**Pure Mathematics** 理论数学, 2017, 7(6), 417-421
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.76054

# A Normality Criterion of Meromorphic Functions Concerning Shared Set

**Zhenzhu Li, Chunlin Lei**

Institute of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
Email: lizhenzhu1990@163.com, leichunlin0113@126.com

Received: Oct. 13th, 2017; accepted: Oct. 27th, 2017; published: Nov. 2nd, 2017

## Abstract

**Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain *D*, let *a*, *b*, *c* be finite complex numbers, and $a \neq b$. Let *k* be a positive integer and $S = \{a,b\}$. If, for each $f \in \mathcal{F}$, the zeros of $f - c$ are of multiplicity $\geq k+1$, and $f \in S$ whenever $D_k(f) \in S$, then $\mathcal{F}$ is normal in *D*.**

## Keywords

**Normal Families, Meromorphic Functions, Zalcman Lemma, Shared Set**

# 一个涉及分担集合的亚纯函数正规定则

**厉珍珠，雷春林**

华南农业大学应用数学研究所，广东 广州
Email: lizhenzhu1990@163.com, leichunlin0113@126.com

收稿日期：2017年10月13日；录用日期：2017年10月27日；发布日期：2017年11月2日

## 摘　要

设$\mathcal{F}$是区域*D*内的一族亚纯函数，$a$，$b$，$c$是三个有穷复数并且$a \neq b$，$k$是正整数。令$S = \{a,b\}$。若对于任意的$f \in \mathcal{F}$满足：1) $f - c$的零点重级均$\geq k+1$；2) $D_k(f) \in S \Rightarrow f \in S$，其中$D_k(f)$为$f$的线性微分多项式，则$\mathcal{F}$在*D*内正规。

文章引用：厉珍珠，雷春林．一个涉及分担集合的亚纯函数正规定则[J]．理论数学, 2017, 7(6): 417-421.
DOI: 10.12677/pm.2017.76054

**关键词**

**正规族，亚纯函数，ZALCMAN引理，分担集**



## 1. 引言及主要结果

本文采用了 Nevanlinna 基本理论以及记号，如 $T(r,f)$，$S(r,f)$，$\overline{N}(r,f)$，$N(r,f)$，$m(r,f)$ 等，见[1] [2]。

设 $D$ 是复平面 $C$ 上的一个区域，若对于 $\mathcal{F}$ 中任意序列 $\{f_n(z)\}$ 存在一个子序列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在区域 $D$ 上按球面距离内闭一致收敛到一个亚纯函数或者 $\infty$，则称 $\mathcal{F}$ 为 $D$ 内的正规族，见[3]。

设 $f$ 和 $g$ 是区域 $D$ 内的两个亚纯函数，$a$ 是一个复数。若 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 在 $D$ 内有相同的零点，则称 $f$ 和 $g$ 在区域 $D$ 内分担 $a$，或称 IM 分担 $a$，若 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 在 $D$ 内有相同的零点并且零点重级也相同，则称 $f$ 和 $g$ 在区域 $D$ 内 CM 分担 $a$。

1992 年，Schwick 首先考虑了与分担值有关的正规性，证明了

**定理 A** [4]：设 $\mathcal{F}$ 为 $D$ 内的一族亚纯函数，$a$，$b$，$c$ 是三个判别的有穷复数。若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$，$f$ 和 $f'$ 在 $D$ 内分担 $a$，$b$，$c$，则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规。

2001 年，Chen and Fang 考虑了把 $f'$ 换为 $f^{(k)}$ 的情形，证明了

**定理 B** [5]：设 $\mathcal{F}$ 为 $D$ 内的一族亚纯函数，$a$，$b$，$c$ 是三个有穷的复数且 $a\neq b$。若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$，有 $f$ 和 $f^{(k)}$ 在 $D$ 内分担 $a$，$b$，且 $f-c$ 的零点重级均 $\geq k+1$，则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规。

2008 年，Han and Gu 改进了定理 B，证明了

**定理 C** [6]：设 $\mathcal{F}$ 为 $D$ 内的一族亚纯函数，$a$，$b$，$c$ 是三个有穷复数且 $a\neq b$。若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$，$f-c$ 的零点重级均 $\geq k+1$，且 $f^{(k)}(z)=a\Rightarrow f(z)=a$，$f^{(k)}(z)=b\Rightarrow f(z)=b$，则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规。

设 $f$ 为区域 $D$ 内的亚纯函数，$a_0(z),\cdots,a_k(z)$ 是全纯函数并且 $\forall z\in D, a_k(z)\neq 0$。我们定义

$$D_k(f(z))=a_k(z)f^{(k)}(z)+a_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+a_1(z)f'(z)+a_0(z)f(z)$$

本文推广并改进了定理 C，证明了

**定理 1**：设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族亚纯函数，$a$，$b$，$c$ 是三个有穷复数并且 $a\neq b$，$k$ 是正整数。令 $S=\{a,b\}$。若对于任意的 $f\in\mathcal{F}$ 满足：

1) $f-c$ 的零点重级均 $\geq k+1$；

2) $D_k(f)\in S\Rightarrow f\in S$。

则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规。

下面举例说明定理 1 中的条件“$f-c$ 的零点重级均 $\geq k+1$”是必须的。

例 1：设 $D=\{z:|z|<1\}$，$k$ 是一个正整数，$a_k=1$ 且 $a_i=0(i=0,1,\cdots,k-1)$，$S=\{1,-1\}$，$c=0$。$\mathcal{F}=\{f_n(z)\}$，其中 $f_n(z)=nz^k,(n=1,2,3,\cdots)$。显然 $f_n^{(k)}(z)\in S\Rightarrow f(z)\in S$，但 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内是不正规的。

## 2. 几个引理

**引理 1：**[3] [7]：设 $\mathcal{F}$ 是单位圆内的一族亚纯函数且 $\mathcal{F}$ 中的每个函数的零点的重级至少是 $k$，假设 $f(z)=0$，必有 $\left|f^{(k)}(z)\right|\le A$。若 $\mathcal{F}$ 在单位圆内不正规，那么对于每一个 $\alpha$， $0\le\alpha\le k$，存在

1) 实数 $r$， $0<r<1$；

2) 点列 $z_n$， $|z_n|<r$；

3) 函数列 $f_n\in\mathcal{F}$；

4) 正数列 $\rho_n\to 0^+$，使得函数 $\left\{\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n^{\alpha}}\right\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个亚纯函数 $g(\xi)$，并且 $g^{\#}(\xi)\le g^{\#}(0)=kA+1$。

**引理 2：**[8]：设 $f$ 为复平面上的一个超越亚纯函数，$b$ 为非零有穷复数，$k$ 为一正整数，则 $f$ 或者 $f^{(k)}-b$ 有无穷多个零点。

**引理 3：**[9]：设 $k$ 是一个正整数， $f$ 是一个有穷极的亚纯函数，且零点重级至少为 $k$。设 $a$ 是一个非零复数。若 $f(z)$ 和 $f^{(k)}(z)$ 分担 0，且 $f^{(k)}(z)\ne a$，则 $f$ 是一个常数。

## 3. 定理 1 的证明

假设 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内不正规，则 $\exists z_0\in D$ 使得 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处不正规。由引理 1，可知存在

1) 实数 $r$， $0<r<1$；

2) 点列 $z_n$， $z_n\to z_0$， $|z_n|<r$；

3) 函数列 $f_n\in\mathcal{F}$；

4) 正数列 $\rho_n\to 0^+$

使得 $g_n(\xi)=\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\xi)-c}{\rho_n^k}$ 在复平面上按球面距离内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$，且 $g(\xi)$ 的级至多为 2。

下面我们分两种情况来考虑

情形 1. $c\in S$，即 $a=c$ 或者 $b=c$，不失一般性，不妨设 $a=c$。由此可断言：

1) $g^{(k)}(\xi)=\dfrac{a}{a_k(z_0)}\Rightarrow g(\xi)=0$

2) $g^{(k)}(\xi)=\dfrac{b}{a_k(z_0)}\Rightarrow g(\xi)=0$

由于

$$g_n(\xi)=\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi)-c}{\rho_n^k}\to g(\xi)$$

则 $g_n^{(k)}(\xi)=f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi)\to g^{(k)}(\xi)$， $\xi\in\{\xi:g(\xi)\ne\infty\}$ 且 $g(\xi)$ 的零点重级均 $\ge k+1$。

下面我们证明断言 1)，显然 $g^{(k)}(\xi)\not\equiv\dfrac{a}{a_k(z_0)}$。否则 $g^{(k)}(\xi)\equiv\dfrac{a}{a_k(z_0)}$，则 $g(\xi)$ 是一个次数至多为 $k$ 的多项式，由于 $g(\xi)$ 的零点重级均 $\ge k+1$，即知 $g(\xi)$ 为常数，矛盾。假设存在一点 $\xi_0$，使得 $g^{(k)}(\xi_0)=\dfrac{a}{a_k(z_0)}$，取 $\delta$ 使得 $g(\xi)$ 在 $\Delta=\{\xi:|\xi-\xi_0|<\delta\}$ 内全纯，则在 $\Delta$ 内有

$$\begin{aligned}
&D_k\left(f_n\left(z_n+\rho_n\xi\right)\right)-a\\
&=a_k\left(z_n+\rho_n\xi\right)f^{(k)}\left(z_n+\rho_n\xi\right)+\cdots+a_0\left(z_n+\rho_n\xi\right)f\left(z_n+\rho_n\xi\right)-a\\
&=a_k\left(z_n+\rho_n\xi\right)g_n^{(k)}\left(z_n+\rho_n\xi\right)+\rho_n a_{k-1}\left(z_n+\rho_n\xi\right)g_n^{(k-1)}\left(z_n+\rho_n\xi\right)\\
&\quad+\cdots+\rho_n^{(k)}a_0\left(z_n+\rho_n\xi\right)g_n\left(z_n+\rho_n\xi\right)-a\\
&\to a_k\left(z_0\right)g^{(k)}\left(\xi\right)-a
\end{aligned}$$

由于 $a_k\left(z_0\right)g^{(k)}\left(\xi_0\right)-a=0$，根据 Hurwitz 定理，由上式可得，存在一个点列 $\left\{\xi_n\right\}\subset\Delta$，$\xi_n\to\xi_0$，使得 $D_k\left(f_n\left(z_n+\rho_n\xi_n\right)\right)-a=0$。由条件 2)可知 $f_n\left(z_n+\rho_n\xi_n\right)=a$ 或者 $f_n\left(z_n+\rho_n\xi_n\right)=b$。

若 $f_n\left(z_n+\rho_n\xi_n\right)=a$，则有 $g\left(\xi_0\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n\left(z_n+\rho_n\xi_n\right)-c}{\rho_n^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-c}{\rho_n^k}=0$，所以断言 1)成立。

若 $f_n\left(z_n+\rho_n\xi_n\right)=b$，则有 $g\left(\xi_0\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n\left(z_n+\rho_n\xi_n\right)-c}{\rho_n^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-c}{\rho_n^k}=\infty$，显然 $\xi_0$ 是 $g\left(\xi\right)$ 的极点，这与 $g^{(k)}\left(\xi_0\right)=\dfrac{a}{a_k\left(z_0\right)}$ 矛盾。故这种情况不成立。

同理可证断言 2)。

下面我们再分三种情况讨论：

情形 1.1. $g^{(k)}\left(\xi\right)\neq\dfrac{a}{a_k\left(z_0\right)}$ 且 $g^{(k)}\left(\xi\right)\neq\dfrac{b}{a_k\left(z_0\right)}$，则由 Nevanlinna 第二基本定理可知，

$$\begin{aligned}
T\left(r,g^{(k)}\right)&\le\bar{N}\left(r,g^{(k)}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g^{(k)}-\frac{a}{a_k\left(z_0\right)}}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g^{(k)}-\frac{b}{a_k\left(z_0\right)}}\right)+S\left(r,g^{(k)}\right)\\
&\le\frac{1}{k+1}N\left(r,g^{(k)}\right)+S\left(r,g^{(k)}\right)\le\frac{1}{k+1}T\left(r,g^{(k)}\right)+S\left(r,g^{(k)}\right)
\end{aligned}$$

于是即得

$$T\left(r,g^{(k)}\right)\le S\left(r,g^{(k)}\right)$$

所以 $g^{(k)}\left(\xi\right)$ 是常数，因而 $g\left(\xi\right)$ 是一个次数至多为 $k$ 次的多项式，这与 $g\left(\xi\right)$ 的零点重级均 $\ge k+1$ 矛盾。

情形 1.2. $g^{(k)}\left(\xi\right)\neq\dfrac{a}{a_k\left(z_0\right)}$ 或者 $g^{(k)}\left(\xi\right)\neq\dfrac{b}{a_k\left(z_0\right)}$，不失一般性，我们假设 $g^{(k)}\left(\xi\right)\neq\dfrac{a}{a_k\left(z_0\right)}$，则有 $g^{(k)}\left(\xi\right)=\dfrac{b}{a_k\left(z_0\right)}\Rightarrow g\left(\xi\right)=0$。显然 $b=0$，否则 $b\neq0$，存在 $\xi_0$，使得 $g^{(k)}\left(\xi_0\right)=\dfrac{b}{a_k\left(z_0\right)}\Rightarrow g\left(\xi_0\right)=0$，即 $\xi_0$ 是 $g\left(\xi\right)$ 的零点，根据条件可得，$\xi_0$ 也是 $g^{(k)}\left(\xi\right)$ 的零点，即 $b=0$，矛盾。所以有 $g^{(k)}\left(\xi\right)=0\Rightarrow g\left(\xi\right)=0$。由于 $g\left(\xi\right)$ 的零点重级均 $\ge k+1$，所以 $g\left(\xi\right)=0\Rightarrow g^{(k)}\left(\xi\right)=0$。因此 $g\left(\xi\right)$ 和 $g^{(k)}\left(\xi\right)$ 分担 0，根据引理 3 可知，$g\left(\xi\right)$ 是一个常数，这与 $g\left(\xi\right)$ 是一个非常数的亚纯函数矛盾。

情形 1.3. 若 $g^{(k)}\left(\xi\right)=\dfrac{a}{a_k\left(z_0\right)}$ 且 $g^{(k)}\left(\xi\right)=\dfrac{b}{a_k\left(z_0\right)}$，即断言 1)和 2)同时成立；则由情形 1.2 可知 $a=0$ 且 $b=0$，这与 $a\neq b$ 矛盾。

故 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规。

情形 2. $c \notin S$，即 $a \neq c$ 且 $b \neq c$。则我们断言

3) $g^{(k)}(\xi) \neq \dfrac{a}{a_k(z_0)}$

4) $g^{(k)}(\xi) \neq \dfrac{b}{a_k(z_0)}$

下面我们证明上述断言：使用情形 1 的方法，假设存在 $\xi_0$，使得 $g^{(k)}(\xi_0) = \dfrac{a}{a_k(z_0)}$，取 $\delta$ 使得 $g(\xi)$ 在 $\Delta = \{\xi : |\xi - \xi_0| < \delta\}$ 内全纯，则有 $D_k(f_n(z_n + \rho_n \xi)) - a \to a_k(z_0) g^{(k)}(\xi) - a$，且 $a_k(z_0) g^{(k)}(\xi_0) - a = 0$。

根据 Hurwitz's 定理可知，存在一个点列 $\{\xi_n\} \subset \Delta$，使得 $\xi_n \to \xi_0$，则有 $D_k(f_n(z_n + \rho_n \xi_n)) = a$，由条件 2)

知 $f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = a$ 或者 $f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = b$。

若 $f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = a$，则有 $g(\xi_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n(z_n + \rho_n \xi) - c}{\rho_n^k} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a - c}{\rho_n^k} = \infty$；

若 $f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = b$，则有 $g(\xi_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n(z_n + \rho_n \xi) - c}{\rho_n^k} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b - c}{\rho_n^k} = \infty$；

这与 $g^{(k)}(\xi_0) = \dfrac{a}{a_k(z_0)}$ 矛盾。故断言 3)可证。类似的我们可以证明断言 4).

根据情形 1.1 的表述我们得到 $g(\xi)$ 是一个常数，矛盾。

故 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规。

## 致　谢

作者衷心感谢方明亮教授的指导和帮助！

## 基金项目

本文由国家自然科学基金资助(基金号：11371149)。

## 参考文献 (References)


[1] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Function. Science Press/Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1-70. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3626-8

[2] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Function. Clarendon Press, Oxford, 5-24.

[3] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 25-34.

[4] Schwick W. (1992) Sharing Values and Normality. *Archiv der Mathematik*, **59**, 50-54. https://doi.org/10.1007/BF01199014

[5] Chen, H.H. and Fang M.L. (2001) Shared Values and Normal Families of Meromorphic Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **260**, 124-132. https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7439

[6] Han, M.H. and Gu, Y.X. (2008) The Normal Famility of Mermorphic Function. *Acta Mathematica Scientia*, **28B**, 759-762.

[7] Zalcman, L. (1998) Normal Families: New Perspective, Bull. *American Mathematics Society*, **35**, 215-230. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-98-00755-1

[8] Wang, Y.F. and Fang, M.L. (1998) Picard Values and Normal Families of Meromorphic Functions with Multiple Zeros. *Acta Mathematica Sinica*, **14**, 17-26. https://doi.org/10.1007/BF02563879

[9] Fang, M.L. and Zalcman, L. (2003) Normal Families and Shared Values of Meromorphic Functions. Annales Polonice Mathematici, **80**, 137-138. https://doi.org/10.4064/ap80-0-11

**知网检索的两种方式：**

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org