Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(1), 30-38
Published Online January 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2017.71005

A Brauer-Type Set with *n* Parameters to Localize All Eigenvalues Different from 1 for Stochastic Matrices

Xiaoxiao Wang, Yaotang Li*

School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: m18213961720@163.com, *liyaotang@ynu.edu.cn

Received: Jan. 1st, 2017; accepted: Jan. 17th, 2017; published: Jan. 20th, 2017

Abstract

A Brauer-type set with *n* parameters is given to localize all eigenvalues different from 1 for stochastic matrices, and an upper bound for the moduli of the subdominant eigenvalues of a stochastic matrix is obtained by using this set. Numerical examples are given to illustrate that the proposed set by taking proper parameters is better than the sets obtained from some existing literatures.

Keywords

Stochastic Matrix, Eigenvalue Inclusion Set, Subdominant Eigenvalue

随机矩阵非1特征值的含*n*个参数的Brauer型定位集

王笑笑，李耀堂*

云南大学数学与统计学院，云南 昆明
Email: m18213961720@163.com, *liyaotang@ynu.edu.cn

收稿日期：2017年1月1日；录用日期：2017年1月17日；发布日期：2017年1月20日

*通讯作者。

文章引用: 王笑笑, 李耀堂. 随机矩阵非 1 特征值的含 *n* 个参数的 Brauer 型定位集[J]. 理论数学, 2017, 7(1): 30-38.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2017.71005

摘　要

本文给出了随机矩阵非1特征值的一个含有*n*个参数的Brauer型定位集，并应用此定位集得到了随机矩阵次占优特征值模的一个新上界。文中数值算例表明通过适当选取参数，该文所得集合对随机矩阵非1特征值的定位优于一些现有文献中所给集合。

关键词

随机矩阵，特征值定位集，次占优特征值

1. 引言

随机矩阵及其特征值定位在诸如计算机辅助设计、人口流动模型、有限马尔可夫过程等领域都有着重要应用[1] [2] [3]，其定义如下：

定义 1：设 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为非负矩阵。若它的所有行和都为 1，即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1,\quad \forall i\in N=\{1,2,\cdots,n\}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为(行)随机矩阵。

由著名的 Perron-Frobenius 定理[4]知，1 是随机矩阵的模最大特征值，称为占优特征值，且 $e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in R^{n}$ 是其对应的一个特征向量。设 $\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})=\{\lambda|\lambda$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值$\}$，若对任意 $\eta\in\sigma(\boldsymbol{A})$，$\eta\neq1$ 且 $\eta\neq\lambda$，都有 $1>|\lambda|>|\eta|$，则称 λ 是随机矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的次占优特征值。

由于随机矩阵的次占优特征值在随机过程收敛速度的估计中有重要作用，因此定位随机矩阵的非 1 特征值或估计次占优特征值的模具有重要意义。Li 等在[5]中应用

$$L_i(\boldsymbol{A})=\max_{j\neq i}a_{ji},\ l_i(\boldsymbol{A})=\min_{j\neq i}a_{ji},\ v_i(\boldsymbol{A})=\max\left\{0,\frac{1}{2}\min_{\substack{k,m\neq i\\k\neq m}}\{a_{ki}+a_{mi}\}\right\},$$

$$V_i(\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\max_{\substack{k,m\neq i\\k\neq m}}\{a_{ki}+a_{mi}\},\ q_i(\boldsymbol{A})=\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}a_{ji}$$

和著名的 Brauer 矩阵特征值定位集，给出了下面五个随机矩阵非 1 特征值定位集。

定理 2 [5]：设 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵。若 $\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\setminus\{1\}$，则

$$\begin{aligned}&\lambda\in B^{\mathrm{stol}}(\boldsymbol{A})\\&=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\j\neq i}}\left(B_{ij}^{\mathrm{stol}}(\boldsymbol{A})=\left\{z\in C:\left|a_{ii}-z-l_i(\boldsymbol{A})\right|\left|a_{jj}-z-l_j(\boldsymbol{A})\right|\leq Cl_i(A)Cl_j(\boldsymbol{A})\right\}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lambda\in B^{\mathrm{stov}}(\boldsymbol{A})\\&=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\j\neq i}}\left(B_{ij}^{\mathrm{stov}}(\boldsymbol{A})=\left\{z\in C:\left|a_{ii}-z-v_i(\boldsymbol{A})\right|\left|a_{jj}-z-v_j(\boldsymbol{A})\right|\leq Cv_i(A)Cv_j(\boldsymbol{A})\right\}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lambda\in B^{\mathrm{stoq}}(\boldsymbol{A})\\&=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\j\neq i}}\left(B_{ij}^{\mathrm{stoq}}(\boldsymbol{A})=\left\{z\in C:\left|a_{ii}-z-q_i(\boldsymbol{A})\right|\left|a_{jj}-z-q_j(A)\right|\leq Cq_i(\boldsymbol{A})Cq_j(\boldsymbol{A})\right\}\right);\end{aligned}$$

其中

$$Cl_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j\neq i}\left|a_{ji}-l_i(\boldsymbol{A})\right|=C_i(\boldsymbol{A})-(n-1)l_i(\boldsymbol{A}),$$

$$Cq_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j\neq i}\left|a_{ji}-q_i(\boldsymbol{A})\right|,$$

$$Cv_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j\neq i}\left|a_{ji}-v_i(\boldsymbol{A})\right|=C_i(\boldsymbol{A})-(n-3)v_i(\boldsymbol{A})-2l_i(\boldsymbol{A}).$$

定理 3 [5]：设 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵。若 $\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\backslash\{1\}$，则

$$\begin{aligned}&\lambda\in B^{\text{stoL}}(\boldsymbol{A})\\&=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ j\neq i}}\left(B_{ij}^{\text{stoL}}(\boldsymbol{A})=\left\{z\in C:\left|L_i(\boldsymbol{A})-a_{ii}+z\right|\left|L_j(\boldsymbol{A})-a_{jj}+z\right|\leq CL_i(\boldsymbol{A})CL_j(\boldsymbol{A})\right\}\right);\\&\lambda\in B^{\text{stoV}}(\boldsymbol{A})\\&=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ j\neq i}}\left(B_{ij}^{\text{stoV}}(\boldsymbol{A})=\left\{z\in C:\left|V_i(\boldsymbol{A})-a_{ii}+z\right|\left|V_j(\boldsymbol{A})-a_{jj}+z\right|\leq CV_i(\boldsymbol{A})CV_j(\boldsymbol{A})\right\}\right);\end{aligned}$$

其中

$$CL_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j\neq i}\left|L_i(\boldsymbol{A})-a_{ji}\right|=(n-1)L_i(\boldsymbol{A})-C_i(\boldsymbol{A}),$$

$$CV_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j\neq i}\left|V_i(\boldsymbol{A})-a_{ji}\right|=(n-3)V_i(\boldsymbol{A})+2L_i(\boldsymbol{A})-C_i(\boldsymbol{A}).$$

注意到 $l_i(\boldsymbol{A}),v_i(\boldsymbol{A}),q_i(\boldsymbol{A}),L_i(\boldsymbol{A}),V_i(\boldsymbol{A})$ 都在区间 $\left[\min\limits_{j\neq i}a_{ij},\max\limits_{j\neq i}a_{ij}\right]$ 上，自然要问：在该区间上可否选择其它值使得用其得到随机矩阵非 1 特征值的 Brauer 型定位集更为精确？本文就来讨论该问题，在第二节给出随机矩阵非 1 特征值的一个含有 n 个参数的 Brauer 型定位集，当这些参数分别取 $l_i(\boldsymbol{A}),v_i(\boldsymbol{A}),q_i(\boldsymbol{A}),$ $L_i(\boldsymbol{A}),V_i(\boldsymbol{A})$ 时，该集合就分别成为定理 2 中的 $B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A}),B^{\text{stov}}(\boldsymbol{A}),B^{\text{stoq}}(\boldsymbol{A})$ 和定理 3 中的 $B^{\text{stoV}}(\boldsymbol{A}),B^{\text{stoL}}(\boldsymbol{A})$。在第三节应用该集合给出随机矩阵次占优特征值模的一个上界。

2. 随机矩阵非 1 特征值的含有 n 个参数的 Brauer 型定位集

本节我们给出一个新的随机矩阵非 1 特征值定位集。为讨论方便，先给出如下引理。

引理 4 [6]：设 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵，$\mu\in\sigma(\boldsymbol{A})\backslash\{1\}$，则对任意的 $d=\left[d_1,d_2,\cdots,d_n\right]^{\mathrm{T}}\in R^n$，$-\mu$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}=ed^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}$ 的特征值。

设 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$，$\alpha_i\in[0,1]$，取向量

$$d=L^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=\left[L_1^{\alpha_1}(\boldsymbol{A}),L_2^{\alpha_2}(\boldsymbol{A}),L_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A}),\cdots,L_n^{\alpha_n}(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}},\tag{1}$$

记

$$L_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=\alpha_iL_i(\boldsymbol{A})+(1-\alpha_i)l_i(\boldsymbol{A})=\alpha_i\max_{\substack{j\neq i\\ j\in N}}a_{ji}+(1-\alpha_i)\min_{\substack{j\neq i\\ j\in N}}a_{ji},\forall i\in N。$$

定理 5：设 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵。若 $\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\backslash\{1\}$，则对任意的 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_i\in[0,1]$，$i\in N$ 有

$$\lambda\in B^{\text{stoα}}(\boldsymbol{A})=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}B_{ij}^{\text{stoα}}(\boldsymbol{A}),$$

其中

$$\begin{aligned}B_{ij}^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})=\Big\{z\in C:&\left|\alpha_i L_i(\boldsymbol{A})+(1-\alpha_i)l_i(\boldsymbol{A})-a_{ii}+z\right|\\&\left|\alpha_j L_j(\boldsymbol{A})+(1-\alpha_j)l_i(\boldsymbol{A})-a_{jj}+z\right|\le CL_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})CL_j^{\alpha_j}(\boldsymbol{A})\Big\}\end{aligned}\tag{2}$$

$$CL_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=\sum_{j\ne i}\left|L_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})-a_{ji}\right|=\sum_{j\ne i}\left|\alpha_i L_i(\boldsymbol{A})+(1-\alpha_i)l_i(\boldsymbol{A})-a_{ji}\right|.$$

证明：令 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，记

$$B^{\alpha}=ed^{\mathrm{T}}-A=\left[b_{ij}^{\alpha_j}\right],$$

其中

$$d=L^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=\left[L_1^{\alpha_1}(\boldsymbol{A}),L_2^{\alpha_2}(\boldsymbol{A}),\cdots,L_n^{\alpha_n}(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}}.$$

设 $\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\setminus\{1\}$，由引理 4 知 $-\lambda\in\sigma(B^{\alpha})$。再由 Brauer 矩阵特征值定位定理[7]得

$$-\lambda\in\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\ne j}}\left\{z\in C:\left|b_{ii}^{\alpha_i}-z\right|\left|b_{jj}^{\alpha_j}-z\right|\le C_i(B^{\alpha})C_j(B^{\alpha})\right\},$$

即

$$\lambda\in\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\ne j}}\left\{z\in C:\left|b_{ii}^{\alpha_i}+z\right|\left|b_{jj}^{\alpha_j}+z\right|\le C_i(B^{\alpha})C_j(B^{\alpha})\right\}。$$

由于对每个 $i\in N$

$$\begin{aligned}b_{ii}^{\alpha_i}&=L_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})-a_{ii}=\alpha_i L_i(\boldsymbol{A})+(1-\alpha_i)l_i(\boldsymbol{A})-a_{ii},\\ C_i(B^{\alpha})&=\sum_{j\ne i}\left|L_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})-a_{ji}\right|=CL_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

故

$$B_{ij}^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})=\left\{z\in C:\left|b_{ii}^{\alpha_i}+z\right|\left|b_{jj}^{\alpha_j}+z\right|\le C_i(B^{\alpha})C_j(B^{\alpha})\right\}.$$

于是

$$\lambda\in B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})=\bigcup_{\substack{i,l\in N\\ i\ne j}}B_{ij}^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$$

■

例 1：考虑由 MATLAB 代码

$$k=10;\ A=\mathrm{rand}(k,k);\ A=\mathrm{inv}(\mathrm{diag}(\mathrm{sum}(A')))*A$$

生成的 50 个随机矩阵，应用 MATLAB 代码

$$\mathrm{alpha}=\mathrm{rand}(1,k)$$

产生向量 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{10})$，其中 $\alpha_i\in[0,1]$, $i=1,2,\cdots,10$。并对 $B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$ 和 $B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})$ 作图，得出它们的包含关系(见表 1)。由表 1 知，其中有 40 个 $B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})\subset B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})$，9 个 $B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})\not\subset B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})$，$B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})\not\subset B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$，1 个 $B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})\subset B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$。此表 1 表明定理 5 中得到的集合 $B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$ 在大多数情况下含于 Li 等在[5]中所给的集合 $B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})$ 之中。

Table 1. The comparisons of $B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$ and $B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})$

表 1. $B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$ 与 $B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})$ 比较表

$B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$ 与 $B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})$ 包含情况	$B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})\not\subset B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})$ $B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})\not\subset B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$	$B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})\subset B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$	$B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})\subset B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})$
矩阵个数	9	1	40
矩阵序号	1,5,12,13,14,15,16,31,45	49	其它

注：(I) 当取 $\alpha_i=1$，$\forall i\in N$ 时，$L_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=L_i(\boldsymbol{A})$ 且 $CL_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=CL_i(\boldsymbol{A})$，这时定理 5 中的 $B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$ 就是定理 3 中的 $B^{\text{stoL}}(\boldsymbol{A})$。

(II) 当取 $\alpha_i=\dfrac{V_i(\boldsymbol{A})-l_i(\boldsymbol{A})}{L_i(\boldsymbol{A})-l_i(\boldsymbol{A})}\in[0,1]$，$\forall i\in N$ 时，$L_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=V_i(\boldsymbol{A})$ 且 $CL_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=CV_i(\boldsymbol{A})$，这时定理 5 中的 $B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$ 就是定理 3 中的 $B^{\text{stoV}}(\boldsymbol{A})$。

(III) 当取 $\alpha_i=\dfrac{q_i(\boldsymbol{A})-l_i(\boldsymbol{A})}{L_i(\boldsymbol{A})-l_i(\boldsymbol{A})}\in[0,1]$，$\forall i\in N$ 时，$L_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=q_i(\boldsymbol{A})$ 且 $CL_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=Cq_i(\boldsymbol{A})$，这时定理 5 中的 $B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$ 就是定理 2 中的 $B^{\text{stoq}}(\boldsymbol{A})$。

(IV) 当取 $\alpha_i=\dfrac{v_i(\boldsymbol{A})-l_i(\boldsymbol{A})}{L_i(\boldsymbol{A})-l_i(\boldsymbol{A})}\in[0,1]$，$\forall i\in N$ 时，$L_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=v_i(\boldsymbol{A})$ 且 $CL_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=Cv_i(\boldsymbol{A})$，这时定理 5 中的 $B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$ 就是定理 2 中的 $B^{\text{stov}}(\boldsymbol{A})$。

(V) 当取 $\alpha_i=0$，$\forall i\in N$ 时，$L_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=l_i(\boldsymbol{A})$ 且 $CL_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})=Cl_i(\boldsymbol{A})$，这时定理 5 中的 $B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$ 就是定理 2 中的 $B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})$。

因此，定理 5 是定理 2 及定理 3 的推广和改进。同时，由定理 5 易得下面结果。

定理 6： 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵，若 $\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\setminus\{1\}$，则

$$\lambda\in B^{[0,1]}(\boldsymbol{A})=\bigcap_{\substack{\alpha_i\in[0,1]\\ i\in N}} B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$$

且

$$B^{[0,1]}(\boldsymbol{A})\subseteq\left(B^{\text{stoL}}(\boldsymbol{A})\cap B^{\text{stoV}}(\boldsymbol{A})\cap B^{\text{stoq}}(\boldsymbol{A})\cap B^{\text{stov}}(\boldsymbol{A})\cap B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})\right)$$

由于该定理中的集合 $B^{[0,1]}(\boldsymbol{A})$ 涉及无穷多个参数 α，不易得到。在实际中，可选取特殊的参数 α 来获得 $B^{[0,1]}(\boldsymbol{A})$ 的近似集，下面我们用数值算例来进行说明。

例 2. 考虑例 1 中的第 31 个随机矩阵 $\boldsymbol{A}$，由表 1 知

$$B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})\not\subset B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A}) \text{ 且 } B^{\text{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})\not\subset B^{\text{stol}}(\boldsymbol{A})。$$

此包含关系也可见图 1。进一步，通过 MATLAB 代码

$$\text{alpha}=\text{rand}(1,10)$$

生成 3 个参数向量

$$\alpha^{(1)}=[0.0759,0.0540,0.5308,0.7792,0.9340,0.1299\ ,0.5688,0.4694,0.0119,0.3371],$$

$$\alpha^{(2)} = [0.1622, 0.7943, 0.3112, 0.5285, 0.1656, 0.6020, 0.2630, 0.6541, 0.6892, 0.7482],$$

$$\alpha^{(3)} = [0.4505, 0.0838, 0.2290, 0.9133, 0.1524, 0.8258, 0.5383, 0.9961, 0.0782, 0.4427]。$$

由定理 6 知，对任意 $\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A}) \setminus \{1\}$，有

$$\lambda \in \left(B^{\mathrm{sto}\alpha^{(1)}}(\boldsymbol{A}) \bigcap B^{\mathrm{sto}\alpha^{(2)}}(\boldsymbol{A}) \bigcap B^{\mathrm{sto}\alpha^{(3)}}(\boldsymbol{A}) \right)。$$

图 2 给出了 $B^{\mathrm{sto}\alpha^{(1)}}(\boldsymbol{A}) \bigcap B^{\mathrm{sto}\alpha^{(2)}}(\boldsymbol{A}) \bigcap B^{\mathrm{sto}\alpha^{(3)}}(\boldsymbol{A})$。由图 2 知

$$1 \notin \left(B^{\mathrm{sto}\alpha^{(1)}}(\boldsymbol{A}) \bigcap B^{\mathrm{sto}\alpha^{(2)}}(\boldsymbol{A}) \bigcap B^{\mathrm{sto}\alpha^{(3)}}(\boldsymbol{A}) \right),$$

且

$$B^{[0,1]}(\boldsymbol{A}) \subseteq \left(B^{\mathrm{sto}\alpha^{(1)}}(\boldsymbol{A}) \bigcap B^{\mathrm{sto}\alpha^{(2)}}(\boldsymbol{A}) \bigcap B^{\mathrm{sto}\alpha^{(3)}}(\boldsymbol{A}) \right) \subset B^{\mathrm{stol}}(\boldsymbol{A})$$

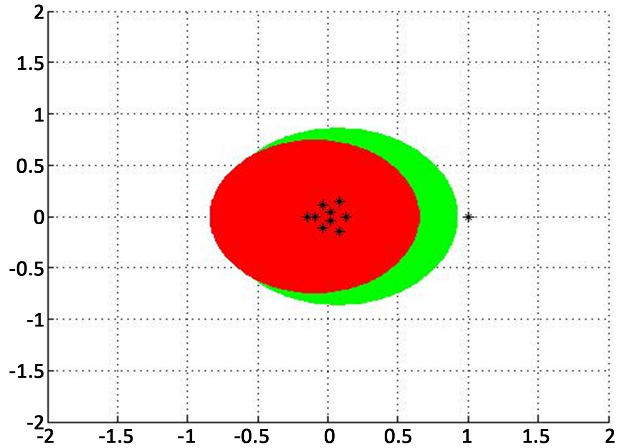

Figure 1. $B^{\mathrm{sto}\alpha}(\boldsymbol{A}) \not\subset B^{\mathrm{stol}}(\boldsymbol{A})$ and $B^{\mathrm{stol}}(\boldsymbol{A}) \not\subset B^{\mathrm{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$

图 1. $B^{\mathrm{sto}\alpha}(\boldsymbol{A}) \not\subset B^{\mathrm{stol}}(\boldsymbol{A})$ 且 $B^{\mathrm{stol}}(\boldsymbol{A}) \not\subset B^{\mathrm{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$

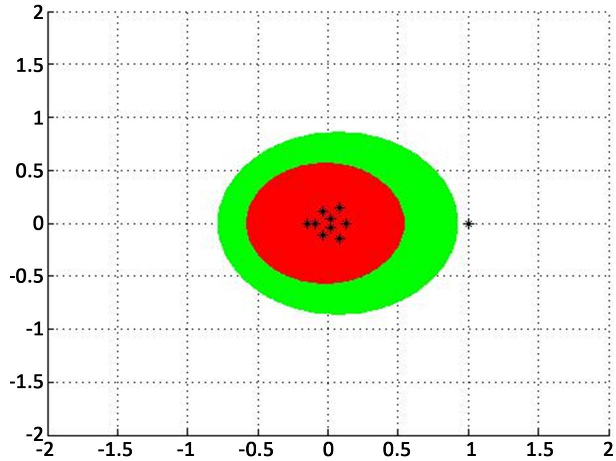

Figure 2. $\left(B^{\mathrm{sto}\alpha^{(1)}}(\boldsymbol{A}) \cap B^{\mathrm{sto}\alpha^{(2)}}(\boldsymbol{A}) \cap B^{\mathrm{sto}\alpha^{(3)}}(\boldsymbol{A}) \right) \subset B^{\mathrm{stol}}(\boldsymbol{A})$

图 2. $\left(B^{\mathrm{sto}\alpha^{(1)}}(\boldsymbol{A}) \cap B^{\mathrm{sto}\alpha^{(2)}}(\boldsymbol{A}) \cap B^{\mathrm{sto}\alpha^{(3)}}(\boldsymbol{A}) \right) \subset B^{\mathrm{stol}}(\boldsymbol{A})$

该例表明，通过适当的选择参数 α (不必太多)，可得到比[5]中 $B^{\mathrm{stol}}(\boldsymbol{A})$ 更小的特征值包含集 $B^{[0,1]}(\boldsymbol{A})$ 的近似。

下面应用定理 5 (或定理 6)给出随机矩阵的一个非奇异条件。

定理 7： 设 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵，若存在 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$， $\alpha_i\in[0,1]$ 使

$$\begin{aligned}&\left|\alpha_i L_i(\boldsymbol{A})+(1-\alpha_i)l_i(\boldsymbol{A})-a_{ii}\right|\left|\alpha_j L_j(\boldsymbol{A})+(1-\alpha_j)l_j(\boldsymbol{A})-a_{jj}\right|>CL_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})CL_j^{\alpha_j}(\boldsymbol{A}),\\&\forall i,j\in N,i\neq j\end{aligned}\tag{3}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的。

证明： 我们用反证法来证明。假若 $\boldsymbol{A}$ 是奇异的，则 $0\in\sigma(\boldsymbol{A})$。由定理 5 知，对任意的 $\alpha_i\in[0,1]$， $i\in N$ 有

$$0\in B^{\mathrm{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}B_{ij}^{\mathrm{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$$

因此，存在 $i_0,j_0\in N$， $i_0\neq j_0$ 使得

$$0\in B_{i_0j_0}^{\mathrm{sto}\alpha}(\boldsymbol{A})$$

即对任意的 $\alpha_{i_0},\alpha_{j_0}\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}&\left|\alpha_{i_0}L_{i_0}(\boldsymbol{A})+(1-\alpha_{i_0})l_{i_0}(\boldsymbol{A})-a_{i_0i_0}\right|\left|\alpha_{j_0}L_{j_0}(\boldsymbol{A})+(1-\alpha_{j_0})l_{j_0}(\boldsymbol{A})-a_{j_0j_0}\right|\\&\leq CL_{i_0}^{\alpha_{i_0}}(\boldsymbol{A})CL_{j_0}^{\alpha_{j_0}}(\boldsymbol{A})\end{aligned}$$

这与(3)矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的。

3. 随机矩阵次占优特征值模的一个上界

作为定理 5 的应用，下面我们给出随机矩阵次占优特征值的模的一个新上界。

定理 8： 设 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵，若 $\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\setminus\{1\}$，则

$$|\lambda|\leq\rho^{[0,1]}(\boldsymbol{A}),$$

其中

$$\rho^{[0,1]}(\boldsymbol{A})=\max_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\min_{\alpha_i,\alpha_j\in[0,1]}\left\{\sqrt{\frac{(b_{ii}-b_{jj})^2}{4}+CL_i^{\alpha_i}CL_j^{\alpha_j}}+\left|\frac{b_{ii}+b_{jj}}{2}\right|\right\}\tag{4}$$

这里

$$b_{ii}=\alpha_i L_i(\boldsymbol{A})+(1-\alpha_i)l_i(\boldsymbol{A})-a_{ii}$$

$CL_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{A})$ 同(2)。

证明： 令

$$f_{i,j}(\alpha_i,\alpha_j)=\sqrt{\frac{(b_{ii}-b_{jj})^2}{4}+CL_i^{\alpha_i}CL_j^{\alpha_j}}+\left|\frac{b_{ii}+b_{jj}}{2}\right|$$

其中

$$CL_i^{\alpha_i}=\sum_{j\neq i}\left|\alpha_i L_i(\boldsymbol{A})+(1-\alpha_i)l_i(\boldsymbol{A})-a_{ji}\right|,\quad b_{ii}=\alpha_i L_i(\boldsymbol{A})+(1-\alpha_i)l_i(\boldsymbol{A})-a_{ii}$$

则每一个 $f_{i,j}\left(\alpha_i,\alpha_j\right)$，$i,j\in N$，$i\neq j$ 都是 α_i,α_j 在[0,1]上的连续函数，故存在 $\tilde{\alpha}_i,\tilde{\alpha}_j\in[0,1]$，使得

$$f_{i,j}\left(\tilde{\alpha}_i,\tilde{\alpha}_j\right)=\min_{\alpha_i,\alpha_j\in[0,1]}\left\{\sqrt{\frac{\left(b_{ii}-b_{jj}\right)^2}{4}+CL_i^{\alpha_i}CL_j^{\alpha_j}}+\left|\frac{b_{ii}+b_{jj}}{2}\right|\right\},\quad \forall i,j\in N,i\neq j, \tag{5}$$

对于这些 $\tilde{\alpha}_i,\tilde{\alpha}_j\in[0,1]$ 由定理 5 知

$$\lambda\in B^{\text{sto}\tilde{\alpha}}\left(\boldsymbol{A}\right)=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}B_{ij}^{\text{sto}\tilde{\alpha}}\left(\boldsymbol{A}\right)$$

因此，存在 $i_0,j_0\in N$ 使得

$$\lambda\in B_{ij}^{\text{sto}\tilde{\alpha}}\left(\boldsymbol{A}\right)$$

即

$$\left|\tilde{b}_{i_0i_0}+\lambda\right|\left|\tilde{b}_{j_0j_0}+\lambda\right|\leq CL_{i_0}^{\tilde{\alpha}_{i_0}}\left(\boldsymbol{A}\right)CL_{j_0}^{\tilde{\alpha}_{j_0}}\left(\boldsymbol{A}\right)$$

故

$$|\lambda|\leq\sqrt{\frac{\left(\tilde{b}_{i_0i_0}-\tilde{b}_{j_0j_0}\right)^2}{4}+CL_{i_0}^{\tilde{\alpha}_{i_0}}CL_{j_0}^{\tilde{\alpha}_{j_0}}}+\left|\frac{\tilde{b}_{i_0i_0}+\tilde{b}_{j_0j_0}}{2}\right|=f_{i_0,j_0}\left(\tilde{\alpha}_{i_0},\tilde{\alpha}_{j_0}\right)$$

又由(4)式得

$$|\lambda|\leq\min_{\alpha_{i_0},\alpha_{j_0}\in[0,1]}\left\{\sqrt{\frac{\left(b_{i_0i_0}-b_{j_0j_0}\right)^2}{4}+CL_{i_0}^{\alpha_{i_0}}CL_{j_0}^{\alpha_{j_0}}}+\left|\frac{b_{i_0i_0}+b_{j_0j_0}}{2}\right|\right\}$$

故

$$|\lambda|\leq\max_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\min_{\alpha_i,\alpha_j\in[0,1]}\left\{\sqrt{\frac{\left(b_{ii}-b_{jj}\right)^2}{4}+CL_i^{\alpha_i}CL_j^{\alpha_j}}+\left|\frac{b_{ii}+b_{jj}}{2}\right|\right\}=\rho^{[0,1]}\left(\boldsymbol{A}\right)$$

■

下面用一个数值例子说明定理 8 所给(4)式是有效的。

例 3. 考虑随机矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.5244 & 0.4536 & 0.0220\\ 0.6238 & 0.1437 & 0.2325\\ 0.3427 & 0.6169 & 0.0403\end{bmatrix}$$

经计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，0.1018，−0.3934。取 $\alpha=\left(0.5,0.5,0.5\right)$，应用定理 8 所给(4)式计算得 $\boldsymbol{A}$ 的次占优特征值−0.3934 的模的一个上界为 0.4797。此上界与次占优特征值的模 0.3934 较为接近。

基金项目

本文受国家自然科学基金资助项目(11361074, 11601473)资助。

参考文献 (References)

[1] Pena, J.M. (1999) Shape Preserving Representations in Computer Aided-Geometric Design. Nova Science Publishers,

Hauppage.

[2] Karlin, S. and Mcgregor, J. (1959) A Characterization of Birth and Death Processes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **45**, 375-379. https://doi.org/10.1073/pnas.45.3.375

[3] Seneta, E. (2004) Non-Negative Matrices and Markov Chains. Springer-Verlag, Berlin.

[4] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1986) Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, England.

[5] Li, C.Q., Liu, Q.B. and Li, Y.T. (2015) Geršgorin-Type and Brauer-Type Eigenvalue Localization Sets of Stochastic Matrices. *Linear and Multilinear Algrbra*, **63**, 2159-2170. https://doi.org/10.1080/03081087.2014.986044

[6] Cvetković, L.J., Kostić, V. and Peña, J.M. (2011) Eigenvalue Localization Refinements for Matrices Related to Positivity. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **32**, 771-784. https://doi.org/10.1137/100807077

[7] 陈公宁. 矩阵理论与应用. 第 2 版, 北京: 科学出版社, 2007: 236.