Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(3), 200-211
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73026

Hans汉斯

Oscillate Criteria of a Class of Higher Order Linear Functional Equations

Lina Dai, Simin Wu*, Quanwen Lin, Xinxiao Su

Science College, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming Guangdong
Email: dai-laoshi@163.com, *520wsmsam@163.com

Received: May. 6th, 2017; accepted: May 21st, 2017; published: May 25th, 2017

Abstract

This paper mainly studies oscillatory of a class of higher order linear functional equations of the form $x(g(t)) = P(t)x(t) + \sum_{i=1}^{k} Q_i(t)x(g^{i+1}(t))$, where $P,Q,g:[t_0,+\infty] \to R^+ = [0,+\infty]$ are given real valued functions and $g(t) \neq t, \lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$. Some sufficient conditions for the oscillation of all solutions of this equation are obtained. And our results generalize and improve some results in some literature given.

Keywords

Oscillation, High Order, Linear, Functional Equations

一类高阶线性泛函方程的振动准则

戴丽娜，伍思敏*，林全文，苏新晓

广东石油化工学院理学院，广东 茂名
Email: dai-laoshi@163.com, *520wsmsam@163.com

收稿日期：2017年5月6日；录用日期：2017年5月21日；发布日期：2017年5月25日

摘 要

本论文主要是研究一类高阶线性泛函方程：$x(g(t)) = P(t)x(t) + \sum_{i=1}^{k} Q_i(t)x(g^{i+1}(t))$ 的振动性，这里

*通讯作者。

文章引用：戴丽娜，伍思敏，林全文，苏新晓. 一类高阶线性泛函方程的振动准则[J]. 理论数学, 2017, 7(3): 200-211.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73026

$P,Q,g:[t_0,+\infty]\to R^+=[0,+\infty]$ 是已知的实值函数，并且 $g(t)\neq t,\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=+\infty$，并得到该方程所有解振动的一些新的充分条件。我们的结果推广了现有文献中的某些结果。

关键词

振动，高阶，线性，泛函方程

1. 引言

考虑高阶函数方程

$$x(g(t))=P(t)x(t)+\sum_{i=1}^{k}Q_i(t)x\left(g^{i+1}(t)\right) \tag{1.1}$$

其中 $P,Q_i:I\to(0,+\infty)(i=1,2,3,\cdots,k)$，$g:I\to I$ 是一个给定的函数，x 是一个未知函数，I 是 $(0,+\infty)$ 上的无界子集。$g(t)\neq t,\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=+\infty$，$g^m$ 表示函数 g 的 m 次迭代，即：

$$g^0(t)=t,\ g^{i+1}(t)=g\left(g^i(t)\right),t\in I,i=1,2,\cdots,m$$

如果函数 $x:I\to R$ 使得 $\sup\left\{|x(s)|:s\in I_{t_0}=[t_0,+\infty)\cap I\right\}>0$ 对 $\forall\, t_0\in(0,+\infty)$ 成立，且对 $t\in I$ 满足(1.1)则称其为方程(1.1)的一个解。这样的解称作是振动的。

当 $i=1,k=1$ 时方程为：

$$x(g(t))=P(t)x(t)+Q(t)x\left(g^2(t)\right) \tag{1.2}$$

其中 $Q:I\to(0,+\infty)$ 是给定的函数。

微分方程和离散变量的差分方程的振动理论在过去几十年中已经得到广泛地发展，最近带有连续变量的差分方程的振动性研究也得到迅速的发展。然而函数方程以离散变量和具连续变量的差分方程作为其特殊情形，且函数方程以及具有连续变量的差分方程解的振动性的研究也越来越受到人们的重视(参见[1]-[15])。1994 年，Golda 和 Werbowski [1]首先对方程(1.2)的解的振动性做了研究，从他们的研究中我们可以知道，如果

$$\limsup_{t\to+\infty}Q(t)P(g(t))>1 \tag{1.3}$$

或

$$\liminf_{t\to+\infty}Q(t)P(g(t))>\frac{1}{4} \tag{1.4}$$

时方程(1.2)所有的解振动。

同时他们也将(1.3)推广到：

$$\limsup_{t\to+\infty}\left\{Q(t)P(g(t))+\sum_{i=0}^{k}\prod_{j=0}^{i}Q\left(g^{j+1}(t)\right)P\left(g^{j+2}(t)\right)\right\}>1 \tag{1.5}$$

那么 $k \ge 0$ 是一个整数。

1995 年，Nowakowska 和 Werbowsk [2]：将条件(1.4)推广到方程

$$x\left(g(t)\right)=P(t)x(t)+\sum_{i=1}^{k}Q_i(t)x\left(g^{i+1}(t)\right)$$

$$\liminf_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{k}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k}P\left(g^j(t)\right)>\frac{1}{4} \tag{1.6}$$

或

$$\liminf_{t\to+\infty}\sum_{i=0}^{k-1}G\left(g_i(t)\right)\prod_{j=1}^{k}P\left(g^{i+j}(t)\right)>\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \tag{1.7}$$

其中

$$G(t)=\sum_{n=1}^{k-1}Q_n(t)Q_{k-n}\left(g^n(t)\right)+Q_k(t) \tag{1.8}$$

1999 年，周勇和俞元洪[3]研究方程(1.1)的解的振动性。他们证明了方程(1.1)的所有解振动，如果

$$\liminf_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^j(t)\right)=A>\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{1.9}$$

或

$$0\le A\le\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}},\ \limsup_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^j(t)\right)>\frac{1}{\left[\lambda(A)\right]^k} \tag{1.10}$$

λ 是方程 $A\lambda^{k+1}-\lambda+1=0$ 在 $\left[1,\left((k+1)A\right)^{-\frac{1}{k}}\right]$ 上唯一的实根。

本文我们在文[4] [5]的基础上，研究了方程(1.1)，得到一切解振动的几个充分条件。

2. 主要定理及相关证明

引理 1.1. 假设，$0\le m\le\frac{1}{4}$，$W_1(t)=\frac{x\left(g(t)\right)}{x\left(g^2(t)\right)}\cdot P\left(g(t)\right)$，$W_2(t)=\frac{x\left(g^2(t)\right)}{x\left(g(t)\right)}\cdot Q(t)$，$x(t)$ 是方程(1.1)的最终正解，那么

$$\limsup_{t\to+\infty}W_i(t)\le\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2},i=1,2,\cdots \tag{2.1}$$

证明： 由(1.1)有 $x\left(g(t)\right)\ge P(t)x(t)$

因为当 $t\to+\infty$ 时，$g(t)\to+\infty$，有

$$x\left(g^2(t)\right)\ge P\left(g(t)\right)x\left(g(t)\right) \tag{2.2}$$

又因为

$$W_1(t)=\frac{x\left(g(t)\right)}{x\left(g^2(t)\right)}\cdot P\left(g(t)\right)$$

故有

$$\lim_{t\to+\infty}\sup W_1(t)<1$$

当 $0\le m\le\frac{1}{4}$，对任意 $\mu\in(0,m)$，有

$$Q(t)P(t)\ge m-\mu \tag{2.3}$$

由(2.2)得

$$W_1(t)\le\frac{x(g(t))}{P(g(t))x(g(t))}\cdot P(g(t))\le 1$$

令 $W_1(t)\le\frac{x(g(t))}{P(g(t))x(g(t))}\cdot P(g(t))\le 1:=d_1$，即

$$\frac{x(g^2(t))}{x(g(t))}\ge d_1^{-1}P(g(t)) \tag{2.4}$$

由(1.1)、(2.3)和(2.4)有

$$\begin{aligned}&\frac{P(t)x(t)}{x(g(t))}+d_1^{-1}Q(t)P(g(t))\\&\le\frac{x(g^2(t))}{x(g(t))}+\frac{P(t)x(t)}{x(g(t))}=\frac{x(g^2(t))+P(t)x(t)}{x(g(t))}\le 1\end{aligned} \tag{2.5}$$

将(2.3)代入(2.5)中，有

$$d_1^{-1}Q(t)P(t)+\frac{P(t)x(t)}{x(g(t))}\ge d_1^{-1}(m-\mu)+\frac{P(t)x(t)}{x(g(t))}$$

$$\frac{P(t)x(t)}{x(g(t))}\le 1-d_1^{-1}Q(t)P(g(t))\le 1-d_1^{-1}(m-\mu)$$

即

$$\frac{x(g(t))}{x(g^2(t))}\cdot P(g(t))\le 1-d_1^{-1}(m-\mu)$$

于是得到

$$W_1(t)\le\frac{d_1-(m-\mu)}{d_1}$$

令

$$W_1(t)\le\frac{d_1-(m-\mu)}{d_1}:=d_2$$

同理可得

$$W_1(t)\le\frac{d_n-(m-\mu)}{d_n}:=d_{n+1},n=1,2,\cdots$$

并且由 $(m-\mu)<1$ 得 $\frac{d_n-(m-\mu)}{d_n}<1$。

则 $\dfrac{d_n-(m-\mu)}{d_n}:=d_{n+1}$ 是单调递减，即 d_n 也是单调递减。

令 $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n=d$ 使得 $d^2-d+(m-\mu)=0$ 成立。

所以，由

$$d=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(m-\mu)}}{2}=\frac{1+\sqrt{1-4(m-\mu)}}{2}$$

可得

$$\lim_{t\to+\infty}\sup W_1(t)\le\frac{1+\sqrt{1-4(m-\mu)}}{2}$$

当 $\mu\to0$，得到(2.1)即有

$$\lim_{t\to+\infty}\sup W_i(t)\le\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2},i=1,2,\cdots$$

以上是 $W_i=W_1$ 时的证明。

下证 $W_i=W_2$

由(1.1)有

$$x(g(t))\ge Q(t)x(g^2(t))\tag{2.6}$$

且

$$x(g^2(t))\ge P(g(t))x(g(t))+Q(g(t))x(g^3(t))\tag{2.7}$$

由上述可知 $W_2(t)=\dfrac{x(g^2(t))}{x(g(t))}\cdot Q(t)$。

因为 $x(g(t))\ge Q(t)x(g^2(t))$ $\therefore$ $W_2(t)=\dfrac{x(g^2(t))}{x(g(t))}\cdot Q(t)\le1:=d_1$。

因此，当 $i=2$ 时，假定 $0\le m\le\dfrac{1}{4}$ 任意 $\mu\in(0,m)$ 有

$$Q(t)P(t)\ge m-\mu\tag{2.8}$$

由(2.7)得

$$1\ge\frac{P(g(t))x(g(t))}{x(g^2(t))}+\frac{Q(g(t))x(g^3(t))}{x(g^2(t))}$$

因为 $W_2(t)=\dfrac{x(g^2(t))}{x(g(t))}\cdot Q(t)\le1:=d_1$，

$$\frac{x(g(t))}{x(g^2(t))}\ge\frac{Q(t)}{d_1},\quad\frac{x(g^2(t))}{x(g(t))}\le\frac{d_1}{Q(t)}$$

又由 $Q(t)P(t)\ge m-\mu$

$$1=\frac{P(g(t))x(g(t))}{x(g^2(t))}+\frac{Q(g(t))x(g^3(t))}{x(g^2(t))}$$
$$\therefore\quad \geq\frac{P(g(t))Q(t)}{d_1}+\frac{Q(g(t))x(g^3(t))}{x(g^2(t))}$$
$$\geq\frac{m-\mu}{d_1}+\frac{Q(g(t))x(g^3(t))}{x(g^2(t))}$$

由此可得$1-\frac{m-\mu}{d_1}\geq\frac{Q(g(t))x(g^3(t))}{x(g^2(t))}$，

所以有$1-\frac{m-\mu}{d_1}\geq\frac{Q(g(t))x(g^2(t))}{x(g(t))}$，

即$W_2(t)\leq1-\frac{m-\mu}{d_1}$令$1-\frac{m-\mu}{d_1}=\frac{d_1-(m-\mu)}{d_1}=d_2$，

则有$W_2(t)\leq\frac{d_1-(m-\mu)}{d_1}=d_2$。

同理可得，如此巡回的过程得到

$$W_2(t)\leq\frac{d_n-(m-\mu)}{d_n}:=d_{n+1},n=1,2,\cdots$$

故

$$\lim_{t\to+\infty}\sup W_i(t)\leq\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2},i=1,2,\cdots$$

定理 1.1. 假设

$$m:=\lim_{t\to+\infty}\inf Q(t)P(g(t)),\quad M:=\lim_{t\to+\infty}\sup Q(t)P(g(t)) \tag{2.9}$$

当$0\leq m\leq\frac{1}{4}$，$k\geq0$的整数，且

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\left\{\overline{m}Q(t)P(g(t))+\sum_{i=0}^{k}\overline{m}^i\prod_{j=0}^{i}Q(g^{j+1}(t))P(g^{j+1}(t))\right\}\leq1 \tag{2.10}$$

那么方程(1.1)的一切解是振动，这里$\overline{m}_\mu=\left(\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}\right)^{-1}$。

由(1.1)对于任意足够小$\mu>0$，$t\in[0,\infty)$得到不等式

$$x(g(t))\geq\overline{m}_\mu P(t)x(t) \tag{2.11}$$
$$x(g(t))\geq\overline{m}_\mu Q(t)x(g^2(t)) \tag{2.12}$$

这里$\overline{m}_\mu=\left(\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}+\mu\right)^{-1}$。

由(2.11)得到

$$x(g^i(t))\geq\overline{m}_\mu^i\prod_{j=0}^{i-1}P(g^j(t))x(t),i=1,2,\cdots \tag{2.13}$$

由(2.7)归纳有

$$x\left(g^{i+1}(t)\right)=P\left(g^{i}(t)\right)x\left(g^{i}(t)\right)+Q\left(g^{i}(t)\right)x\left(g^{i+2}(t)\right),\ i=1,2,\cdots \tag{2.14}$$

由(2.7)和(2.14)对于 $k\geq 0$ 的整数

$$x\left(g^{2}(t)\right)=P\left(g(t)\right)x\left(g(t)\right)+Q\left(g(t)\right)x\left(g^{3}(t)\right)$$

$$x\left(g^{2}(t)\right)=P\left(g(t)\right)x\left(g(t)\right)+Q\left(g(t)\right)\cdot\left[P\left(g^{2}(t)\right)x\left(g^{2}(t)\right)+Q\left(g^{2}(t)\right)x^{4}\left(g(t)\right)\right]$$

$$\begin{aligned}x\left(g^{2}(t)\right)=&P\left(g(t)\right)x\left(g(t)\right)+Q\left(g(t)\right)\cdot\Big\{P\left(g^{2}(t)\right)x\left(g^{2}(t)\right)\\&+Q\left(g^{2}(t)\right)\left[P\left(g^{3}(t)\right)x\left(g^{3}(t)\right)+Q^{3}\left(g(t)\right)x\left(g^{5}(t)\right)\right]\Big\}\end{aligned}$$

如此重复上述过程可得

$$x\left(g^{2}(t)\right)=P\left(g(t)\right)x\left(g(t)\right)+\sum_{i=0}^{k}P\left(g^{i+2}(t)\right)x\left(g^{i+2}(t)\right)\prod_{j=0}^{i}Q\left(g^{i+1}(t)\right)+x\left(g^{k+4}(t)\right)\prod_{j=0}^{k+1}Q\left(g^{j+1}(t)\right)$$

对于(2.12)和(2.13)得到

$$\begin{aligned}x\left(g^{2}(t)\right)&\geq\overline{m}_{\mu}Q(t)P\left(g(t)\right)x\left(g^{2}(t)\right)+x\left(g^{2}(t)\right)\sum_{i=0}^{k}P\left(g^{i+2}(t)\right)\overline{m}_{\mu}^{i}\prod_{j=0}^{i-1}P\left(g^{j+2}(t)\right)\prod_{j=0}^{i}Q\left(g^{j+1}(t)\right)\\&=\overline{m}_{\mu}Q(t)P\left(g(t)\right)x\left(g^{2}(t)\right)+x\left(g^{2}(t)\right)\sum_{i=0}^{k}\overline{m}_{\mu}^{i}\prod_{j=0}^{i}Q\left(g^{j+1}(t)\right)P\left(g^{j+1}(t)\right)\end{aligned}$$

两边除以 $x\left(g^{2}(t)\right)$ 取极限且 $t\to+\infty$，得到

$$1\geq\limsup_{t\to+\infty}\left\{\overline{m}_{\mu}Q(t)P\left(g(t)\right)+\sum_{i=0}^{k}\overline{m}_{\mu}^{i}\prod_{j=0}^{i}Q\left(g^{j+1}(t)\right)P\left(g^{j+1}(t)\right)\right\}$$

令 $\mu\to 0$ 有 $1\geq\limsup_{t\to+\infty}\left\{\overline{m}Q(t)P\left(g(t)\right)+\sum_{i=0}^{k}\overline{m}^{i}\prod_{j=0}^{i}Q\left(g^{j+1}(t)\right)P\left(g^{j+1}(t)\right)\right\}$。证毕

定理 1.2. 当 $0\leq m\leq\frac{1}{4}$ 时，而且 $\limsup_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k}P\left(g^{j}(t)\right)\leq\left(\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}\right)^{2}$，那么方程(1.1)的所有解振动。

证明： 当 $0\leq m\leq\frac{1}{4}$ 时，对任意 $\mu\in(0,m)$ 当 $t\to+\infty$ 时由(2.3)迭代有

$$\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k}P\left(g^{j}(t)\right)\geq m-\mu$$

由(2.1)得 $\limsup_{t\to+\infty}\frac{P\left(g(t)\right)x\left(g(t)\right)}{x\left(g^{2}(t)\right)}\leq\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$，且

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{x\left(g^{2}(t)\right)}{x\left(g(t)\right)}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=2}^{k}P\left(g^{2}(t)\right)\leq\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2} \tag{2.15}$$

将 $\frac{P\left(g(t)\right)x\left(g(t)\right)}{x\left(g^{2}(t)\right)}$ 与 $\frac{x\left(g^{2}(t)\right)}{x\left(g(t)\right)}\sum_{i=1}^{k}Q_i(t)\prod_{j=2}^{k}P\left(g^{2}(t)\right)$ 两式相乘必存在

$$\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k}P\left(g^{2}(t)\right)\leq\left(\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}\right)^{2}$$

最终得到

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k}P\left(g^j(t)\right)\ge\left(\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}\right)^2$$

所以，当$0\le m\le\frac{1}{4}$时，满足$\lim_{t\to+\infty}\sup\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k}P\left(g^j(t)\right)\le\left(\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}\right)^2$，那么方程(1.1)的所有解振动。于是定理 1.2 得以证明。

定理 1.3. 当$0\le u\le\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$满足$\lim_{t\to+\infty}\sup\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k}P\left(g^j(t)\right)\le\left(\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}\right)^2$

那么方程(1.1)的所有解振动。这里$u=\lim_{t\to+\infty}\inf\sum_{i=1}^{k}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k}P\left(g^j(t)\right)$

证明： 由(2.1)得：$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{P(g(t))x(g(t))}{x(g^2(t))}\le\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$

由(2.15)得

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{x(g(t))}{x(g^2(t))}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=2}^{k}P\left(g^2(t)\right)\le\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$$

将$\frac{P(g(t))x(g(t))}{x(g^2(t))}$与$\lim_{t\to+\infty}\frac{x(g^2(t))}{x(g(t))}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=2}^{k}P\left(g^2(t)\right)\le\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$

两式相乘必存在

$$\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k}P\left(g^2(t)\right)\le\left(\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}\right)^2$$

于是得到：$\lim_{t\to+\infty}\sup\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k}P\left(g^j(t)\right)\le\left(\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}\right)^2$ 证毕。

定理 1.4. 当$0\le u\le\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$时$k\ge0$的整数，并且满足

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\left\{\overline{m}_\mu\sum_{i=1}^{k}Q(t)P(g(t))+\sum_{i=1}^{k}\overline{m}_\mu^i\prod_{j=2}^{i+1}Q(g(t))P\left(g^j(t)\right)\right\}\le1$$

那么方程(1.1)的一切解是振动，这里$\overline{m}_u=\left(\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}\right)^{-1}$

证明： 假设(1.1)有解，存在一个$\varepsilon>0$，且$t\to\infty$时

$$x(g(t))\ge\overline{m}_\varepsilon P(t)x(t) \tag{2.16}$$

由(2.16)迭代可得

$$x\left(g^{i+1}(t)\right)\ge\overline{m}_\varepsilon^i\prod_{j=1}^{i}P\left(g^i(t)\right)x(g(t))$$

$$x(g(t))\ge\overline{m_\varepsilon}\sum_{i=1}^{k}Q_i(t)x\left(g^{i+1}(t)\right)$$

有 $x\left(g^{2}(t)\right) \geq \bar{m}_{\varepsilon} P(g(t)) x(g(t))$

$$x\left(g^{2}(t)\right) \geq \bar{m}_{\varepsilon} \sum_{i=1}^{k} Q_{i}(t) x\left(g^{i+2}(t)\right)$$

由 $x\left(g^{2}(t)\right)=P(g(t)) x(g(t))+\sum_{i=1}^{k} Q_{i}(g(t)) x\left(g^{i+2}(t)\right)$

得到： $x\left(g^{2}(t)\right) \geq P(g(t)) \bar{m}_{\varepsilon} \sum_{i=1}^{k} Q_{i}(t) x\left(g^{i+1}(t)\right)+\sum_{i=1}^{k} Q_{i}(g(t)) x\left(g^{i+2}(t)\right)$

$$x\left(g^{2}(t)\right) \geq x\left(g^{2}(t)\right) \bar{m}_{\varepsilon}^{i} \sum_{i=1}^{k} Q_{i}(t) \prod_{j=1}^{i} P\left(g^{j}(t)\right)+x\left(g^{2}(t)\right) \bar{m}_{\varepsilon}^{i} \sum_{i=1}^{k} Q_{i}(g(t)) \prod_{j=2}^{i+1} P\left(g^{j}(t)\right)$$

两边同时除以 $x\left(g^{2}(t)\right)$ 得到

$$1 \geq \bar{m}_{\varepsilon}^{i} \sum_{i=1}^{k} Q_{i}(t) \prod_{j=1}^{i} P\left(g^{j}(t)\right)+\bar{m}_{\varepsilon}^{i} \sum_{i=1}^{k} Q_{i}(g(t)) \prod_{j=2}^{i+1} P\left(g^{j}(t)\right)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时，得到

$$\limsup_{t \rightarrow+\infty}\left\{\bar{m}_{\varepsilon}^{i} \sum_{i=1}^{k} Q_{i}(t) \prod_{j=1}^{i} P\left(g^{j}(t)\right)+\bar{m}_{\varepsilon}^{i} \sum_{i=1}^{k} Q_{i}(g(t)) \prod_{j=2}^{i+1} P\left(g^{j}(t)\right)\right\} \leq 1$$

时方程(1.1)有最终正解。引理证毕。

引理 1.2. 假设 $0 \leq \tilde{u}=\liminf_{t \rightarrow \infty} Q(t) \prod_{j=1}^{k} P\left(g^{j}(t)\right) \leq \frac{k^{k}}{(k+1)^{k+1}}$， $X(t)$ 是方程

$$x(g(t))=P(t) x(t)+Q(t) x\left(g^{k+1}(t)\right), \quad t \geq t_{0} \tag{2.17}$$

的一个最终正解，那么 $\limsup_{t \rightarrow+\infty} \frac{x(t) P(t)}{x(g(t))} \leq \tilde{\lambda}$ 。

这里 $\tilde{\lambda}=\tilde{\lambda}(\tilde{u})$ 是方程 $\lambda^{k+1}-\lambda^{k}+\tilde{u}=0$ 在 $[0,1]$ 上的最大实根。

证明：由方程(1.1)有

$$X(g(t)) \geq P(t) X(t) \tag{2.18}$$

且 $X\left(g^{k+1}(t)\right) \geq 0$ 通过(2.18)迭代，得

$$X\left(g^{k+1}(t)\right) \geq \prod_{j=1}^{k} P\left(g^{j}(t)\right) X(g(t)), k=1,2, \cdots, m \tag{2.19}$$

将(2.19)代入(2.17)式得

$$X(g(t)) \geq P(t) X(t)+\left[Q(t) \prod_{j=1}^{k} P\left(g^{j}(t)\right)\right] X(g(t)) \geq P(t) X(t)+\tilde{u} X(g(t))$$

从而有 $\tilde{u} \leq 1$且

$$X(g(t))-\tilde{u} X(g(t)) \geq P(t) X(t)$$

$$X(g(t))(1-\tilde{u}) \geq P(t) X(t)$$

$$1-\tilde{u} \geq \frac{P(t) X(t)}{X(g(t))}$$

令 $\tilde{\lambda}=1-\tilde{u}$

当 $t\to+\infty$ 时 $\limsup\limits_{t\to+\infty}\dfrac{X(t)P(t)}{X(g(t))}\le\tilde{\lambda}$

这里 $\tilde{\lambda}=\tilde{\lambda}(\tilde{u})$ 是方程 $\lambda^{k+1}-\lambda^{k}+\tilde{u}=0$ 在 $[0,1]$ 上的最大实根。证毕。

定理 1.5. 假设

$$0\le\tilde{u}=\liminf_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^{j}(t)\right)\le\frac{k^{k}}{(k+1)^{k+1}}$$

那么方程

$$x(g(t))=P(t)x(t)+\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)x\left(g^{k+i}(t)\right),\quad t\ge t_0 \tag{2.20}$$

的所有解振动。如果

$$\limsup_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^{j}(t)\right)>(1-k\tilde{u})\tilde{\lambda}^{k}$$

其中 $\tilde{\lambda}$ 由引理 1.2 确定。

证明：由于 $x\left(g^{k+i}(t)\right)\ge0$，通过(2.18)迭代，得

$$x\left(g^{k+i}(t)\right)\ge\prod_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^{j}(t)\right)x(g(t)),\quad i=1,2,\cdots,m \tag{2.21}$$

将(2.21)代入(2.20)式，得

$$x(g(t))\ge P(t)x(t)+\left[\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^{j}(t)\right)\right]x(g(t))\ge P(t)x(t)+\tilde{u}x(g(t)) \tag{2.22}$$

从而有 $\tilde{u}\le1$ 由引理(1.2)得 $\tilde{\lambda}=1-\tilde{u}\le1$，即 $\dfrac{1}{\tilde{\lambda}}\ge1$。

由(2.22)得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\tilde{\lambda}}\left[\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^{j}(t)\right)\right]x(g(t))\\ \ge&\left[\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^{j}(t)\right)\right]x(g(t))\ge\tilde{u}x(g(t))\end{aligned}$$

由定理 1.2 得 $\limsup\limits_{t\to+\infty}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod\limits_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^{j}(t)\right)\right]>\dfrac{1}{4}$ 且 $\dfrac{1}{\tilde{\lambda}}\ge1$。

则

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}^{k}}\left[\limsup_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^{j}(t)\right)\right]x(g(t))\ge(1-k\tilde{u})x(g(t))$$

下面证明之

当 $k=1$ 时，$\dfrac{1}{\tilde{\lambda}}\left[\limsup\limits_{t\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod\limits_{j=1}^{i}P\left(g^{j}(t)\right)\right]x(g(t))>\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\tilde{\lambda}}x(g(t))$

因为 $0\le\tilde{u}\le\dfrac{k^{k}}{(k+1)^{k+1}}$ 即 $0\le\tilde{u}\le\dfrac{1}{4}$

则 $\frac{1}{\tilde{\lambda}}\left[\limsup_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{i}P\left(g^j(t)\right)\right]>\frac{1}{4}>\tilde{u}$

事实上，若 $k=n-1$，则

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}^{k-1}}\left[\limsup_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k+i-2}P\left(g^j(t)\right)\right]x\left(g(t)\right)>\left[1-(k-1)\tilde{u}\right]x\left(g(t)\right) \tag{2.23}$$

成立。

下面证明

当 $k=n$ 时

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}^{k}}\left[\limsup_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^j(t)\right)\right]x\left(g(t)\right)>(1-k\tilde{u})x\left(g(t)\right) \tag{2.24}$$

将(2.23)代入(2.20)式，得

$$\begin{aligned}x\left(g(t)\right)&\geq P(t)x(t)+\frac{1}{\tilde{\lambda}^{k}}\left[\limsup_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^j(t)\right)\right]x\left(g(t)\right)\\&>P(t)x(t)+(1-k\tilde{u})x\left(g(t)\right)\end{aligned}$$

故由归纳法之(2.24)式成立

则 $\frac{1}{\tilde{\lambda}^{k}}\left[\limsup_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^j(t)\right)\right]>(1-k\tilde{u})$

即 $\limsup_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\prod_{j=1}^{k+i-1}P\left(g^j(t)\right)>\tilde{\lambda}^{k}(1-k\tilde{u})$

其中 $\tilde{\lambda}$ 由引理 1.2 确定。定理证毕。

基金项目

国家自然科学基金(No：11271380)；茂名市科技局软科学项目(No：2014083；2015038)。

参考文献 (References)

[1] Golda, W. and Werbowski, J. (1994) Oscillation of Linear Functional Equations of the Second Order. *Funkcialaj Ekvacioj*, **37**, 221-227.

[2] Nowakowska, W. and Werbowski, J. (1995) Oscillation of Linear Functional Equations of Higherorder. *Archiv der Mathematik*, **31**, 251-258.

[3] 周勇，俞元洪. 变系数函数方程解的振动性[J]. 系统科学与数学, 1999, 19(3): 348-352.

[4] Shen, J. (2002) An Oscillation Criteria for Second Order Functional Equations. *Acta Mathematica Scientia*, **22**, 56-62.

[5] 周勇，刘正荣，俞元洪. 变系数函数方程解的振动性准则[J]. 应用数学学报, 2000, 23(3): 413-419.

[6] 张孝理，罗治国. 高阶线性泛函方程的振动性[J]. 应用数学学报, 2003, 26(1): 186-189.

[7] Lin, Q.-W., Wu, Y.-Z. and Liao, S.-Q. (2007) Oscillate Criteria of Nonlinear Functional Equations with Variable Coefficient. *Journal of Maoming University*, **17**, 64-66.

[8] 林全文，全焕，吴英柱，廖思泉. 高阶变系数函数方程的振动性[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(12): 244-249.

[9] Lin, Q.-W., Wu, Y.-Z. and Liao, S.-Q. (2009) A New Result of Oscillate Criteria of Functional Equations. *Journal of Maoming University*, **19**, 58-60.

[10] 戴丽娜，吴英柱，林全文. 高阶变系数泛函方程解的振动性[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(10): 271-275.

[11] Lin, Q.-W., Wu, Y.-Z. and Liao, S.-Q. (2009) The Oscillation of Nonlinear Functional Equations with Variable Coefficients. *Journal of Mathematics Research*, **1**, 216-221.

[12] Lin, Q., Chen, R. and Dai, L. (2011) Oscillatory Behavior of Solutions to Higher Order Linear Functional Equations. *Journal of Biomathematics*, **26**, 9-16.

[13] 吴英柱，林全文. 高阶变系数函数方程的非振动解[J]. 纯粹数学与应用数学, 2015(6): 575-580.

[14] 伍思敏，戴丽娜，林全文. 高阶泛函方程解的非振动准则[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(20): 280-285.

[15] 吴英柱. 高阶变系数函数方程解的振动准则[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2016, 48(2): 107-110.