Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(4), 277-281
Published Online July 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74036

Hans汉斯

On Criterion of Arc-Transitive Cayley Graphs

Xue Yu

School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: yuxue1212@163.com

Received: Jun. 22nd, 2017; accepted: Jul. 7th, 2017; published: Jul. 13th, 2017

Abstract

In 1938, R. Fruchet proved that for any given abstract group, there is a graph of it as an automorphism group. Since then, this area, which is about using the groups to study the graphs, opened the curtain. However, extensive research in this area began in 1960, especially in the last 30 years, where a number of important tasks were done. In this paper, we study a branch of graph theory that is, Cayley graph and its decision, especially the arc transitive graph. Firstly, by studying the properties of graph and the exchange of group, we get the main theorem of this paper. Secondly, according to the definition of the normal arc transitive graph and the pushing process of the main conclusion, a judgment condition of the normal arc transitive graph is given.

Keywords

Vertex-Transitive Graph, Arc-Transitive Graph, Cayley Graph, Orbital Graph

关于弧传递Cayley图的判定

于　雪

云南大学数学与统计学院，云南　昆明
Email: yuxue1212@163.com

收稿日期：2017年6月22日；录用日期：2017年7月7日；发布日期：2017年7月13日

摘　要

1938年R. Fruchet证明了对于任意给定的抽象群，都存在一个图以它为自同构群。自此，关于利用群来研究图这一领域，揭开了帷幕。但是，这个领域的广泛研究则是从1960年才真正开始的，尤其是最近30年，在这方面完成了很多重要的工作。本文主要研究了图论的一个分支，即：Cayley图以及它的判定，尤其是弧传递Cayley图的判定。首先，通过研究图的性质以及群的交换性，从而得出本文的主要定理。其次，根据正规弧传递Cayley图的定义以及主要结论的推导过程，得出了一个关于正规弧传递Cayley图

文章引用：于雪．关于弧传递 Cayley 图的判定[J]．理论数学, 2017, 7(4): 277-281.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74036

的判定条件。

关键词

边传递图，Cayley图，弧传递图，Orbital图

1. 引言

本文假设所研究的群是有限群，图是有限的连通的简单的图。在图 Γ 中，记图 Γ 的顶点集、边集、弧集分别为 $V\Gamma, E\Gamma, A\Gamma$。若 $\sigma \in \mathrm{Sym}(V\Gamma)$，且 $\forall \alpha, \beta \in V\Gamma$，使得

$$\{\alpha, \beta\} \in E\Gamma \Leftrightarrow \{\alpha^\sigma, \beta^\sigma\} \in E\Gamma,$$

则称 σ 为 Γ 的一个自同构。Γ 的全体自同构对于映射的复合运算构成一个群，称为图 Γ 的全自同构群，记其为 $\mathrm{Aut}\Gamma$。显然有 $\mathrm{Aut}\Gamma \le \mathrm{Sym}(V\Gamma)$。若 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 作用在 Γ 的 $V\Gamma, E\Gamma, A\Gamma$ 上是传递的，则分别称 Γ 为点传递图、边传递图、弧传递图。特别地，若存在 $G \le \mathrm{Aut}\Gamma$，且 G 在 Γ 的 $V\Gamma, E\Gamma, A\Gamma$ 上的作用是传递的，则分别称 Γ 为 G-点传递图、G-边传递图、G-弧传递图。此外，由文献[1]知：自同构群 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 在 Γ 的弧集上是传递的，也就是说，Γ 是弧传递图，等价于，$\mathrm{Aut}\Gamma$ 在 Γ 的点集上是传递的，且任一点 $v \in V\Gamma$ 在 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 中的点稳定子群 $(\mathrm{Aut}\Gamma)_v$ 在 v 的领域 $\Gamma(v)$ 上也是传递的。由此结论，作者对弧传递图的判定，尤其是关于 Cayley 图的弧传递性产生了兴趣。

设 G 是一个群，S 是 G 的一个不含单位元非空集合，定义图 Γ：点集 $V\Gamma = G$，且任意的 $x, y \in V\Gamma$，x 与 y 是邻接的当且仅当 $yx^{-1} \in S$，称 Γ 是 G 的关于 S 的 Cayley 图，记作 $\Gamma = Cay(G, S)$。下面给出本文的主要定理。

定理 1.1. 设 G 是一个群，$X = \hat{G} : \mathrm{Aut}(G) \le \mathrm{Sym}(G)$，则下面的情况是成立的：

1) 若 Γ 是 G 的 X-边传递 Cayley 图，则 Γ 是弧传递图。

2) 若 G 是交换群，则 Γ 是 X-弧传递图；若 G 是非交换群，则 $\mathrm{Aut}\Gamma \ge X \cdot 2$。

进一步地，若图 $\Gamma = Cay(G, S)$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 有正规子群与 G 同构，且在 $V\Gamma$ 上是正则的，则称 Γ 为 G 的正规 Cayley 图。从而可得下面的推论。

推论 1.2. 设 $\Gamma = Cay(G, S)$ 是 G 上的 X-正规边传递 Cayley 图，若 $\mathrm{Inn}(G) \le X_1$，则 Γ 是弧传递图。

2. 预备知识

为了证明本文的主要定理，这一节将介绍一些预备的命题和引理。首先，引入 Orbital 图的相关命题。

设 G 为 Ω 上的传递置换群，则 G 可诱导 $\Omega \times \Omega$ 上的作用，这个作用的每个轨道，即：$\forall \alpha, \beta \in \Omega \times \Omega$，$\{(\alpha, \beta)^g \mid g \in G\} = (\alpha, \beta)^G$，称为 G 的一个 Orbital。每个 Orbital Δ 都存在一个对偶 Orbital Δ^*，即：$\Delta^* = (\beta, \alpha)^G$。若 $\Delta = \Delta^*$，则称 Δ 为自对偶的 Orbital。称 $\Delta \cup \Delta^*$ 为广义的 Orbital。设 Δ 为 G 在 Ω 上的一个 Orbital，定义图 Γ：$V\Gamma = \Omega$，Δ 为弧集，称有向图 Γ 为 Δ 对应的 Orbital 图，记作 $\mathrm{Orb}_G(\Delta)$。进一步有，若 Δ 为自对偶的，则 $\mathrm{Orb}_G(\Delta)$ 为无向图。反之亦然。易知，$\mathrm{Orb}_G(\Delta) \cup \mathrm{Orb}_G(\Delta^*)$ 为无向图，称为广义 Orbital 图，通常简记为 $\mathrm{Orb}_G(\Delta \cup \Delta^*)$。

命题 2.1. 记$\Gamma=\mathrm{Orb}_G(\Delta)$，$\Gamma^*=\mathrm{Orb}_G(\Delta^*)$。则：

1) $G\le\mathrm{Aut}\Gamma$，Γ为G的弧传递有向图。

2) Γ为G的弧传递图当且仅当$\Delta=\Delta^*$。

3) $\mathrm{Orb}_G(\Delta\cup\Delta^*)$为$G$的边传递图。

4) $\mathrm{Orb}_G(\Delta\cup\Delta^*)$不是$G$的弧传递图当且仅当$\Delta\ne\Delta^*$。

证明：

1) 因为$A\Gamma=\Delta$，所以$\Delta^G=\Delta$，则有$G\le\mathrm{Aut}\Gamma$。又$\Delta=(\alpha,\beta)^G$，故(α,β)可以用G中元素射到Γ的任意一条弧，故Γ为G的弧传递有向图。

2) 由 1)知：Γ为G的弧传递有向图。又Γ为无向图当且仅当$\Delta=\Delta^*$，所以Γ为G的弧传递图当且仅当$\Delta=\Delta^*$。

3) 设$\Delta=(\alpha,\beta)^G$，则有$\Delta\cup\Delta^*=\mathrm{Orb}_G(\Delta\cup\Delta^*)$，所以$\mathrm{Orb}_G(\Delta\cup\Delta^*)$的边集是$\left\{\{\alpha^g,\beta^g\}\middle|g\in G\right\}$，故$\{\alpha,\beta\}^g=\{\alpha^g,\beta^g\}$，从而$\mathrm{Orb}_G(\Delta\cup\Delta^*)$为$G$的边传递图。

4) 因为$\Delta\ne\Delta^*$，所以$\Delta^G\cap\Delta^*=\phi$，因此$\mathrm{Orb}_G(\Delta\cup\Delta^*)$不是$G$的弧传递图。反之亦然。

命题 2.2. 设Γ为图，$G\le\mathrm{Aut}\Gamma\le\mathrm{Sym}(V\Gamma)$在$V\Gamma$上是传递的，则下面的情况是成立的：

1) 若Γ为G-弧传递图，则Γ为自对偶 Orbital 图。

2) 若Γ为G-边传递图，则Γ为广义的 Orbital 图。

证明： 1) 设$(\alpha,\beta)\in A\Gamma$，则$A\Gamma=(\alpha,\beta)^G=\Delta$为$G$在$V\Gamma$上的一个 Orbital，从而$\Gamma=\mathrm{Orb}_G(\Delta)$。又因$\Gamma$为 G-弧传递图，则$\Delta=\Delta^*$，即：Δ和Δ^*均为自对偶的。因此$\mathrm{Orb}_G(\Delta)$与$\mathrm{Orb}_G(\Delta^*)$均为无向图，故$\mathrm{Orb}_G(\Delta)\cup\mathrm{Orb}_G(\Delta^*)$为无向图，即：$\Gamma$为$V\Gamma$上的传递置换群$G$的一个自对偶 Orbital 图。

2) 因为Γ为G-边传递图，且G在$V\Gamma$上是传递的，则G_α在$\Gamma(\alpha)$上恰有两个轨道，则$\Delta\ne\Delta^*$，那么$\mathrm{Orb}_G(\Delta\cup\Delta^*)$为无向图，所以$\Gamma$为$V\Gamma$上的传递置换群$G$的一个广义的 Orbital 图。

其次，介绍几个关于 Cayley 图的引理。

引理 2.3. 设G是一个群，且$X:=\hat{G}:\mathrm{Aut}(G)\le\mathrm{Sym}(G)$。若$\Gamma=Cay(G,S)$是$X$-边传递图，则$\Gamma$是$X$-弧传递图或$X$在$S$上有两个 Orbital Δ_1,Δ_2，并且$\Delta_1=\Delta_2^{-1}$。

证明： 由文献[2]可知，$\sigma:x\to x^{-1}$，$\forall x\in X$是X的任意 Orbital 到其自对偶 Orbital 的同构映射。故结论得证。

引理 2.4. 设G是一个群，且$X:=\hat{G}:\mathrm{Aut}(G)\le\mathrm{Sym}(G)$，$\Gamma=Cay(G,S)$是$X$-边传递图，若$\exists x\in X_1$，对一些$s\in S$，满足$s^x=s^{-1}$，则$\Gamma$是$X$-弧传递图。

证明： 在$\Gamma=Cay(G,S)$中，$\forall a,b\in S$，

$$a\sim b\Leftrightarrow ba^{-1}\in S\Leftrightarrow\exists s'\in S,b=s'a$$

因此，$\Gamma=Cay(G,S)$中的每一条弧均可表示为$(a,s'a)$，其中$a,s'\in S$。又Γ是X-边传递图，则$\exists y\in X$，有$\{1,s\}^y=\{a,s'a\}$。从而$(1,s)^y=(a,s'a)$或$(s,1)^y=(a,s'a)$。进一步地，$(s,1)^{x\hat{s}y}=\left(s^{-1},1\right)^{\hat{s}y}=(1,s)^y=(a,s'a)$或$(1,s)^{x\hat{s}y}=\left(1,s^{-1}\right)^{\hat{s}y}=(s,1)^y=(a,s'a)$，且$x\hat{s}y\in X$，故$\Gamma$是$X$-弧传递图。

引理 2.5. 设$X:=\hat{G}:\mathrm{Aut}(G)\le\mathrm{Sym}(G)$，且$G$在$\Omega$上是正则的。若$\Sigma$是$X$的一个 Orbital，则$\Sigma$为$X$-弧传递图，且$\Sigma=Cay(G,S)$，其中$S=g^{X_1},g\in G$。

证明： 因G在Ω上是正则的，则可看作$\Omega\equiv G$。又因$E\Sigma=(a,b)^X=(a,b)^{a^{\pm1}X}=\left(1,ba^{-1}\right)^X$，所以$\Sigma(1)=\left(ba^{-1}\right)^{X_1}$。又$ba^{-1}\in G$，从而$\Sigma(1)=S=g^{X_1},g\in G$。

3. 定理的证明

有了前面的预备知识，本节就给出本文主要定理的证明。

定理 1.1. 证明 1) 因为 Γ 是 X-边传递图，由命题 2.2 知，Γ 是广义的 Orbital 图。不妨设 $\Sigma\bigcup\Sigma^*$ 为广义的 Orbital，其中 Σ 与 Σ^* 是 X 的对偶 Orbital。如果 $\Sigma=\Sigma^*$，由命题 2.1 知，Γ 是 X-弧传递图。现在假设 $\Sigma\neq\Sigma^*$。若 $\forall g_1,g_2\in G$，$A\Sigma=(g_1,g_2)^X$。因为 $\hat{g}_1\in X$，则 $A\Sigma=\left(1,g_2g_1^{-1}\right)^{\hat{g}_1X}=\left(1,g_2g_1^{-1}\right)^X$。设 $\forall g\in\Sigma(1)$，则 $(1,g)\in A\Sigma\Leftrightarrow\exists x\in X$，满足 $(1,g)=\left(1,g_2g_1^{-1}\right)^x\Leftrightarrow 1=1^x$，并且 $g=\left(g_2g_1^{-1}\right)^x$，那么 $x\in X_1$，$g\in\left(g_2g_1^{-1}\right)^{X_1}$。所以 $\Sigma(1)=\left(g_2g_1^{-1}\right)^{X_1}$。又因 $X_1=\left(\hat{G}:\mathrm{Aut}(G)\right)_1$ 且 $\hat{G}$ 是正则的，所以 $X_1=\mathrm{Aut}(G)$。从而 $\Sigma(1)=\left(g_2g_1^{-1}\right)^{\mathrm{Aut}(G)}$。因此我们可令 $\Sigma=Cay(G,S)$，其中 $S=\left(g_2g_1^{-1}\right)^{\mathrm{Aut}(G)}$，由引理 2.3 知，$\Sigma^*=Cay\left(G,S^{-1}\right)$。定义一个映射：$\forall g\in G$，$\sigma:V\Gamma=G\to G,g\to g^{-1}$。则

在 Σ 中，$a\sim b\Leftrightarrow ba^{-1}\in S$

$$\Leftrightarrow b^{-1}\cdot\left(a^{-1}\right)^{-1}=b^{-1}a=\left(a^{-1}b\right)^{-1}=\left[\left(b^{-1}a\right)^{\tau_a}\right]^{-1}\in S^{-1}$$

$\Leftrightarrow$ 在 Σ^* 中，$a^\sigma\sim b^\sigma$，

其中 τ_a 是 a 诱导的内自同构，则 $\tau_a\in\mathrm{Aut}(G)$。所以 σ 是 $\Sigma\to\Sigma^*$ 的同构映射。进一步地，$\sigma\in\mathrm{Aut}\Gamma$。令 $Y:=\langle X,\sigma\rangle\leq\mathrm{Sym}(G)$。因 $\forall x\in X$，$\forall(\alpha,\beta)^y\in A\Gamma$，则 $x\in\mathrm{Sym}(G)$ 且 $\left[(\alpha,\beta)^y\right]^x=(\alpha,\beta)^{yx}\in A\Gamma$ (因为 $yx\in X$)。所以 $(A\Gamma)^x=(\alpha,\beta)^{Xx}=(\alpha,\beta)^X=A\Gamma$。进一步地，$Y\leq\mathrm{Aut}\Gamma$ 且 $\sigma\in Y_1\leq Y$。$\forall g'\in\Sigma^*(1)$。又因为 $(1,g')\in A\Sigma^*\Leftrightarrow\exists x\in X$，$(1,g')=\left(1,g_1g_2^{-1}\right)^x\Leftrightarrow 1=1^x$ 且 $g'=\left(g_1g_2^{-1}\right)^x$，所以 $x\in X_1$，$g'\in\left(g_1g_2^{-1}\right)^{X_1}$。因此 $\Sigma^*(1)=\left(g_1g_2^{-1}\right)^{X_1}=\left(g_1g_2^{-1}\right)^{\mathrm{Aut}(G)}=S^{-1}$ 且 $A\Sigma^*=(g_2,g_1)^*=\left(1,g_1g_2^{-1}\right)^{\hat{g}_2X}=\left(1,g_1g_2^{-1}\right)^X$。那么 $\langle X_1,\sigma\rangle\leq Y_1$ 在 $\Gamma(1)=\Sigma(1)\bigcup\Sigma^*(1)=S\bigcup S^{-1}$ 上是传递的。

2) 若 G 是交换群，则 σ 是 G 的一个同构映射，即：$\sigma\in\mathrm{Aut}(G)=X_1\leq X$。所以 $Y=X$，那么 Γ 是 X-弧传递图。现在设 G 是非交换群，则 $\forall x\in G,\forall\hat{g}\in\hat{G}$ 有

$$x^{\sigma^{-1}\hat{g}\sigma}=\left(x^{-1}\right)^{\hat{g}\sigma}=\left(x^{-1}g\right)^\sigma=\left(x^{-1}g\right)^{-1}=g^{-1}x=g^{-1}xg\cdot g^{-1}=x^{\tau_g g^{\pm1}},$$

其中 τ_g 是由 g 诱导的内自同构，且 $\sigma^2=1$。所以 $\sigma^{-1}\hat{g}\sigma=\tau_g g^{\pm1}\in\mathrm{Aut}(G)\hat{G}=X$。又 $\forall\alpha\in\mathrm{Aut}(G)$，有 $x^{\alpha\sigma}=\left(x^\alpha\right)^\sigma=\left(x^\alpha\right)^{-1}=\left(x^{-1}\right)^\alpha=x^{\sigma\alpha}$。因此 $\alpha\sigma=\sigma\alpha$，从而 $\sigma\mathrm{Aut}(G)=\mathrm{Aut}(G)\sigma$。综上，$\sigma$ 正规化 X，即：$\sigma X=X\sigma$。进一步有 $1=\sigma^2\in X$。若 $\sigma\in X$，那么 $1^\sigma=1^{-1}=1$。因此 $\sigma\in X_1=\mathrm{Aut}(G)$，然而 $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$ 当且仅当 G 是交换群。这就产生了矛盾，所以 σ 不属于 X。因此 $Y=X\cdot 2\leq\mathrm{Aut}(G)$。证毕。

下面来证明由定理 1.1 得出的推论。

推论 1.2 的证明由文献[3]知，$N_{\mathrm{Aut}\Gamma}\left(\hat{G}\right)=\hat{G}:\mathrm{Aut}(G,S)$，其中 $\mathrm{Aut}(G,S)=\left\{\tau\in\mathrm{Aut}(G)\middle|S^\tau=S\right\}\leq\mathrm{Aut}(G)$。因为 $\hat{G}\lhd X$，所以 $X=N_X\left(\hat{G}\right)\leq N_{\mathrm{Aut}\Gamma}\left(\hat{G}\right)=\hat{G}:\mathrm{Aut}(G,S)\leq G:\mathrm{Aut}(G)$。由[3] Frattini 论断知，$X=\hat{G}:X_1$，$\mathrm{Inn}(G)\leq X_1\leq\mathrm{Aut}(G)$。设 σ 如定理 1.1 证明中所定义的，则有 Γ 是 $\langle X,\sigma\rangle$-弧传递图。证毕。

注意： 1) 在推论 1.2 中，条件“$\mathrm{Inn}(G)\leq X_1$”不可缺，否则 σ 不一定是 $\Sigma\to\Sigma^*$ 的同构映射。

2) 在推论 1.2 中，“$Y\leq X\cdot 2$”不一定成立。

事实上，$\forall\delta\in\mathrm{Aut}(G,S)$，$\forall x\in G$。若 $x\in S$，则 $x^{\delta\sigma}=x^\sigma=x^{-1}=\left(x^{-1}\right)^\delta=x^{\sigma\delta}$。所以 $\delta\sigma=\sigma\delta$，那么 σ 正规化 $\mathrm{Aut}(G,S)$。若 $x\notin S$，则 $x^{\delta\sigma}\neq x^{\sigma\delta}=\left(x^{-1}\right)^\delta$。所以 $\delta\sigma\neq\sigma\delta$，那么 σ 不正规化 $\mathrm{Aut}(G,S)$。综上，$Y\leq X\cdot 2$ 不一定成立。

基金项目

国家自然科学基金《有限群的因子分解与含有传递子群的置换群(k1020531)》；云南省自然科学基金《一些对称图与 Cayley 图的研究(2013FB001)》；云南大学研究生科研创新基金项目资助(ynuy201688)。

参考文献 (References)

[1] 徐明曜. 有限群导引(下册)[M]. 北京: 科学出版社, 1999.3.

[2] Li, C.H. (2006) Finite Edge-Transitive Cayley Graphs and Rotar Cayley Maps. *Transactions of the American Mathematical Society*, **358**, 4605-4635. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-06-03900-6

[3] Godsil, C.D. (1981) On the Full Automorphism Group of a Group. *Combinatorial*, **1**, 243-256. https://doi.org/10.1007/BF02579330