Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(6), 486-495
Published Online November 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.66067

Hans汉斯

A Normality Criterion Concerning the Zeros' Multiplicity of $f^n f^{(k)} + H(f) - b$

Jing Li[1], Jun'an Zhao[2], Bingmao Deng[1]

[1]Institute of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
[2]Department of Mathematics, Jinan University, Guangzhou Guangdong
Email: 570760755@qq.com, 526586939@qq.com, dbmao2012@163.com

Received: Nov. 5th, 2016; accepted: Nov. 20th, 2016; published: Nov. 28th, 2016

Abstract

In this paper, we study the normality of holomorphic functions and prove the following results: Let M,n,k be three positive integers satisfying $M \geq 9$ when $n=k=1$ and $M > \frac{(n+1)k}{nk-1}$ when $nk>1$, $b(\neq 0)$ is a finite complex number; let F be a family of holomorphic functions in a domain D and $H(f)$ be a differential polynomial of f and satisfy $\left.\frac{\Gamma}{\gamma}\right|_H < \frac{n+k+1}{n+1}$, if for each $f \in F$, satisfies (1) all zeros of f have multiplicity at least k; (2) all zeros of $f^n f^{(k)} + H(f) - b$ have multiplicity $\geq M$, then F is normal in D.

Keywords

Meromorphic Function, Normal Family, Zalcman Lemma, Differential Polynomial

涉及$f^n f^{(k)} + H(f) - b$的零点重级的正规定则

李　菁[1]，赵隽安[2]，邓炳茂[1]

[1]华南农业大学数学研究所，广东　广州
[2]暨南大学数学系，广东　广州

文章引用: 李菁, 赵隽安, 邓炳茂. 涉及 $f^n f^{(k)} + H(f) - b$ 的零点重级的正规定则[J]. 理论数学, 2016, 6(6): 486-495. http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.66067

Email: 570760755@qq.com, 526586939@qq.com, dbmao2012@163.com

收稿日期：2016年11月5日；录用日期：2016年11月20日；发布日期：2016年11月28日

摘　要

本文研究全纯函数族的正规性,证明了如下结论：设 M,n,k 为三个正整数，其中当 $n=k=1$ 时，$M\geq 9$；当 $nk>1$ 时，$M>\dfrac{(n+1)k}{nk-1}$，b 为一个非零有穷复数，设 F 为区域 D 内的一族全纯函数，$H(f)$ 为 f 的微分多项式且满足 $\left.\dfrac{\Gamma}{\gamma}\right|_H<\dfrac{n+k+1}{n+1}$，若对于 F 中的每一个函数 $f(z)$ 均有(1) $f(z)$ 的零点重级 $\geq k$；(2) $f^n f^{(k)}+H(f)-b$ 的零点重级 $\geq M$，则 F 在 D 内正规。

关键词

亚纯函数，正规族，Zalcman引理，微分多项式

1. 引言及主要结果

本文采用 Nevanlinna 理论中的记号[1] [2]，如 $T(r,f)$，$S(r,f)$，$m(r,f)$，$N(r,f)$，$\overline{N}(r,f)$，$\overline{N}_{1)}(r,f)$，$\overline{N}_{(2}(r,f)$ 等，其中 $S(r,f)=o\{T(r,f)\}$ (除去一个有穷测度集)，$\overline{N}_{1)}(r,f)$ 表示 f 的极点重数 ≤ 1 的密指量，$\overline{N}_{(2}(r,f)$ 表示 f 的极点重数 ≥ 2 的不计重数的密指量。

设 f 为区域 D 内的亚纯函数，$a_1(z),a_2(z),\cdots$ 均在 D 内全纯，$n_0,n_1,\cdots,n_k$ 是非负整数，则称 $M(f)=f^{n_0}(f')^{n_1}\cdots\left(f^{(k)}\right)^{n_k}$ 为 f 的微分单项式，$\gamma_M=n_0+n_1+\cdots+n_k$ 和 $\Gamma_M=n_0+2n_1+\cdots+(k+1)n_k$ 分别称为 $M(f)$ 的次数和权。设 $M_1(f),M_2(f),\cdots,M_n(f)$ 均为 f 的微分单项式，则称 $H(f)=a_1(z)M_1(f)+a_2(z)M_2(f)+\cdots+a_n(z)M_n(f)$ 为 f 的微分多项式，$\gamma_H=\max\{\gamma_{M_1},\gamma_{M_2},\cdots,\gamma_{M_n}\}$ 与 $\Gamma_H=\max\{\Gamma_{M_1},\Gamma_{M_2},\cdots\Gamma_{M_n}\}$ 分别称为 $H(f)$ 的次数和权，$\left.\dfrac{\Gamma}{\gamma}\right|_H=\max\left\{\dfrac{\Gamma_{M_1}}{\gamma_{M_1}},\dfrac{\Gamma_{M_2}}{\gamma_{M_2}},\cdots,\dfrac{\Gamma_{M_n}}{\gamma_{M_n}}\right\}$ 称为 $H(f)$ 的权与次数的比。

设 D 是复平面 C 上的一个区域，F 是 D 内的一族亚纯函数。F 在 D 内正规是指从 F 中任取一个函数序列 $f_n(z)$，必存在一个子序列 $f_{n_k}(z)$ 在 D 内按球面距离内闭一致收敛到一个亚纯函数或 ∞。另外，设 z_0 是 D 内的一点，如果存在 z_0 的一个邻域 $\Delta(z_0)$ 使得 F 在 $\Delta(z_0)$ 内正规，则称 F 在 z_0 处正规。F 在 D 内正规当且仅当 F 在 D 内的每一点都正规。

在亚纯函数正规族理论中，寻找新的正规定则是一个重要问题。

1965 年，杨乐和张广厚[3]证明了

定理 A [3]：设 F 为区域 D 内的一族全纯函数，$n\geq 2$ 为一个正整数，b 为一个非零有穷复数。如果对于 F 中的每一个函数 f 均有 $f^n(z)f'(z)\neq b$，则 F 在 D 内正规。

1982 年，Oshkin [4]进一步证明了

定理 B [4]：设 F 为区域 D 内的一族全纯函数，b 为一个非零有穷复数。如果对于 F 中的每一个函

数 $f(z)$ 均有 $f(z)f'(z)\neq b$，则 F 在 D 内正规。

1993 年，方明亮和徐万松[5]推广了上述定理，把 $f'(z)$ 换成了 $f(z)$ 的线性微分多项式 $f^{(k)}(z)+a_1(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+a_k(z)f(z)$，证明了

定理 C [5]：设 F 为区域 D 内的一族全纯函数，$n,k(k\geq 2)$ 为两个正整数，b 为一个非零有穷复数，$a_1(z),a_2(z),\cdots,a_k(z)$ 均在 D 内全纯，若对于 F 中的每一个函数 $f(z)$ 均有：(1) $f(z)$ 的零点重级 $\geq k$；(2) $f^n\left\{f^{(k)}(z)+a_1(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+a_k(z)f(z)\right\}\neq b$，则 F 在 D 内正规。

定理 D [5]：设 F 为区域 D 内的一族全纯函数，n,k 为两个正整数，b 为一个非零有穷复数，若对于 F 中的每一个函数 $f(z)$ 均有：(1) $f(z)$ 的零点重级 $\geq k$；(2) $f^n(z)f^{(k)}(z)\neq b$，则 F 在 D 内正规。

本文进一步证明了

定理 1：设 M,n,k 为三个正整数，其中当 $n=k=1$ 时，$M\geq 9$；当 $nk>1$ 时，$M>\dfrac{(n+1)k}{nk-1}$，b 为一个非零有穷复数，设 F 为区域 D 内的一族全纯函数，$H(f)$ 为 f 微分多项式且满足 $\left.\dfrac{\Gamma}{\gamma}\right|_H<\dfrac{n+k+1}{n+1}$，若对于 F 中的每一个函数 $f(z)$ 均有：(1) $f(z)$ 的零点重级 $\geq k$；(2) $f^nf^{(k)}+H(f)-b$ 的零点重级 $\geq M$，则 F 在 D 内正规。

推论 2：设 M,n,k 为三个正整数，其中当 $n=k=1$ 时，$M\geq 9$；当 $nk>1$ 时，$M>\dfrac{(n+1)k}{nk-1}$，b 为一个非零有穷复数，设 F 为区域 D 内的一族全纯函数，若对于 F 中的每一个函数 $f(z)$ 均有：(1) $f(z)$ 的零点重级 $\geq k$；(2) $f^nf^{(k)}-b$ 的零点重级 $\geq M$，则 F 在 D 内正规。

2. 几个引理

引理 1 [6]：设 k 为一个正整数，F 为单位圆 Δ 内的一族亚纯函数，且 F 中的每个函数的零点的重级至少是 k，则对于任意实数 $\alpha(0\leq\alpha<k)$，F 在 $z_0(z_0\in\Delta)$ 处不正规的充要条件是，存在

a) 实数 r，$0<r<1$；

b) 点列 $z_j\in\Delta$，$|z_j|<r, z_j\to z_0$；

c) 正数列 $\rho_j,\rho_j\to 0$；

d) 函数列 $f_j, f_j\in F$，

使得函数列 $\left\{\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n^{\alpha}}\right\}$ 在 C 内按球面距离内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$，且 $g(\xi)$ 的零点重级至少是 k。

引理 2：设 f 为一个非常数整函数，b 为一个非零有穷复数，则有

$$T(r,f)\leq 4\overline{N}\left(r,\frac{1}{ff'-b}\right)+S(r,f). \tag{1}$$

证明：不妨设 f 不是一个线性多项式。令

$$Q=ff'-b, \tag{2}$$

则

$$Q'=ff''+(f')^2, \tag{3}$$

$$Q''=ff'''+3f'f''. \tag{4}$$

由(2) (3)得， $\overline{N}\left(r,Q'(z)=0,f(z)=0\right)=\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right),\overline{N}\left(r,Q''(z)=0,Q(z)=0\right)=\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{Q}\right)$。于是有，

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{Q'}\right)=\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{Q}\right)+\overline{N}\left(r,Q'(z)=0,f(z)\neq 0,Q(z)\neq 0\right). \tag{5}$$

令 $h=\frac{Q'}{Q}$，则有

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{h}\right)=\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,Q'(z)=0,f(z)\neq 0,Q(z)\neq 0\right). \tag{6}$$

根据 Nevanlinna 第一基本定理得

$$N\left(r,\frac{1}{h}\right)\leq T(r,h)+O(1)\leq N(r,h)+S(r,f)\leq \overline{N}\left(r,\frac{1}{Q}\right)+S(r,f). \tag{7}$$

设 z_1 是 f 的一个重零点，那么 z_1 是 h 的重零点，则 $\overline{N}\left(r,\frac{1}{h}\right)\leq N\left(r,\frac{1}{h}\right)-\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)$，于是由(6),(7)得

$$2\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,Q'(z)=0,f(z)\neq 0,Q(z)\neq 0\right)\leq \overline{N}\left(r,\frac{1}{Q}\right)+S(r,f). \tag{8}$$

由(2) (3)可得

$$f^2L_1[f]=L_2[f]. \tag{9}$$

其中

$$L_1[f]=\frac{f''}{f}+\left(\frac{f'}{f}\right)^2-\frac{Q'}{Q}\cdot\frac{f'}{f}, \tag{10}$$

$$L_2[f]=-\frac{Q'}{Q}\cdot b. \tag{11}$$

显然 $L_1[f]\not\equiv 0,L_2[f]\not\equiv 0$，且 $m\left(r,L_1[f]\right)=S(r,f),m\left(r,L_2[f]\right)=S(r,f)$.

由 Nevanlinna 第一基本定理以及(9) (10)和(11)得

$$\begin{aligned}2T(r,f)&=2m(r,f)=m\left(r,f^2\right)\\&\leq m\left(r,L_2[f]\right)+m\left(r,\frac{1}{L_1[f]}\right)\\&\leq T\left(r,L_1[f]\right)-N\left(r,\frac{1}{L_1[f]}\right)+S(r,f)\\&\leq m\left(r,L_1[f]\right)+N\left(r,L_1[f]\right)-N\left(r,\frac{1}{L_1[f]}\right)+S(r,f)\\&\leq N\left(r,L_1[f]\right)-N\left(r,\frac{1}{L_1[f]}\right)+S(r,f)\\&\leq \overline{N}\left(r,\frac{1}{Q}\right)+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)-\overline{N}\left(r,Q'(z)=0,f(z)\neq 0,Q(z)\neq 0\right)+S(r,f).\end{aligned} \tag{12}$$

令

$$u=\frac{Q''}{Q'}=\frac{ff'''+3f'f''}{ff''+(f')^2},\tag{13}$$

由于 f 不是一个线性多项式，故 $u\not\equiv 0$。由(13)得

$$N(r,u)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{Q'}\right).\tag{14}$$

令

$$v=\frac{f'}{f}\cdot u-3\cdot\frac{f''}{f}=\frac{f'f'''-3(f'')^2}{ff''+(f')^2},\tag{15}$$

由(13) (15)得， v 的极点来自 Q' 的零点，则有

$$N(r,v)\le 2\overline{N}\left(r,\frac{1}{Q'}\right).\tag{16}$$

令 $F=3v'-2uv$，且

$$\begin{aligned}G&=3u'-2u^2-12v\\&=\frac{f\left\{3ff''f'^4+3(f')^2f^4+45(f'')^3-5f(f''')^2-30ff'f''f'''\right\}}{\left[ff''+(f')^2\right]^2}.\end{aligned}\tag{17}$$

我们断言 $G\not\equiv 0$。

事实上，假设 $G\not\equiv 0$。由(13)得

$$ff'''+3f'f''=u\left[ff''+(f')^2\right],\tag{18}$$

由(15) (18)得 $\dfrac{f'''-uf''}{f'}=\dfrac{uf'-3f''}{f}=v$。于是有

$$f'''-uf''=vf',\tag{19}$$

$$uf'-3f''=vf.\tag{20}$$

对(20)式求导得

$$u'f'+uf''-3f'''=v'f+vf',\tag{21}$$

结合(19) (21)得

$$u'f'-2uf''=v'f+4vf',\tag{22}$$

进一步结合(20) (22)得到 $(3u'-2u^2-12v)f'=(3v'-2uv)f$，即

$$Gf'=Ff,\tag{23}$$

因为 $G\equiv 0$，由(23)得， $F\equiv 0$。即

$$3u'-2u^2-12v\equiv 0,\tag{24}$$

$$3v'-2uv\equiv 0.\tag{25}$$

对(24)式求导得

$$3u''-4uu'-12v'\equiv 0, \tag{26}$$

结合(25) (26)得

$$3u''-4uu'-8uv\equiv 0, \tag{27}$$

进一步结合(24) (27)得

$$9u''-18uu'+4u^{3}\equiv 0. \tag{28}$$

由于 f 没有极点，故 Q' 也没有极点。由(13)式知，u 要么是整函数，要么是只含简单极点且在极点处的留数为正整数的亚纯函数。以下分两种情形讨论。

情形 1： u 是整函数。

由(28)得，u 不可能是多项式，则 u 只能是超越整函数。于是有

$$\begin{aligned}3m(r,u)&=m\left(r,4u^{3}\right)+O(1)=m\left(r,18uu'-9u''\right)+O(1)\\&=m\left(r,u\left(18u'-\frac{9u''}{u}\right)\right)+O(1)\\&\le m(r,u)+m\left(r,18u'-\frac{9u''}{u}\right)+O(1)\\&\le m(r,u)+m(r,u')+S(r,f)\\&\le 2m(r,u)+S(r,f),\end{aligned}$$

故 $T(r,u)=m(r,u)=S(r,f)$，这与 u 是超越整函数矛盾。

情形 2： u 是只含简单极点且在极点处的留数为正整数的亚纯函数。

设 α 是 u 的简单极点，且 u 在 α 处的留数是 $n\left(n\in Z^{+}\right)$，则有

$$u(z)=\frac{n}{z-\alpha}+n_{0}+n_{1}(z-\alpha)+\cdots,$$

故(28)式左边可写成

$$\frac{18n+18n^{2}+4n^{3}}{(z-\alpha)^{3}}+\cdots,$$

显然 $18n+18n^{2}+4n^{3}\neq 0$，故(28)式不可能成立，矛盾。因此 $G\not\equiv 0$。

由(17)得，f 的单零点必为 G 的零点，又因为 $G\not\equiv 0$，结合(14) (16)，则有

$$\begin{aligned}\bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)&\le N\left(r,\frac{1}{G}\right)\le T(r,G)+O(1)\\&=N\left(r,3u'-2u^{2}-12v\right)+m\left(r,3u'-2u^{2}-12v\right)+O(1)\\&=N\left(r,3u'-2u^{2}-12v\right)+S(r,f)\\&\le 2\bar{N}\left(r,\frac{1}{Q'}\right)+S(r,f).\end{aligned} \tag{29}$$

由于

$$2\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)\le \bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)\le \bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)+T(r,f)+O(1), \tag{30}$$

综合(5) (8) (12) (29)和(30)得

$$
\begin{aligned}
T(r,f) &\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{Q}\right)+\bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)-\bar{N}\left(r,Q'(z)=0,f(z)\ne 0,Q(z)\ne 0\right)+S(r,f)\\
&\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{Q}\right)+2\bar{N}\left(r,\frac{1}{Q'}\right)-\bar{N}\left(r,Q'(z)=0,f(z)\ne 0,Q(z)\ne 0\right)+S(r,f)\\
&\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{Q}\right)+2\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{Q}\right)+\bar{N}\left(r,Q'(z)=0,f(z)\ne 0,Q(z)\ne 0\right)+2\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)\\
&\le 2\bar{N}\left(r,\frac{1}{Q}\right)+2\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{Q}\right)+S(r,f)\le 4\bar{N}\left(r,\frac{1}{Q}\right)+S(r,f).
\end{aligned}
$$

于是引理 2 得证。

注：引理 2 的证明方法参考了文献[7] [8]。

引理 3： 设 M,n,k 为三个正整数，其中当 $n=k=1$ 时， $M\ge 9$；当 $nk>1$ 时， $M>\frac{(n+1)k}{nk-1}$， b 为一个非零有穷复数，设 f 是一个整函数，若 $f(z)$ 满足：(1) $f(z)$ 的零点重级均 $\ge k$；(2) $f^n f^{(k)}-b$ 的零点重级均 $\ge M$， 则 f 恒为常数。

证明： 假设 f 不恒为常数. 以下分两种情况讨论。

情形 1： $n=k=1$。

根据引理 2 及 Nevanlinna 第一基本定理得

$$
\begin{aligned}
T(r,f) &\le 4\bar{N}\left(r,\frac{1}{ff'-b}\right)+S(r,f)\le \frac{4}{M}N\left(r,\frac{1}{ff'-b}\right)+S(r,f)\\
&\le \frac{4}{M}T\left(r,\frac{1}{ff'-b}\right)+S(r,f)\le \frac{4}{M}T(r,ff'-b)+S(r,f)\\
&\le \frac{4}{M}\left[T(r,f)+T(r,f')\right]+S(r,f)\\
&\le \frac{4}{M}\left[T(r,f)+m(r,f')\right]+S(r,f)\\
&\le \frac{4}{M}\left[T(r,f)+m(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\right]+S(r,f)\\
&\le \frac{4}{M}\left[T(r,f)+m(r,f)\right]+S(r,f)\\
&\le \frac{8}{M}T(r,f)+S(r,f),
\end{aligned}
$$

即 $\left(1-\frac{8}{M}\right)T(r,f)\le S(r,f)$，即 $T(r,f)=S(r,f)$。矛盾。

情形 2： $nk>1$。

若 $\left(f^n f^{(k)}\right)'\equiv 0$，则 $f^n f^{(k)}\equiv C$ （C 为一个常数)。如果 $C=0$，则 f 为次数 $<k$ 的多项式，又因为 f 的零点重级 $\ge k$， 则 f 恒为常数，矛盾；如果 $C\ne 0$， 显然 f 没有零点也没有极点，且 $\frac{C}{f^{n+1}}\equiv\frac{f^{(k)}}{f}$， 由 Nevanlinna 第一基本定理得

$$
(n+1)m\left(r,\frac{1}{f}\right)=m\left(r,\frac{C}{f^{n+1}}\right)=m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=S(r,f),
$$

进而 $(n+1)T(r,f)=S(r,f)$, 即 $T(r,f)=S(r,f)$，则 f 恒为常数，矛盾。因此 $\left(f^n f^{(k)}\right)'\not\equiv 0$。

根据 Nevanlinna 第一基本定理得

$$\begin{aligned}
m\left(r,\frac{1}{f^{n+1}}\right)+m\left(r,\frac{1}{f^n f^{(k)}-b}\right)&=m\left(r,\frac{1}{f^n f^{(k)}}\cdot\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{1}{f^n f^{(k)}-b}\right)\\
&\le m\left(r,\frac{1}{f^n f^{(k)}}\right)+m\left(r,\frac{1}{f^n f^{(k)}-b}\right)+S(r,f)\\
&\le m\left(r,\frac{1}{f^n f^{(k)}}+\frac{1}{f^n f^{(k)}-b}\right)+S(r,f)\le m\left(r,\frac{1}{\left(f^n f^{(k)}\right)'}\right)+S(r,f)\\
&\le T\left(r,\left(f^n f^{(k)}\right)'\right)-N\left(r,\frac{1}{\left(f^n f^{(k)}\right)'}\right)+S(r,f)\\
&\le m\left(r,\left(f^n f^{(k)}\right)'\right)+N\left(r,\left(f^n f^{(k)}\right)'\right)-N\left(r,\frac{1}{\left(f^n f^{(k)}\right)'}\right)+S(r,f)\\
&\le m\left(r,f^n f^{(k)}\right)-N\left(r,\frac{1}{\left(f^n f^{(k)}\right)'}\right)+S(r,f)\\
&\le T\left(r,f^n f^{(k)}\right)-N\left(r,\frac{1}{\left(f^n f^{(k)}\right)'}\right)+S(r,f),
\end{aligned}$$

上式两边同时加上 $N\left(r,\frac{1}{f^{n+1}}\right),N\left(r,\frac{1}{f^n f^{(k)}-b}\right)$，得

$$\begin{aligned}
(n+1)T(r,f)&\le N\left(r,\frac{1}{f^{n+1}}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^n f^{(k)}-b}\right)-N\left(r,\frac{1}{\left(f^n f^{(k)}\right)'}\right)+S(r,f)\\
&\le (k+1)\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^n f^{(k)}-b}\right)+S(r,f)\le\frac{k+1}{k}N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\frac{1}{M}N\left(r,\frac{1}{f^n f^{(k)}-b}\right)+S(r,f)\\
&\le\frac{k+1}{k}T(r,f)+\frac{1}{M}T\left(r,\frac{1}{f^n f^{(k)}-b}\right)+S(r,f)\\
&\le\frac{k+1}{k}T(r,f)+\frac{1}{M}T\left(r,f^n\right)+\frac{1}{M}T\left(r,f^{(k)}\right)+S(r,f)\\
&\le\frac{k+1}{k}T(r,f)+\frac{n}{M}T(r,f)+\frac{1}{M}\left(m(r,f)+N\left(r,f^{(k)}\right)\right)+S(r,f)\\
&\le\frac{k+1}{k}T(r,f)+\frac{n+1}{M}T(r,f)+S(r,f),
\end{aligned}$$

于是有

$$\left(n+1-\frac{k+1}{k}-\frac{n+1}{M}\right)T(r,f)\le S(r,f),$$

由 $M>\frac{(n+1)k}{nk-1}$ 得， $n+1-\frac{k+1}{k}-\frac{n+1}{M}>0$，故 $T(r,f)=S(r,f)$，矛盾。

于是引理 3 得证。

3. 定理 1 的证明

不妨设区域 D 为单位圆 Δ。假设定理 1 不真，则必存在 Δ 内一点 z_0，使得 F 在 $z=z_0$ 处不正规。因而由引理 1 知，存在

a) 实数 $r, 0<r<1$；

b) 点列 $z_j\in\Delta, |z_j|<r, z_j\to z_0$；

c) 正数列 $\rho_j, \rho_j\to 0$；

d) 函数列 $f_j, f_j\in F$，

使得函数列 $\left\{g_j(\xi)=\rho_j^{-\frac{k}{n+1}}f_j(z_j+\rho_j\xi)\right\}$ 在复平面上的任意紧子集上一致收敛到一个非常数整函数 $g(\xi)$，且 $g(\xi)$ 的零点重级均 $\ge k$。因为

$$H\left(f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)\right)=\sum_{i=1}^{m}a_i\left(z_j+\rho_j\xi\right)M_i\left(f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)\right)=\sum_{i=1}^{m}a_i\left(z_j+\rho_j\xi\right)\rho_j^{\frac{n+k+1}{n+1}\gamma_{M_i}-\Gamma_{M_i}}M_i\left(g_j(\xi)\right),$$

所以

$$\begin{aligned}
&g_j^n(\xi)g_j^{(k)}(\xi)+\sum_{i=1}^{m}a_i\left(z_j+\rho_j\xi\right)\rho_j^{\frac{n+k+1}{n+1}\gamma_{M_i}-\Gamma_{M_i}}M_i\left(g_j(\xi)\right)-b\\
&=\frac{f_j^n\left(z_j+\rho_j\xi\right)}{\rho_j^{\frac{kn}{n+1}}}\frac{\rho_j^k f_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi\right)}{\rho_j^{\frac{k}{n+1}}}+H\left(f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)\right)-b\\
&=f_j^n\left(z_j+\rho_j\xi\right)f_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi\right)+H\left(f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)\right)-b.
\end{aligned}$$

由于 $a_i(z)(i=1,2,\cdots,m)$ 在 D 内全纯， $|z_j|<r$， $\rho_j\to 0$，故在 D 内任意紧子集上当 j 充分大时一致有

$$\left|a_i\left(z_j+\rho_j\xi\right)\right|\le M\left(\frac{1+r}{2},a_i(z)\right)<+\infty\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

又因为 $\left.\frac{\Gamma}{\gamma}\right|_H<\frac{n+k+1}{n+1}$， 所以 $\frac{n+k+1}{n+1}\gamma_{M_i}-\Gamma_{M_i}>0$。故函数 $\sum_{i=1}^{m}a_i\left(z_j+\rho_j\xi\right)\rho_j^{\frac{n+k+1}{n+1}\gamma_{M_i}-\Gamma_{M_i}}M_i\left(g_j(\xi)\right)$ 在 D 内任意紧子集上一致收敛于零。故

$$g_j^n(\xi)g_j^{(k)}(\xi)+\sum_{i=1}^{m}a_i\left(z_j+\rho_j\xi\right)\rho_j^{\frac{n+k+1}{n+1}\gamma_{M_i}-\Gamma_{M_i}}M_i\left(g_j(\xi)\right)-b$$

在 D 内任意紧子集上一致趋于 $g^n(\xi)g^{(k)}(\xi)-b.$

于是有， $f_j^n\left(z_j+\rho_j\xi\right)f_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi\right)+H\left(f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)\right)-b$ 在 D 内任意紧子集上一致收敛到 $g^n(\xi)g^{(k)}(\xi)-b$。由 Hurwitz 定理知， $g^n(\xi)g^{(k)}(\xi)-b$ 的零点重级均 $\ge M$，则根据引理 3 得 $g(\xi)$ 恒为常数，矛盾。于是 F 在 D 内正规。定理 1 证毕。

4. 推论 2 的证明

推论 2 的证明方法与定理 1 的证明方法完全一样，故在此省略。

致　谢

作者由衷地感谢方明亮教授的悉心指导！

基金项目

国家自然科学基金(No.11371149)资助。

参考文献 (References)

[1] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Function. Clarendon Press, Oxford.

[2] Yang, L. (1993) Value Distribution theory. Springer-Verlag & Science Press, Berlin.

[3] Yang, L. and Zhang, G.H. (1965) Recherchessur la normalit e des familles de fonctionsanalytiquesa des valeurs multiples. Un nouveau crit e re etquelques applications. *Sci. Sinica*, **14**, 1258-1271.

[4] Oshkin, I. (1982) A Normal Criterion of Families of Holomorphic Functions. *Usp. Mat. Nauk*, **37**, 221-222. (In Russian)

[5] 方明亮, 徐万松. 关于 Oshkin 的一个定理[J]. 南京航空航天大学学报, 1993(25): 714-718.

[6] 方明亮. 一族亚纯函数的正规定则[J]. 数学学报, 1994: 86-90.

[7] 仪洪勋. 关于 ff' 的值分布[J]. 科学通报, 1989(10): 727-730.

[8] Clunie, J. (1967) On a result of Hayman. *Journal of the London Mathematical Society*, **42**, 389-392. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-42.1.389