Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 199-205
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63031

Hans汉斯

Correlation Formulas of Trigonometric Functions Associated with Second-Order Cone

Yan Zhang, Zijun Hao, Guolin Yu

School of Mathematics and Information Science, Northern University of Nationalities, Yinchuan Ningxia
Email: yan_zhangzhy@126.com, nxhaozj@126.com

Received: Apr. 30th, 2016; accepted: May 16th, 2016; published: May 19th, 2016

Abstract

The function associated with the second-order cones (SOCs) is wildly used in solving second-order cone programming and second-order cone complementarity problems. In this article, on the basis of Euclidean Jordan algebra, the simple formulas of trigonometric functions associated with SOC are derived and some correlation formulas of trigonometric function are also presented.

Keywords

Second-Order Cone, Trigonometric Functions, Correlation Formulas

二阶锥三角函数及其相关公式

张　燕，郝自军，余国林

北方民族大学数学与信息科学学院，宁夏　银川
Email: yan_zhangzhy@126.com, nxhaozj@126.com

收稿日期：2016年4月30日；录用日期：2016年5月16日；发布日期：2016年5月19日

摘　要

二阶锥函数在求解二阶锥规划及二阶锥互补问题的算法中有广泛应用。本文在约当代数的理论基础上推

文章引用：张燕，郝自军，余国林. 二阶锥三角函数及其相关公式[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 199-205.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63031

导得出三角函数在二阶锥上的表达式，然后给出了二阶锥三角函数的若干相关公式。

关键词

二阶锥，三角函数，相关公式

1. 引言

二阶锥规划(SOCP)的研究主要以欧几里得约当代数为基础，J. Faraut 和 A. Koranyi 对一般欧几里得约当代数进行了详细论述[1]。F. Alizadeh 及 D. Goldfarb [2]对二阶锥规划进行了综述。二阶锥向量值函数在求解二阶锥问题及二阶锥互补问题(SOCCP)上具有重要的作用。因此，对这些函数的进一步研究有助于分析出更多的求解方法。此外，还有对二阶锥函数的性质的研究，如微分性、利普希茨性等。Jein-shan Chen 与 Xin Chen [3]分析了与二阶锥(SOC)相关的非光滑向量值函数，这些函数被广泛用于求解二阶锥规划问题。

本文首先推导出与二阶锥相关的三角函数的表达式，然后给出了二阶锥三角函数的相关公式。共分 4 节，第 2 节介绍与二阶锥相关的欧几里得约当代数。第 3 节推导二阶锥三角函数的表达式，有正弦函数，余弦函数及正切函数。第 4 节得出二阶锥三角函数的一些相关公式。最后得出结论。

2. 预备知识

本节简要介绍 R^n 中与二阶锥相关的欧几里得约当代数[1] [2] [4]。二阶锥定义为

$$K^n = \left\{ (x_1, x_2) \in R \times R^{n-1}, \middle| \, x_1 \ge \|x_2\| \right\},$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数，(x_1, x_2) 表示 $\left(x_1, x_2^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$。对任意 $x = (x_1, x_2) \in R \times R^{n-1}$，$y = (y_1, y_2) \in R \times R^{n-1}$，定义其约当积为

$$x \cdot y = \left(x^{\mathrm{T}} y, y_1 x_2 + x_1 y_2 \right) \tag{1}$$

我们用 x^2 表示 $x \cdot x$，用 $x + y$ 表示一般向量加法，用 $x \succeq_{K^n} y$ （或 $y \preceq_{K^n} x$）表示 $x - y \in K^n$。令 $e = (1, 0, \cdots, 0) \in R^n$，则如下性质成立：

性质 2.1 [2] [5] 对任意 $x, y, z \in R^n$，

1) $e \cdot x = x$

2) $x \cdot y = y \cdot x$

3) $x \cdot \left(x^2 \cdot y \right) = x^2 \cdot (x \cdot y)$

4) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

注意到当 $n > 2$ 时，约当积一般不满足结合律。但在幂和内积意义下结合律成立，即对任意 $x, y, z \in R^n$，满足 $x \cdot (x \cdot x) = (x \cdot x) \cdot x$ 及 $\langle x, y \cdot z \rangle = \langle y, z \cdot x \rangle = \langle z, x \cdot y \rangle$。

下面介绍二阶锥意义下向量的特征值分解。对任意 $x = (x_1, x_2) \in R \times R^{n-1}$，$x$ 可分解为[5]

$$x = \lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)} \tag{2}$$

其中 λ_1, λ_2 表示特征值，$u^{(1)}, u^{(2)}$ 表示对应的特征向量。它们的表达式为

$$\lambda_i = x_1 + (-1)^i \|x_2\|, \; i = 1, 2 \tag{3}$$

$$u^{(1)}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1,(-1)^i\frac{x_2}{\|x_2\|}\right) & x_2\neq 0,\\ \frac{1}{2}\left(1,(-1)^n w\right) & x_2=0,\end{cases}\quad i=1,2 \tag{4}$$

其中 $w\in R^{n-1}$ 是满足 $\|w\|=1$ 的任意向量。下面我们介绍 λ_1,λ_2 及 $u^{(1)},u^{(2)}$ 的一些性质。

性质 2.2 [5]

1) $\left\|u^{(1)}\right\|=\left\|u^{(2)}\right\|=1/\sqrt{2}$，

2) $u^{(1)}$ 与 $u^{(2)}$ 在约当积下是正交的，即 $u^{(1)}\cdot u^{(2)}=0$，

3) $u^{(1)}$ 与 $u^{(2)}$ 在约当积下是幂等的，即 $u^{(i)}\cdot u^{(i)}=u^{(i)},\ i=1,2$，

4) λ_1 与 λ_2 是非负(正)的当且仅当 $x\in K^n$ （$x\in \operatorname{int}K^n$），其中 $\operatorname{int}K^n$ 表示 K^n 的内部。

对任意函数 $\hat{f}:R\to R$ 及满足特征值分解 Eq.(2)的向量 x，定义与二阶锥 $K^n\ (n\geq 1)$ 相关的向量值函数 $f:R^n\to R^n$ 为[5]：

$$f(x)=\hat{f}(\lambda_1)u^{(1)}+\hat{f}(\lambda_2)u^{(2)},\ \forall x=(x_1,x_2)\in R\times R^{n-1} \tag{5}$$

当 $x_2=0$ 时，$f(x)=\hat{f}(x_1)e$。文献[1]讨论了 $f(x)=x^{1/2},x^2,\exp(x)$ 的情形。对任意 $x\in R^n$ 及整数 $k\geq 1$，x^k 表示 x 的 k 次幂。若 $x\neq 0$，定义 $x^0=e$。若 $x\in \operatorname{int}K^n$，定义 $x^{-k}=\left(x^k\right)^{-1}$。特征向量 $u^{(1)}$ 和 $u^{(2)}$ 的正交性及幂等性为计算由幂定义的函数提供了强有力的工具，如

$$\begin{aligned}x^2&=\left(\lambda_1u^{(1)}+\lambda_2u^{(2)}\right)\cdot\left(\lambda_1u^{(1)}+\lambda_2u^{(2)}\right)\\&=\lambda_1^2\left(u^{(1)}\right)^2+2\lambda_1\lambda_2u^{(1)}u^{(2)}+\lambda_2^2\left(u^{(2)}\right)^2\\&=\lambda_1^2u^{(1)}+\lambda_2^2u^{(2)}.\end{aligned}$$

反之，当 $x\in K^n$，定义 $w=\sqrt{\lambda_1}u^{(1)}+\sqrt{\lambda_2}u^{(2)}$，有 $w^2=x$ 与 $x^{1/2}=w$，即 $x^{1/2}=\sqrt{\lambda_1}u^{(1)}+\sqrt{\lambda_2}u^{(2)}$。上述推导可以扩展到任意一个可以被幂级数展开的函数上[5]。

3. 二阶锥三角函数

本节以约当代数为基础推导出一些二阶锥三角函数，分别为正弦函数，余弦函数和正切函数。

命题 3.1 [5] 假设 $\hat{f}:R\to R$ 可被幂级数展开为 $\hat{f}(\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\alpha^k$，$a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为实系数。则对任意 $x\in R^n$，与 $\hat{f}$ 相应的向量值函数 $f:R^n\to R^n$ 满足

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\lambda_1^ku^{(1)}+\lambda_2^ku^{(2)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

其中 λ_1,λ_2 和 $u^{(1)},u^{(2)}$ 为 x 的特征值和特征向量。

由命题 3.1 我们可以得到，如果一个函数 $\hat{f}:R\to R$ 可以被幂级数展开，那么与它对应的向量值函数可以写成 $f(x)=\hat{f}(\lambda_1)u^{(1)}+\hat{f}(\lambda_2)u^{(2)}$。由此我们可以得到如下一些结果。

定义

$$\sin x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},\ \cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\tan x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k}\left(2^{2k-1}-1\right)B_{2k}x^{2k-1}}{(2k)!}$$

其中 B_{2k} 为伯努利数[6]。由命题 3.1 可推导出 $\sin x$， $\cos x$ 及 $\tan x$ 的如下表达式。

命题 3.2 对任意 $x=(x_1,x_2)\in R\times R^{n-1}$，

1) $\sin x=\begin{cases}\left(\sin x_1\cos\|x_2\|,\cos x_1\sin\|x_2\|\dfrac{x_2}{\|x_2\|}\right); & x_2\neq 0,\\ \sin x_1(1,0); & x_2=0.\end{cases}$

2) $\cos x=\begin{cases}\left(\cos x_1\cos\|x_2\|,-\sin x_1\sin\|x_2\|\dfrac{x_2}{\|x_2\|}\right); & x_2\neq 0,\\ \cos x_1(1,0); & x_2=0.\end{cases}$

3) 当 $\cos(x_1-\|x_2\|)\cos(x_1+\|x_2\|)\neq 0$ 时，令 $h=\cos^2 x_1\cos^2\|x_2\|-\sin^2 x_1\sin^2\|x_2\|$，则

$$\tan x=\begin{cases}\left(\dfrac{\cos x_1\sin x_1}{h},\dfrac{\sin\|x_2\|\cos\|x_2\|}{h}\cdot\dfrac{x_2}{\|x_2\|}\right); & x_2\neq 0,\\ \tan x_1(1,0); & x_2=0.\end{cases}$$

证明： 只考虑 $x_2\neq 0$ 的情况， $x_2=0$ 时可类似证明。

1) $\sin x=f(x),\ \hat{f}(\alpha)=\sin\alpha$ 。由式(5)可得

$$\begin{aligned}\sin x&=\sin(\lambda_1)u^{(1)}+\sin(\lambda_2)u^{(2)}=\sin(x_1-\|x_2\|)u^{(1)}+\sin(x_1+\|x_2\|)u^{(2)}\\&=(\sin x_1\cos\|x_2\|-\cos x_1\sin\|x_2\|)u^{(1)}+(\sin x_1\cos\|x_2\|+\cos x_1\sin\|x_2\|)u^{(2)}\end{aligned}$$

由式(4)可知， $u^{(i)}=\dfrac{1}{2}\left(1,\dfrac{(-1)^i x_2}{\|x_2\|}\right)$， $i=1,2$ 。则当 $x_2\neq 0$ 时，

$$\sin x=\left(\sin x_1\cos\|x_2\|,\cos x_1\sin\|x_2\|\frac{x_2}{\|x_2\|}\right).$$

2) 证明与 1)相似。

3) 令 $\cos(x_1-\|x_2\|)\cos(x_1+\|x_2\|)\neq 0$， 由式(5)及 λ_1,λ_2 和 $u^{(1)},u^{(2)}$ 可得

$$\begin{aligned}\tan x&=\tan(\lambda_1)u^{(1)}+\tan(\lambda_2)u^{(2)}=\tan(x_1-\|x_2\|)u^{(1)}+\tan(x_1+\|x_2\|)u^{(2)}\\&=\frac{\sin x_1\cos\|x_2\|-\cos x_1\sin\|x_2\|}{\cos x_1\cos\|x_2\|+\sin x_1\sin\|x_2\|}u^{(1)}+\frac{\sin x_1\cos\|x_2\|+\cos x_1\sin\|x_2\|}{\cos x_1\cos\|x_2\|-\sin x_1\sin\|x_2\|}u^{(2)}.\end{aligned}$$

由式(4)得，当 $x_2\neq 0$ 时，

$$\tan x=\left(\frac{\sin x_1\cos x_1}{\cos^2 x_1\cos^2\|x_2\|-\sin^2 x_1\sin^2\|x_2\|},\frac{\sin\|x_2\|\cos\|x_2\|}{\cos^2 x_1\cos^2\|x_2\|-\sin^2 x_1\sin^2\|x_2\|}\cdot\frac{x_2}{\|x_2\|}\right).$$

4. 二阶锥三角函数相关公式

本节中，我们根据命题 3.2 推导二阶锥三角函数的一些相关公式，如二倍角公式、诱导公式等。对任意 $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in R\times R^{n-1}$，根据约当积定义，可得以下命题。

命题 4.1 对任意 $x=(x_1,x_2)\in R\times R^{n-1}$， $e=(1,0,\cdots,0)\in R^n$，

1) $\|\sin x\|^2+\|\cos x\|^2=1$；

2) $\sin^2 x+\cos^2 x=e$。

证明： 1) 由命题 3.2，若 $x_2\neq 0$ （$x_2=0$ 时证明类似），

$$\|\sin x\|^2=\sin^2 x_1\cos^2\|x_2\|+\cos^2 x_1\sin^2\|x_2\|,$$
$$\|\cos x\|^2=\cos^2 x_1\cos^2\|x_2\|+\sin^2 x_1\sin^2\|x_2\|,$$
$$\begin{aligned}\|\sin x\|^2+\|\cos x\|^2&=\left(\sin^2 x_1+\cos^2 x_1\right)\cos^2\|x_2\|+\left(\cos^2 x_1+\sin^2 x_1\right)\sin^2\|x_2\|\\&=\cos^2\|x_2\|+\sin^2\|x_2\|\\&=1.\end{aligned}$$

2) 若 $x_2\neq 0$ （$x_2=0$ 时证明类似），

$$\begin{aligned}\sin^2 x&=\left(\|\sin x\|^2,2\sin x_1\cos x_1\sin\|x_2\|\cos\|x_2\|\frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\\&=\left(\|\sin x\|^2,\frac{1}{2}\sin 2x_1\sin\|2x_2\|\frac{x_2}{\|x_2\|}\right),\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\cos^2 x&=\left(\|\cos x\|^2,-2\sin x_1\cos x_1\sin\|x_2\|\cos\|x_2\|\frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\\&=\left(\|\cos x\|^2,-\frac{1}{2}\sin 2x_1\sin\|2x_2\|\frac{x_2}{\|x_2\|}\right),\end{aligned}$$
$$\sin^2 x+\cos^2 x=\left(\|\sin x\|^2+\|\cos x\|^2,0,\cdots,0\right)=(1,0,\cdots,0).$$

命题 4.2 对任意 $x=(x_1,x_2)\in R\times R^{n-1}$，

1) $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$，

2) $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$。

证明： 考虑 $x_2\neq 0$ （$x_2=0$ 时类似）。

1) 由命题 3.2，对任意 $x=(x_1,x_2)\in R\times R^{n-1}$，

$$(\sin x)^T\cos x=\sin x_1\cos x_1\cos^2\|x_2\|-\sin x_1\cos x_1\sin^2\|x_2\|,$$
$$\begin{aligned}\sin 2x&=\left(\sin 2x_1\cos\|2x_2\|,\cos 2x_1\sin\|2x_2\|\frac{2x_2}{\|2x_2\|}\right)\\&=\left(2\sin x_1\cos x_1\left(\cos^2\|x_2\|-\sin^2\|x_2\|\right),\cos 2x_1\sin\|2x_2\|\frac{2x_2}{\|2x_2\|}\right)\\&=\left(2(\sin x)^T\cos x,\cos 2x_1\sin\|2x_2\|\frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\\&=2\sin x\cdot\cos x.\end{aligned}$$

2) 证明与 1)类似。

命题 4.3 对任意 $x=(x_1,x_2)\in R\times R^{n-1}$，

1) $\sin(-x)=-\sin x$；

2) $\cos(-x)=\cos x$；

3) $\tan(-x) = -\tan x$。

证明： 由于 2)和 3)的证明与 1)相似，故在此只证明 1)。由命题 3.2，若 $x_2 \neq 0$ （$x_2 = 0$ 时类似），

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= \left(\sin(-x_1)\cos\|-x_2\|, \cos(-x_1)\sin\|-x_2\|\frac{-x_2}{\|-x_2\|}\right)\\ &= \left(-\sin x_1 \cos\|x_2\|, -\cos x_1 \sin\|x_2\|\frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

故 $\sin(-x) = -\sin x$。

命题 4.4 对任意 $x = (x_1, x_2) \in R \times R^{n-1}$，令 $0 \le x_1 \le \pi/2$， $e = (1, 0, \cdots, 0)$， $k \in Z$， 则

1) $\sin(x + 2k\pi e) = \sin x$， $\cos(x + 2k\pi e) = \cos x$， $\tan(x + 2k\pi e) = \tan x$；

2) $\sin(\pi e + x) = -\sin x$， $\cos(\pi e + x) = -\cos x$， $\tan(\pi e + x) = \tan x$；

3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}e + x\right) = \cos x, \cos\left(\frac{\pi}{2}e + x\right) = -\sin x.$

证明： 我们只证明每一项的第一个公式，余弦和正切的证明类似。

1) 令 $x = (x_1, x_2) \in R \times R^{n-1}$， $0 \le x_1 \le \pi/2$， $e = (1, 0, \cdots, 0)$， $k \in Z$。当 $x_2 \neq 0$ 时($x_2 = 0$ 时类似)可得

$$\sin(x + 2k\pi e) = \left(\sin x_1 \cos\|x_2\|, \cos x_1 \sin\|x_2\|\frac{x_2}{\|x_2\|}\right) = \sin x.$$

2) 若 $x_2 \neq 0$ （$x_2 = 0$ 时证明类似），

$$\begin{aligned}\sin(\pi e + x) &= \left(\sin(\pi + x_1)\cos\|x_2\|, \cos(\pi + x_1)\sin\|x_2\|\frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\\ &= \left(-\sin x_1 \cos\|x_2\|, -\cos x_1 \sin\|x_2\|\frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

3) 若 $x_2 \neq 0$ （$x_2 = 0$ 可类似证明），

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}e + x\right) &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x_1\right)\cos\|x_2\|, \cos\left(\frac{\pi}{2} + x_1\right)\sin\|x_2\|\frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\\ &= \left(\cos x_1 \cos\|x_2\|, -\sin x_1 \sin\|x_2\|\frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\\ &= \cos x.\end{aligned}$$

5. 结论

本文讨论了三角函数在二阶锥上的表达式，并给出了二阶锥三角函数的一些相关公式，但余切函数在二阶锥上的表达式仍待进一步推导证明。

致　谢

感谢各位编辑及老师的指导与建议！同时也感谢国家自然科学基金(No. 11361001)，北方民族大学博士科研启动基金及研究生创新项目的资助！

参考文献 (References)

[1] Faraut, J. and Koranyi, A. (1994) Analysis on Symmetric Cones. Oxford University Press, New York.

[2] Alizadeh, F. and Goldfarb, D. (2003) Second-Order Cone Programming. *Mathematical Programming*, **95**, 3-15. http://dx.doi.org/10.1007/s10107-002-0339-5

[3] Chen, J.S., Chen, X. and Tseng, P. (2004) Analysis of Nonsmooth Vector-Valued Functions Associated with Sencond-Order Cones. *Mathematical Programming*, **101**, 95-117. http://dx.doi.org/10.1007/s10107-004-0538-3

[4] Chen, J.S. (2006) The Convex and Monotone Functions Associated with Second-Order Cone. *Optimization*, **55**, 363-385. http://dx.doi.org/10.1080/02331930600819514

[5] Fukushima, M., Luo, Z.Q. and Tseng, P. (2001) Smoothing Functions for Second-Order-Cone Complementarity Problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **12**, 436-460. http://dx.doi.org/10.1137/S1052623400380365

[6] 罗见今. 论正切数的数学意义及其中西研究史[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2008, 37(1): 120-124.