Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(6), 478-481
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.76063

Hans汉斯

The *Z*-Graded and the Maximum Subalgebra of the Finite-Dimensional Modular Lie Superalgebra $\widehat{W}(n,m)$

Lihua Zhang, Qi Cui

School of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang Liaoning
Email: zhanglihuawj@163.com

Received: Nov. 1st, 2017; accepted: Nov. 15th, 2017; published: Nov. 21st, 2017

Abstract

This paper proves that the finite-dimensional modular Lie superalgebra $\widehat{W}(n,m)$ is Z-graded, and obtains a maximum subalgebra $\widehat{W}_{[0]}$ of it.

Keywords

Modular Lie Superalgebra, Z-Graded, Maximum Subalgebra

有限维模李超代数$\widehat{W}(n,m)$的*Z*-阶化与其极大子代数

张丽华，崔　琪

沈阳师范大学数学与系统科学学院，辽宁　沈阳
Email: zhanglihuawj@163.com

收稿日期：2017年11月1日；录用日期：2017年11月15日；发布日期：2017年11月21日

摘　要

本文证明了有限维单模李超代数$\widehat{W}(n,m)$是*Z*-阶化的模李超代数，并确定了它的一个极大子代数$\widehat{W}_{[0]}$。

文章引用：张丽华，崔琪. 有限维模李超代数$\widehat{W}(n,m)$的*Z*-阶化与其极大子代数[J]. 理论数学, 2017, 7(6): 478-481. DOI: 10.12677/pm.2017.76063

关键词

模李超代数，*Z*-阶化，极大子代数

1. 引言

目前单模李超代数的分类问题还尚未解决，因此构作新的单模李超代数和研究已有的单模李超代数的结构就显得非常重要，而研究一个李超代数的单性、确定其导子超代数以及滤过等进而将其与其它的模李超代数进行比较，这些都需要给出该李超代数的 *Z*-阶化[1]-[8]。本文将对文献[2]给出的有限维单模李超代数 $\widehat{W}(n,m)$ 的 *Z*-阶化进行证明，并给出 $\widehat{W}(n,m)$ 的一个极大子代数。

2. 有限维模李超代数 $\widehat{W}(n,m)$ 的 *Z*-阶化

有限维单模李超代数 $\widehat{W}(n,m)$ 简记为 $\widehat{W}$，其定义见文献[2]。在文献[2]中给出了 $\widehat{W}$ 的一个 *Z*-阶化，即令：

$$\widehat{W}_i=\operatorname{span}_F\left\{x^u y^\mu D_j \,\middle|\, |u|+\delta(j,I_2)=i+1, u\in B(n), \mu\in H, j\in I\right\}$$

其中 $\delta(j,I_2)=\begin{cases}1 & j\in I_2\\ 0 & j\notin I_2\end{cases}$，$i=-1,0,1,\cdots,n$。

命题 1. $\widehat{W}=\underset{i=-1}{\overset{n}{\oplus}}\widehat{W}_i$ 是 *Z*-阶化李超代数。

证明：首先，因为对任意 $u\in B(n)$，有 $0\le|u|\le n$，所以 $-1\le|u|+\delta(j,I_2)-1\le n$，又 $\left\{x^u y^\mu D_j \,\middle|\, u\in B(n),\mu\in H, j\in I\right\}$ 为 $\widehat{W}(n,m)$ 一组 F 一基底，因此 $\widehat{W}=\underset{i=-1}{\overset{n}{\oplus}}\widehat{W}_i$。

其次，显然 $\widehat{W}_i(i=-1,0,1,\cdots,n)$ 是 $\widehat{W}$ 的 Z_2-阶化子空间。

最后，任取 $t,m\in Z$，有 $\left[\widehat{W}_t,\widehat{W}_m\right]\subseteq\widehat{W}_{t+m}$。事实上，当 t 或 m 中至少有一个大于 n 或小于 -1 时，$\left[\widehat{W}_t,\widehat{W}_m\right]=\{0\}\subseteq\widehat{W}_{t+m}$，当 $t,m\in\{-1,0,1,\cdots,n\}$ 时，对于任意的 $f=x^u y^\mu D_j\in\widehat{W}_t$，$g=x^v y^\lambda D_k\in\widehat{W}_m$，其中 $j,k\in I$，$\mu,\lambda\in H$，$u,v\in B(n)$，有：

$$\left[x^u y^\mu D_j, x^v y^\lambda D_k\right]=x^u y^\mu D_j\left(x^v y^\lambda\right)D_k-(-1)^{|f||g|}x^v y^\lambda D_k\left(x^u y^\mu\right)D_j \tag{1}$$

若 $j,k\in I_1$，对于 $f=x^u y^\mu D_j\in\widehat{W}_t$，有：

$$|u|+\delta(j,I_2)=|u|=t+1$$

对于 $g=x^v y^\lambda D_k\in\widehat{W}_m$，有：

$$|v|+\delta(k,I_2)=|v|=m+1$$

此时(1)式等于 $(-1)^{v(j)}x^u x^{v-\langle j\rangle}y^\mu y^\lambda D_k-(-1)^{|f||g|}(-1)^{u(k)}x^v x^{u-\langle k\rangle}y^\lambda y^\mu D_j$。

对 $x^u x^{v-\langle j\rangle}y^\mu y^\lambda D_k$，如果 $\{u\}\cap\{v-\{j\}\}\ne\varnothing$，那么 $x^u x^{v-\langle j\rangle}y^\mu y^\lambda D_k=0$，否则，因 $j\in I_1$，所以：

$$|u|+|v-\langle j\rangle|+\delta(j,I_2)=|u|+|v-\langle j\rangle|=t+1+m+1-1=t+m+1$$

知 $x^u y^\mu x^{v-\langle j\rangle} y^\lambda D_k \in \widehat{W}_{t+m}$，同理知 $x^v x^{u-\langle k\rangle} y^\lambda y^\mu D_j \in \widehat{W}_{t+m}$，进而 $\left[x^u y^\mu D_j, x^v y^\lambda D_k\right] \in \widehat{W}_{t+m}$，因此，当 $j,k \in I_1$ 时，$\left[\widehat{W}_t, \widehat{W}_m\right] \subseteq \widehat{W}_{t+m}$。

若 $j \in I_2, k \in I_2$，对于 $f = x^u y^\mu D_j \in \widehat{W}_t$，有：

$$|u| + \delta(j, I_2) = |u| + 1 = t + 1$$

对于 $g = x^v y^\lambda D_k \in \widehat{W}_m$，有：

$$|v| + \delta(k, I_2) = |v| + 1 = m + 1$$

此时(1)式等于 $\lambda_j x^u x^v y^\mu y^\lambda D_k - (-1)^{|f||g|} \mu_k x^v x^u y^\lambda y^\mu D_j$。

对 $x^u y^\mu x^v y^\lambda D_k$，如果 $\{u\} \cap \{v\} \neq \varnothing$，那么 $x^u y^\mu x^v y^\lambda D_k = 0$，否则，因为 $k \in I_2$，所以有：

$$|u| + |v| + \delta(j, I_2) = t + m + 1$$

知 $x^u y^\mu x^v y^\lambda D_k \in \widehat{W}_{t+m}$，同理可知 $x^v x^u y^\lambda y^\mu D_j \in \widehat{W}_{t+m}$，进而 $\left[x^u y^\mu D_j, x^v y^\lambda D_k\right] \in \widehat{W}_{t+m}$，因此当 $j,k \in I_2$ 时，$\left[\widehat{W}_t, \widehat{W}_m\right] \subseteq \widehat{W}_{t+m}$。

对于 $j \in I_2, k \in I_1$；$j \in I_1, k \in I_2$ 这两种情况，也可以通过上述方法得知 $\left[\widehat{W}_t, \widehat{W}_m\right] \subseteq \widehat{W}_{t+m}$。

综上，$\widehat{W} = \bigoplus_{i=-1}^{n} \widehat{W}_i$ 是 Z-阶化的模李超代数。

3. 有限维模李超代数 $\widehat{W}(n,m)$ 的极大子代数

命题 2. 设 $\widehat{W}_{[0]} = \sum_{i \geq 0} \widehat{W}_i$，则 $\widehat{W}_{[0]}$ 是 $\widehat{W}$ 的极大子代数。

证明：由文献[2]知 $\widehat{W}_{-1}$ 作为 $\widehat{W}_0$ 模是单模。因为 $\left[\widehat{W}_{[0]}, \widehat{W}_{[0]}\right] \subseteq \left[\widehat{W}_{[0]}\right]$，所以 $\widehat{W}_{[0]}$ 是 $\widehat{W}$ 的子代数。

设 M 是 $\widehat{W}$ 的子代数，且 $\widehat{W}_{[0]}$ 真包含于 M，则存在 $x \in M$，使：

$$x = x_{-1} + y$$

其中 $0 \neq x_{-1} \in \widehat{W}_{-1}, y \in \widehat{W}_{[0]}$。因为 $\widehat{W}_{[0]} \subset M$，所以 $y \in M$，又因为 $x \in M$，所以 $x_{-1} \in M$，于是 $M \cap \widehat{W}_{-1} \neq \{0\}$。而 $M \cap \widehat{W}_{-1}$ 是 $\widehat{W}_{-1}$ 的子模，由 $\widehat{W}_{-1}$ 的单性可知 $M \cap \widehat{W}_{-1} = \widehat{W}_{-1}$，于是 $\widehat{W}_{-1} \subseteq M$，因此 $M = \widehat{W}$，可知 $\widehat{W}_{[0]}$ 是 $\widehat{W}$ 的极大子代数。

4. 结论

本文证明了 $\widehat{W} = \bigoplus_{i=-1}^{n} \widehat{W}_i$ 是 Z-阶化李超代数，并且通过 $\widehat{W}$ 的 Z-阶化，证明了 $\widehat{W}_{[0]}$ 是 $\widehat{W}$ 的极大子代数。

基金项目

辽宁省科技厅自然基金项目，项目号：2014020120。

参考文献 (References)

[1] 张永正，刘文德. 模李超代数[M]. 北京：科学出版社, 2004.

[2] 王璐，张丽华. 有限维模李超代数 $\widehat{W}(n,m)$ 的单性[J]. 理论数学, 2014, 4: 247-250.

[3] Wang, X.L. and Liu, W.D. (2007) Filtered Lie Superalgebras of Odd Hamiltonian Type HO. *Advances in Mathematics*, **36**, 710-720.

[4] 华秀英，刘文德. 无限维 Hamilton 模李超代数的导子[J]. 数学研究与评论, 2007, 27(4):750-754.

[5] 徐晓宁. 有限维模李超代数 Ω, Γ, D [D]: [博士学位论文]. 长春：东北师范大学, 2010.

[6] 远继霞. Cartan 型李超代数[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011.

[7] 董艳琴. 广义 Cartan 型模李超代数[D]: [博士学位论文]. 长春: 东北师范大学, 2011.

[8] 徐晓宁, 王瑾. Ω-型模李超代数的阶化[J]. 东北师范大学(自然科学版), 2016, 48(3): 1-4.