Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(4), 241-249
Published Online July 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74031

Hans汉斯

The Proof of 2*n* Circle Arrangement Conjecture

Zuodong Wang

Beijing University of Technology, Beijing
Email: 1244276874@emails.bjut.edu.cn

Received: Jun. 15th, 2017; accepted: Jun. 29th, 2017; published: Jul. 6th, 2017

Abstract

In this paper, I use mathematical induction and the necessary and sufficient conditions of bijection to prove the correctness of 2*n* circle arrangement conjecture in combinatorial mathematics.

Keywords

Combinatorial Mathematics, Circle Arrangement, Mathematical Induction, Permutation without Repetition

2*n*圆排列猜想证明

王作栋

北京工业大学，北京
Email: 1244276874@emails.bjut.edu.cn

收稿日期：2017年6月15日；录用日期：2017年6月29日；发布日期：2017年7月6日

摘 要

本文通过运用数学归纳法和两集合双射的充要条件证明了组合数学中圆排列问题下的2*n*圆排列猜想的正确性。

关键词

组合数学，圆排列，数学归纳法，无重复排列

文章引用: 王作栋. 2*n* 圆排列猜想证明[J]. 理论数学, 2017, 7(4): 241-249.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74031

1. 引言

2n 圆排列猜想是一个从中国古代河图洛书[1]演变推广而来的猜想。对该猜想的研究有助于完善排列组合分支下的圆排列问题，对于应用组合数学的科学领域也有贡献。本文从 2n 圆排列的 n 较小的情况入手，观察其排列规律，总结出排列方法，拆分命题，用计算机模拟计算出大量数据，并用归纳法和集合双射的充要条件证明该猜想。

2. 猜想来源

作者在大一上学期的新生研讨课(数学文化选讲)上从阴东升老师的授课中得知了老师早年在博士后研究工作报告[2]中提出的 2n 圆排列猜想。该猜想从洛书九宫图出发(图 1)，把洛书中各个元素都减去 5，得到新的元素并适当调整次序排列在圆周上，得到下图 2：

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figure 1. Lo Shu Square
图 1. 洛书九宫图

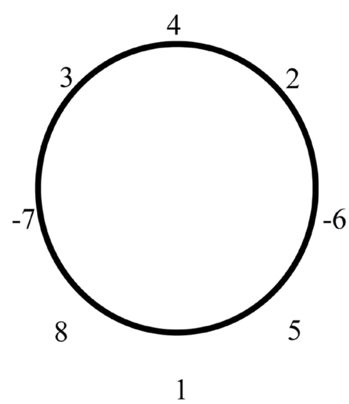

Figure 2. An example of 2n circle arrangement conjecture
图 2. 一个 2n 圆排列猜想的例子

可从图中直观看出左下角三个元素和为 2，其余首尾相连的三个元素和为 0。于是归纳猜想是否对于任意的大于等于 2 的正整数 n，其从 1 到 $2n$ 的自然数排在圆周上，适当赋予正负号，也可以得出左下角三个元素和为 2，其余首尾相连的三个元素和为 0 的结论也成立。

3. 猜想的定义、代数描述及规律总结

3.1. 猜想定义

对于任意大于等于 2 的正整数 n，把 1 到 $2n$ 的自然数排在一个圆周上，人为定义 $a_1=1$，适当调整排列次序并赋予每个数正负号及序号(即按顺时针排，第二个数为 a_2，第三个数为 $a_3,\cdots$, 第 $2n$ 个数为 a_{2n})，可以使得第一个数到第三个和为 2；第三个数到第五个个数的和为 0，第五个数到第七个数的和为 0，以此类推，直到第 $2n-1$ 个数到第一个数的和都为 0。

3.2. 猜想的代数描述

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=2 \\ a_{3+2i}+a_{4+2i}+a_{5+2i}=0,\ i=0,1,2,\cdots,n-3 \\ a_{2n-1}+a_{2n}+a_1=0 \end{cases}$$

$$\left\{|a_i|\,|i=1,2,\cdots,2n\right\}=\left\{1,2,\cdots,2n\right\},\ n\ge 2$$

3.3. 规律总结

通过枚举的方法找出 n = 2, 3, 4, 5, 6 时满足原命题的情况，得到如下表 1：

观察每一行与下一行的变化，总结并提出一种规律 $(n\ge 3)$，其作用在第 n 行数上时，每个数在第 n + 1 行会发生如下变化：

$$a_1\equiv 1;$$

$$a_{2n}=2;$$

$$a_2=2n;$$

第 n 行的第三个到倒数第二个数都对应第 $n+1$ 行的数，按照“减二，加一，加一，加一”的规律重复运算；

在最后增加两个数，其数值大小为：

$$\begin{cases} a_{2n+1}=(-1)*\left(n+3+\dfrac{n-3}{2}\right) \\ a_{2n+2}=n+2+\dfrac{n-3}{2} \end{cases},\ n=2k+1,k\in \boldsymbol{N}_+$$

$$\begin{cases} a_{2n+1}=n+2+\dfrac{n-4}{2} \\ a_{2n+2}=(-1)*\left(n+3+\dfrac{n-4}{2}\right) \end{cases},\ n=2k,k\in \boldsymbol{N}_+$$

于是根据规律提出假设：

$\forall n\ge 2$，根据规律的发生变化后，每行数能使命题成立。

Table 1. Some examples of 2*n* circle arrangement conjecture
表 1. 一些使 2*n* 圆排列猜想成立的例子

n	$2n$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
2	4	1	−4	3	2								
3	6	1	6	−5	2	3	−4						
4	8	1	8	−7	3	4	2	−6	5				
5	10	1	10	−9	4	5	3	−8	2	6	−7		
6	12	1	12	−11	5	6	4	−10	3	7	2	−9	8

4. 证明思路

先用计算机模拟出大量数据，再通过数学归纳法及两集合双射的充要条件进行证明。

5. 证明过程

先将原命题分解为两个命题：

命题 α：$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 2 \\ a_{3+2i} + a_{4+2i} + a_{5+2i} = 0, \ \ i = 0,1,2,\cdots,n-3 \\ a_{2n-1} + a_{2n} + a_1 = 0 \end{cases}$

命题 β：$\{|a_i| \mid i = 1,2,\cdots,2n\} = \{1,2,\cdots,2n\}, n \geq 2$

5.1. 计算机模拟过程

在 Devcpp5.9.2 中给出 $n = 3$ 的各个 a_i 的值，把规律编进程序，循环作用后判断并输出每一次的结果(程序见附录)。

5.2. α 证明过程

$$n = 2,$$

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = -3, a_4 = 2.$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 2 \\ a_3 + a_4 + a_1 = 0 \end{cases}$$

所以 $n = 2$ 时，α 成立。

$$n = 3,$$

$$a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = -5, a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = -4.$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 2 \\ a_3 + a_4 + a_5 = 0 \\ a_5 + a_6 + a_1 = 0 \end{cases}$$

所以 $n = 3$ 时，α 成立。

下证 $n > 3$ 的情况：

假设 $n = k$ 时，α 成立，即 $a_1, a_2, \cdots, a_{2k}$ 可使 α 成立。

设在第 k 行的各个数根据规律发生变化后在第 $k+1$ 行分别为 $a_1', a_2', \cdots, a_{2k+2}'$

1) k 为奇数：

显然，

$$a_1' = a_1,$$

$$a_2' = a_2 + 2,$$

a_3' 到 a_{2k-1}' 在 a_3 到 a_{2k-1} 的基础上按照“减二，加一，加一，加一”的规律重复运算；

$$a_{2k}' = 2$$

$$a_{2k+1}' = (-1) * \left(k + 3 + \frac{k-3}{2}\right)$$

$$a_{2k+2}' = k + 2 + \frac{k-3}{2}$$

于是按照命题 α 的要求，对所有数进行运算可得：

$$\begin{cases} a_1' + a_2' + a_3' = 2 \\ a_{3+2i}' + a_{4+2i}' + a_{5+2i}' = 0, \ i = 0,1,2,\cdots,k-2 \\ a_{2k+1}' + a_{2k+2}' + a_1' = 0 \end{cases}$$

所以 n 为奇数时，命题 α 成立

2) k 为偶数：

显然，

$$a_1' = a_1,$$

$$a_2' = a_2 + 2,$$

a_3' 到 a_{2k-1}' 在 a_3 到 a_{2k-1} 的基础上按照“减二，加一，加一，加一”的规律运算；

$$a_{2k}' = 2$$

$$a_{2k+1}' = k + 2 + \frac{k-4}{2}$$

$$a_{2k+2}' = (-1) * \left(k + 3 + \frac{k-4}{2}\right)$$

于是按照命题 α 的要求，对所有数进行加法运算可得：

$$\begin{cases} a_1' + a_2' + a_3' = 2 \\ a_{3+2i}' + a_{4+2i}' + a_{5+2i}' = 0, \ i = 0,1,2,\cdots,k-2 \\ a_{2k+1}' + a_{2k+2}' + a_1' = 0 \end{cases}$$

所以 n 为偶数时，命题 α 成立

所以 $n = k+1$ 时，命题 α 成立，即根据数学归纳法命题 α 得证。

5.3. β 证明过程

$$n = 2,$$

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = -3, a_4 = 2$$

$\Rightarrow |a_i|$ 可取尽 *1* 到 $2n$ 所有的自然数。

$$n = 3,$$

$$a_1=1, a_2=6, a_3=-5, a_4=2, a_5=3, a_6=-4.$$

$\Rightarrow |a_i|$ 可取尽 *1* 到 $2n$ 所有的自然数。

下证 $n>3$ 的情况：

对于 $\forall n>3$，根据规律对 $n=3$ 时的各个数字处理 $n-3$ 次可得：

对于 $\forall i \in [2, n-1] \cap \boldsymbol{N}_+$，

当 i 为奇数时，有 $|a_{2i-1}|$ 在第 i 行时的值为：

$$i+1+\frac{i-5}{2}$$

在第 n 行时的值为：

$$n+1+\frac{i-5}{2}$$

当 i 为偶数时，有 $|a_{2i-1}|$ 在第 i 行时的值为：

$$i+2+\frac{i-4}{2}$$

在第 n 行时的值为：

$$2n-i+2+\frac{i-4}{2}$$

对于 $|a_{2i}|$,无论奇偶，其在下一行都变为 2，在第 n 行变为：

$$n-i+1$$

而在最后一次根据规律处理数字后有：

$$|a_{2n-2}|=2,$$

$$\begin{cases} a_{2n+1}=(-1)*\left(n+3+\dfrac{n-3}{2}\right) \\ a_{2n+2}=n+2+\dfrac{n-3}{2} \end{cases}, \quad n=2k+1, k\in \boldsymbol{N}_+$$

$$\begin{cases} a_{2n+1}=n+2+\dfrac{n-4}{2} \\ a_{2n+2}=(-1)*\left(n+3+\dfrac{n-4}{2}\right) \end{cases}, \quad n=2k, k\in \boldsymbol{N}_+$$

故可以得出 $|a_1|$ 到 $|a_{2n}|$ 的所有值。

令集合 $A=\{|a_i| \mid i=1,2,\cdots,2n\}$，集合 $B=\{1,2,\cdots,2n\}, n\geq 2$

若 $A\to B$ 是双射，则集合 A 与集合 B 的元素一一对应，命题 β 成立。

5.3.1. 单射证明

对于 $\forall i_1, i_2, i_3 \in [2, n] \cap \boldsymbol{N}_+$ 且 $i_1 \neq i_2 \neq i_3$ 有：

$$1\neq 2\neq 2n\neq n+1+\frac{i_1-5}{2}\neq n-i_2+1\neq 2n-i_3+2+\frac{i_3-4}{2}$$

即 $|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{2n}|$ 互不相等，故 $A\to B$ 是单射。

5.3.2. 满射证明

下证 $A \to B$ 是满射：

首先有：

$$a_1 = 1$$

$$a_{2n-2} = 2$$

再寻找 3 到 $2n$ 的自然数：

1) n 为奇数：

把 $i = n-2, n-3, \cdots, 2$ 代入 $|a_{2i}|$ 可得 3 到 $n-1$ 所有自然数。

把 $i = 3,5,\cdots,n$ 代入 $|a_{2i-1}|$ (奇数表达式)可得n到 $n+1+\dfrac{n-5}{2}$ 之间所有自然数。

而 $|a_{2n}| = n+2+\dfrac{n-5}{2}$；

把 $i = n-1, n-3, \cdots, 2$ 代入 $|a_{2i-1}|$ (偶数表达式)可得 $n+3+\dfrac{n-5}{2}$ 到 $2n-1$ 之间所有自然数。

而 $|a_2| = 2n$

所以 n 为奇数时， $A \to B$ 是满射。

2) n 为偶数：

把 $i = n-2, n-3, \cdots, 2$ 代入 $|a_{2i}|$ 可得 3 到 $n-1$ 所有自然数。

把 $i = 3,5,\cdots,n-1$ 代入 $|a_{2i-1}|$ (奇数表达式)可得 n 到 $n+\dfrac{n-4}{2}$ 之间所有自然数。

而 $|a_{2n}| = n+1+\dfrac{n-4}{2}$

把 $i = n, n-2, \cdots, 2$ 代入 $|a_{2i-1}|$ (偶数表达式)可得 $n+2+\dfrac{n-4}{2}$ 到 $2n-1$ 之间所有自然数。

而 $|a_2| = 2n$

所以 n 为偶数时， $A \to B$ 是满射。

所以 $A \to B$ 是双射。

故集合 A 与集合 B 的元素一一对应，命题 β 成立。

致　谢

感谢阴东升老师在整个论文创作的过程中给予我的帮助以及传授给我数学思想及学习方法！感谢《理论数学》的审稿老师们对论文提出宝贵的修改意见！

参考文献 (References)

[1] H. J. 赖瑟. 组合数学. 北京: 科学出版社, 1983.

[2] 阴东升. 始向量方法及其应用[R]: [博士后研究工作报告]. 北京: 北京师范大学, 2002.5.

附录

```
#include<math.h>
#include<stdio.h>

intOdd(int n);
intEven(int n);

int main(void)
{
    inta[20001];
// 定义 n=3 时 a[i]的值
    a[1]=1;
    a[2]=6;
    a[3]=-5;
    a[4]=2;
    a[5]=3;
    a[6]=-4;

// 按照规律对数字进行处理

    int n=3;
    do
    {
    a[2]+=2;
    int counter=0;
    int _counter=0;
    for(inti=3;i<(2*n);i++)
    {
        if(counter==0){ a[i]-=2; }
        else { a[i]+=1;}
        counter++;
        if(counter==4)counter=0;
    }
    a[2*n]=2;
    if(n%2==0){ a[2*n+1]= Even(n);}
    else{ a[2*n+1]= Odd(n); }
    a[2*n+2]=(-1)*(a[2*n+1]+1);

// 验证命题 alphe
```

```
    if(a[1]+a[2]+a[3]==2)_counter++;
    for(inti=0;i<=n-2;i++){
    if(a[3+2*i]+a[4+2*i]+a[5+2*i]==0)_counter++;
    }
    if(a[2*n+1]+a[2*n+2]+a[1]==0)_counter++;
    if(_counter==n+1){ printf("n=%d,alphe 成立\n",n); }
    _counter=0;

// 验证命题 beta

    for(int i1=1;i1<=(2*n+2);i1++){
        for(int i2=1;i2<=(2*n+2);i2++){
            if(abs(a[i1])==i2)_counter++;
        }
    }
    if(_counter==(2*n+2)){ printf("n=%d,beta 成立\n",n); }
    _counter=0;
    n++;
    }while((2*n)<=20000);
    return 0;
}

//定义 n 为偶数时的 a[2n+1]

intOdd(int x){
    int y=(-1)*(x+3+(x-3)/2);
    return y;
}

//定义 n 为奇数时的 a[2n+1]

intEven(int x){
    int y=x+2+(x-4)/2;
    return y;
}
```

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究