right]$$

因而

$$\begin{aligned}\left[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}(y)\right]&=\left[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}(y)\right]-\varepsilon(\theta,\mu)\left[D_2D_1(x),\alpha^{k+s}(y)\right]\\&=\varepsilon(\mu,x)\varepsilon(\theta,x)\left[\alpha^{k+s}(x),D_1D_2(y)\right]-\varepsilon(\mu,x)\varepsilon(\theta,x)\left[\alpha^{k+s}(x),\varepsilon(\theta,\mu)D_2D_1(y)\right]\\&=\varepsilon(\theta+\mu,x)\left[\alpha^{k+s}(x),[D_1,D_2](y)\right]\end{aligned}$$

从而$\left[D_1,D_2\right]\in C_{\alpha^{k+s}}^{\theta+\mu}(L)$，因此$\left[Der(L),C(L)\right]\subseteq C(L)$。

2) 同 1)的证明。

根据文献[8]中的命题 5.2 和 5.3，可得如下引理：

引理 3.3 $\left(L,[\cdot,\cdot],\varepsilon,\alpha\right)$是一个保积的 Hom-李 color 代数，则

1) $\left[QC(L),QC(L)\right]\subseteq QDer(L)$；

2) $C(L)\subseteq QDer(L)$。

定理 3.4 设$\left(L,[\cdot,\cdot],\varepsilon,\alpha\right)$是一个保积的 Hom-李 color 代数，则

$GDer(L)=QDer(L)+QC(L)$，即任一广义导子可以写成拟导子与拟型心之和。

证明：设$D\in GDer_{\alpha^k}^{\theta}(L)$，$\forall x,y\in \mathrm{hg}(L)$，则存在$D',D''\in Pl_{\theta}(L)$，使得

$$\left[D(x),\alpha^k(y)\right]+\varepsilon(\theta,x)\left[\alpha^k(x),D'(y)\right]=D''\left([x,y]\right)$$

由于$-\varepsilon(\theta+x,y)\left[\alpha^k(y),D(x)\right]-\varepsilon(\theta,x)\varepsilon(x,\theta+y)\left[D'(y),\alpha^k(x)\right]=-\varepsilon(x,y)D''\left([y,x]\right)$，

由ε的性质，得$\varepsilon(\theta,y)\left[\alpha^k(y),D(x)\right]+\left[D'(y),\alpha^k(x)\right]=D''\left([x,y]\right)$，

类似可得$\varepsilon(\theta,x)\left[\alpha^k(x),D(y)\right]+\left[D'(x),\alpha^k(y)\right]=D''\left([y,x]\right)$，

即$\left[D'(x),\alpha^k(y)\right]+\varepsilon(\theta,x)\left[\alpha^k(x),D(y)\right]=D''\left([x,y]\right)$，可得$D'\in GDer_{\alpha^k}^{\theta}(L)$，且$\forall x,y\in \mathrm{hg}(L)$，有

$$\left[\frac{D+D'}{2}(x),\alpha^k(y)\right]+\varepsilon(\theta,x)\left[\alpha^k(x),\frac{D+D'}{2}(y)\right]=D''\left([x,y]\right),$$

$$\left[\frac{D+D'}{2}(x),\alpha^k(y)\right]-\varepsilon(\theta,x)\left[\alpha^k(x),\frac{D-D'}{2}(y)\right]=0,$$

从而有$\frac{D+D'}{2}\in QDer_{\alpha^k}^{\theta}(L)$，$\frac{D-D'}{2}\in QC_{\alpha^k}^{\theta}(L)$，因此

$$D=\frac{D+D'}{2}+\frac{D-D'}{2}\in QDer(L)+QC(L)\text{，即 } GDer(L)\subseteq QDer(L)+QC(L)\text{。}$$

故$GDer(L)=QDer(L)+QC(L)$。

定理 3.5 设$\left(L,[\cdot,\cdot],\varepsilon,\alpha\right)$是一个保积的 Hom-李 color 代数，其中$\alpha$是满射，$Z(L)$是$L$的中心，则$\left[C(L),QC(L)\right]\subseteq Hom\left(L,Z(L)\right)$。特别地，若$Z(L)=0$，则$\left[C(L),QC(L)\right]=0$。

证明：设$D_1\in C_{\alpha^k}^{\theta}(L)$，$D_2\in QC_{\alpha^s}^{\mu}(L)$，$x\in \mathrm{hg}(L)$。因为$\alpha$是满射，所以

$\forall y'\in L$，$\exists y\in L$，使得$y'=\alpha^{k+s}(y)$，则

$$\begin{aligned}
\left[\left[D_1,D_2\right](x),y'\right]&=\left[\left[D_1,D_2\right](x),\alpha^{k+s}(y)\right]\\
&=\left[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}(y)\right]-\varepsilon(\theta,\mu)\left[D_2D_1(x),\alpha^{k+s}(y)\right]\\
&=D_1\left(\left[D_2(x),\alpha^s(y)\right]\right)-\varepsilon(\theta,\mu)\varepsilon(\mu,\theta+x)\left[\alpha^s\left(D_1(x)\right),D_2\left(\alpha^k(y)\right)\right]\\
&=D_1\left(\left[D_2(x),\alpha^s(y)\right]\right)-\varepsilon(\mu,x)D_1\left(\left[\alpha^s(x),D_2(y)\right]\right)\\
&=D_1\left(\left[D_2(x),\alpha^s(y)\right]\right)-\varepsilon(\mu,x)D_1\left(\left[\alpha^s(x),D_2(y)\right]\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

从而$\left[D_1,D_2\right](x)\in Z(L)$，即$\left[D_1,D_2\right]\in Hom(L,Z(L))$，

故$\left[C(L),QC(L)\right]\subseteq Hom(L,Z(L))$。

特别地，若$Z(L)=0$，易知$\left[C(L),QC(L)\right]=0$。

注 3.6 由文献[2]的定理 2.6 可得，设$\left(L,[\cdot,\cdot],\varepsilon,\alpha\right)$是 Hom-李 color 代数，$Z(L)$是$L$的中心。若$Z(L)=0$，则$C(L)=QDer(L)\cap QC(L)$。

定理 3.7 设$\left(L,[\cdot,\cdot],\varepsilon,\alpha\right)$是保积的 Hom-李 color 代数，$\alpha$是满射。若$Z(L)=0$，则$QC(L)$是 Hom-李 color 代数当且仅当$\left[QC(L),QC(L)\right]=0$。

证明：充分性显然成立，下证必要性。

设$D_1\in QC_{\alpha^k}^{\theta}(L)$，$D_2\in QC_{\alpha^s}^{\mu}(L)$，$x\in \mathrm{hg}(L)$。因为$\alpha$是满射，所以$\forall y'\in L$，$\exists y\in L$，使得$y'=\alpha^{k+s}(y)$，因为$QC(L)$是 Hom-李 color 代数，则$\left[D_1,D_2\right](x)\in QC_{\alpha^{k+s}}^{\theta+\mu}$，即

$$\begin{aligned}\left[\left[D_1,D_2\right](x),y'\right]&=\left[\left[D_1,D_2\right](x),\alpha^{k+s}(y)\right]\\&=\varepsilon(\theta+\mu,x)\left[\alpha^{k+s}(x),\left[D_1,D_2\right](y)\right]\end{aligned}$$

由引理 3.3 (1)的证明易知

$$\begin{aligned}\left[\left[D_1,D_2\right](x),y'\right]&=\left[\left[D_1,D_2\right](x),\alpha^{k+s}(y)\right]\\&=-\varepsilon(\theta+\mu,x)\left[\alpha^{k+s}(x),\left[D_1,D_2\right](y)\right]\end{aligned}$$

从而$\left[\left[D_1,D_2\right](x),y'\right]=\left[\left[D_1,D_2\right](x),\alpha^{k+s}(y)\right]=0$，

即$\left[D_1,D_2\right]=0$，故$\left[QC(L),QC(L)\right]=0$。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(No. 11431010)。

参考文献 (References)

[1] Yuan, L. (2012) Hom-Lie Color Algebra Structures. *Communications in Algebra*, **40**, 575-592. http://dx.doi.org/10.1080/00927872.2010.533726

[2] Chen, L., Ma, Y. and Ni, L. (2013) Generalized Derivations of Lie Color Algebras. *Results in Mathematics*, **63**, 923-936. http://dx.doi.org/10.1007/s00025-012-0241-2

[3] Zhou, J., Chen, L. and Ma, Y. (2016) Generalized Derivations of Hom-Lie Triple Systems. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 1-20.

[4] Leger, G.F. and Lucks, E.M. (2000) Generalized Derivations of Lie Algebras. *Journal of Algebra*, **228**, 165-203. http://dx.doi.org/10.1006/jabr.1999.8250

[5] Zhang, Q.C. and Zhang, Y.Z. (2008) Derivations and Extensions of Lie Color Algebra. *Acta Mathematica Scientia*, **28**, 933-948. http://dx.doi.org/10.1016/S0252-9602(08)60093-4

[6] Zhang, R.X. and Zhang, Y.Z. (2010) Generalized Derivations of Lie Superalgebras. *Communications in Algebra*, **38**, 3737-3751. http://dx.doi.org/10.1080/00927870903236228

[7] 周佳，牛艳君，陈良云. Hom-李代数的广义导子[J]. 数学学报, 2015, 58(4): 551-558.

[8] Abdaoui, K., Ammar, A. and Makhlouf, A. (2015) Constructions and Cohomology of Color Hom-Lie Algebras. *Communications in Algebra*, **43**, 4581-4612. http://dx.doi.org/10.1080/00927872.2014.910797

[9] Ammar, F. and Makhlouf, A. (2010) Hom-Lie Superalgebras and Hom-Lie Admissible Superalgebras. *Journal of Algebra*, **324**, 1513-1528. http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2010.06.014