Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(1), 34-40
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.81006

Hans汉斯

The Study of Meromorphic Function Solution of Function Equation of $f^{15}(z)+g^{15}(z)+h^{15}(z)+w^{15}(z)=1$

E Liang

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 1262558394@qq.com

Received: Dec. 20th, 2017; accepted: Jan. 2nd, 2018; published: Jan. 12th, 2018

Abstract

This paper proves that nonconstant meromorphic function $f(z),g(z),h(z),w(z)$ in the pole is not more than a single pole with public, and $\min\{\rho_f,\rho_g,\rho_h,\rho_w\}<\frac{1}{2}$, the solution of Fermat function equations $f^{15}(z)+g^{15}(z)+h^{15}(z)+w^{15}(z)=1$ does not exist.

Keywords

Fermat Type Functional Equation, Meromorphic Functions, Order of Growth

函数方程$f^{15}(z)+g^{15}(z)+h^{15}(z)+w^{15}(z)=1$的亚纯函数解的研究

梁 娥

云南师范大学数学学院，云南 昆明
Email: 1262558394@qq.com

收稿日期：2017年12月20日；录用日期：2018年1月2日；发布日期：2018年1月12日

摘 要

本文证明了若非常数亚纯函数$f(z),g(z),h(z),w(z)$的极点中至多只有一个是公共单级极点，且

文章引用：梁娥. 函数方程$f^{15}(z)+g^{15}(z)+h^{15}(z)+w^{15}(z)=1$的亚纯函数解的研究[J]. 理论数学, 2018, 8(1): 34-40.
DOI: 10.12677/pm.2018.81006

$\min\{\rho_f,\rho_g,\rho_h,\rho_w\}<\frac{1}{2}$，则 $f(z),g(z),h(z),w(z)$ 一定不是Fermat型函数方程 $f^{15}(z)+g^{15}(z)+h^{15}(z)+w^{15}(z)=1$ 的解。

关键词

Fermat型函数方程，亚纯函数，增长极

1. 引言及主要结果

本文使用 Nevanlinna 值分布理论的基本结果及其标准记号[1]。我们考虑如下费马型函数方程：

$$f^n+g^n+h^n+w^n=1 \tag{1}$$

的非常数亚纯函数解，G.G.GUNDERSEN 在文献[2]中给出了当 $n=8$ 时，函数方程(1)的超越亚纯函数解的例子。

我们也知道，用 Cartan 定理易证 $n\ge 16$ 时，函数方程(1)不存在非常数亚纯函数解，那么就存在一个公开性的问题；当 $9\le n\le 15$ 时，函数方程(1)是否存在非常数亚纯函数解？

基于这个问题，本文我们将研究当 $n=15$ 时，函数方程(1)的亚纯函数解的状况。

之前苏敏、李玉华[3]证明了：费马型函数方程 $f^6(z)+g^6(z)+h^6(z)=1$ 无级小于 1 的非常数整函数解以及费马型函数方程 $f^8(z)+g^8(z)+h^8(z)=1$ 不存在级小于 1 的非常数亚纯函数解。

加上直接研究费马型函数方程 $f^{15}(z)+g^{15}(z)+h^{15}(z)+w^{15}(z)=1$ 的非平凡亚纯解较难，从而在引入级小于 1 的条件的启发下，本文得到了以下结果：

定理 1：若非常数亚纯函数 $f(z),g(z),h(z),w(z)$ 的极点中至多只有一个是公共单级极点，且 $\min\{\rho_f,\rho_g,\rho_h,\rho_w\}<1/2$，则 $f(z),g(z),h(z),w(z)$ 一定不是 Fermat 型函数方程 $f^{15}(z)+g^{15}(z)+h^{15}(z)+w^{15}(z)=1$ 的解。

2. 几个辅助结果

引理 1 [4]：设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，n 为正整数，则 $f(z)$ 与 $f^{(n)}(z)$ 有相同的级与下级。

引理 2 [5]：若 $f_j(z)\,(j=1,2,\cdots,k)$ 是非常数亚纯函数，且 $\max\{\rho_{f_1},\rho_{f_2},\cdots,\rho_{f_k}\}<1$，那么

$$\liminf_{r\to+\infty}\left\{\max_{|z|=r}\sum_{j=1}^{k}\left|\frac{f_j'(z)}{f_j(z)}\right|\right\}=0.$$

特别的，若非常数亚纯函数 $f(z)$ 的级 $\rho_f<1$，则有 $\liminf\limits_{r\to+\infty}\left\{\max\limits_{|z|=r}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\right\}=0$。

引理 3 [6]：若 $\psi_j(z)\,(j=1,2,\cdots,k)$ 为区域 D 上 k 个亚纯函数，且 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k$ 线性无关，那么 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k$ 的 Wronskian 行列式

$$W\left(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k\right)\triangleq\begin{vmatrix}\psi_1 & \cdots & \psi_k\\ \psi_1' & \cdots & \psi_k'\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \psi_1^{(k-1)} & \cdots & \psi_k^{(k-1)}\end{vmatrix}\neq 0.$$

引理 4：若非常数亚纯函数 $f(z),g(z),h(z),w(z)$ 无公共单级极点，且 $f(z),g(z),h(z),w(z)$ 满足函数方程

$$f^{15}+g^{15}+h^{15}+w^{15}=1, \tag{2}$$

令

$$\tau=\begin{vmatrix}f^3 & g^3 & h^3 & w^3\\ f^2f' & g^2g' & h^2h' & w^2w'\\ 14f\left(f'\right)^2+f^2f'' & 14g\left(g'\right)^2+g^2g'' & 14h\left(h'\right)^2+h^2h'' & 14w\left(w'\right)^2+w^2w''\\ L_3(f) & L_3(g) & L_3(h) & L_3(w)\end{vmatrix},$$

其中 $L_3(\mu)=182\left(\mu'\right)^3+42\mu\mu'\mu''+\mu^2\mu'''$，($\mu$ 为非常数亚纯函数)。

则 τ 是整函数。

引理 4 的证明：

因为非常数亚纯函数 f,g,h,w 满足函数方程(2)，则 $f^{15},g^{15},h^{15},w^{15}$ 线性无关。事实上，若 $f^{15},g^{15},h^{15},w^{15}$ 线性相关，则 f,g,h,w 中至少有一个为常数函数，矛盾。结合引理 3，则有：

$$W\left(f^{15},g^{15},h^{15},w^{15}\right)=\begin{vmatrix}f^{15} & g^{15} & h^{15} & w^{15}\\ 15f^{14}f' & 15g^{14}g' & 15h^{14}h' & 15w^{14}w'\\ L_1(f) & L_1(g) & L_1(h) & L_1(w)\\ L_2(f) & L_2(g) & L_2(h) & L_2(w)\end{vmatrix}=3375f^{12}g^{12}h^{12}w^{12}\tau\neq 0 \tag{3}$$

其中 $L_1(\mu)=210\mu^{13}\left(\mu'\right)^2+15\mu^{14}\mu''$；$L_2(\mu)=2730\mu^{12}\left(\mu'\right)^3+630\mu^{13}\mu'\mu''+15\mu^{14}\mu'''$，(其中 μ 为非常数亚纯函数)。

故 $\tau\neq 0$。此外，结合函数方程 $f^{15}+g^{15}+h^{15}+w^{15}=1$ 以及伏朗斯基行列式的特点可得到：

$$\begin{aligned}W\left(f^{15},g^{15},h^{15},w^{15}\right)&=\begin{vmatrix}15g^{14}g' & 15h^{14}h' & 15w^{14}w'\\ L_1(g) & L_1(h) & L_1(w)\\ L_2(g) & L_2(h) & L_2(w)\end{vmatrix}\\ &=3375g^{12}h^{12}w^{12}\begin{vmatrix}g^2g' & h^2h' & w^2w'\\ 14g\left(g'\right)^2+g^2g'' & 14h\left(h'\right)^2+h^2h'' & 14w\left(w'\right)^2+w^2w''\\ L_3(g) & L_3(h) & L_3(w)\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $L_3(\mu)=182\left(\mu'\right)^3+42\mu\mu'\mu''+\mu^2\mu'''$，(其中 μ 为非常数亚纯函数)。

由(3)、(4)可得

$$\tau=\frac{1}{f^{12}}\begin{vmatrix}g^2g' & h^2h' & w^2w'\\ 14g\left(g'\right)^2+g^2g'' & 14h\left(h'\right)^2+h^2h'' & 14w\left(w'\right)^2+w^2w''\\ L_3(g) & L_3(h) & L_3(w)\end{vmatrix} \tag{5}$$

同理，可得：

$$\tau=\frac{1}{g^{12}}\begin{vmatrix} f^2f' & h^2h' & w^2w' \\ 14f\left(f'\right)^2+f^2f'' & 14h\left(h'\right)^2+h^2h'' & 14w\left(w'\right)^2+w^2w'' \\ L_3\left(f\right) & L_3\left(h\right) & L_3\left(w\right) \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$\tau=\frac{1}{h^{12}}\begin{vmatrix} f^2f' & g^2g' & w^2w' \\ 14f\left(f'\right)^2+f^2f'' & 14g\left(g'\right)^2+g^2g'' & 14w\left(w'\right)^2+w^2w'' \\ L_3\left(f\right) & L_3\left(g\right) & L_3\left(w\right) \end{vmatrix} \tag{7}$$

$$\tau=\frac{1}{w^{12}}\begin{vmatrix} f^2f' & g^2g' & h^2h' \\ 14f\left(f'\right)^2+f^2f'' & 14g\left(g'\right)^2+g^2g'' & 14h\left(h'\right)^2+h^2h'' \\ L_3\left(f\right) & L_3\left(g\right) & L_3\left(h\right) \end{vmatrix} \tag{8}$$

实际上，因为定义的$\tau(z)$为涉及f,g,h,w的行列式，则若$\tau(z)$有极点，其极点只会在f,g,h,w的极点处产生，设z_∞为$f(z),g(z),h(z),w(z)$的m,n,p,q重极点，设f,g,h,w在z_∞处的洛朗展开式为

$$f(z)=\frac{A}{(z-z_\infty)^m}(1+o(1)),\ g(z)=\frac{B}{(z-z_\infty)^n}(1+o(1)),$$

$$h(z)=\frac{C}{(z-z_\infty)^p}(1+o(1)),\ w(z)=\frac{D}{(z-z_\infty)^q}(1+o(1)),$$

由(2)式成立可知，若继设$\max\{m,n,p,q\}=m$，根据等式两边对称性，则f,g,h,w中至少有两个亚纯函数的极点重数是相同的，不妨设$\max\{m,n,p,q\}=m=n\ge p\ge q$。根据(5)式，

$$\tau=\frac{g^2g'h^2h'w^2w'}{f^{12}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 14\frac{g'}{g}+\frac{g''}{g'} & 14\frac{h'}{h}+\frac{h''}{h'} & 14\frac{w'}{w}+\frac{w''}{w'} \\ L_4(g) & L_4(h) & L_4(w) \end{vmatrix}, \tag{9}$$

其中$L_4(\mu)=182\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2+42\frac{\mu''}{\mu}+\frac{\mu'''}{\mu'}$，(其中$\mu$为非常数亚纯函数)。

而行列式

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 14\frac{g'}{g}+\frac{g''}{g'} & 14\frac{h'}{h}+\frac{h''}{h'} & 14\frac{w'}{w}+\frac{w''}{w'} \\ L_4(g) & L_4(h) & L_4(w) \end{vmatrix}\\ &=\left\{\left[\left(14\frac{h'}{h}+\frac{h''}{h'}\right)-\left(14\frac{g'}{g}+\frac{g''}{g'}\right)\right]\left[\left(182\left(\frac{w'}{w}\right)^2+42\frac{w''}{w}+\frac{w'''}{w'}\right)-\left(182\left(\frac{g'}{g}\right)^2+42\frac{g''}{g}+\frac{g'''}{g'}\right)\right]\right.\\ &\quad\left.-\left[\left(14\frac{w'}{w}+\frac{w''}{w'}\right)-\left(14\frac{g'}{g}+\frac{g''}{g'}\right)\right]\left[\left(182\left(\frac{h'}{h}\right)^2+42\frac{h''}{h}+\frac{h'''}{h'}\right)-\left(182\left(\frac{g'}{g}\right)^2+42\frac{g''}{g}+\frac{g'''}{g'}\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{10}$$

通过代换 f,g,h,w 的洛朗展开式进行运算可得，上面的行列式实际可以表示为 $\dfrac{3375\left(nq^2-np^2-pq^2+qp^2+pn^2-qn^2\right)}{\left(z-z_\infty\right)^3}\left(1+o(1)\right)$，同样通过代换 f,g,h,w 的洛朗展开式计算可得到 $\dfrac{g^2g'h^2h'w^2w'}{f^{12}}=R\left(z-z_\infty\right)^{12m-3(n+p+q+1)}\left(1+o(1)\right)$(其中 $R=\dfrac{-B^3C^3D^3npq}{A^{12}}$ 是常数)，从而由(9)式可知，当

$$12m-3\left(n+p+q+1\right)\geq 3 \tag{*}$$

时，z_∞ 不是 τ 的极点。下面我们将分类讨论如下：

I) 若 $m=n=p=q\geq 2$，

易见此情况下满足(*)式，故此时 z_∞ 不是 τ 的极点。

II) 若 $m=n=p>q>1$，

此情况下 $q\geq 2,m\geq 3$，也是符合(*)式，故此时 z_∞ 不是 τ 的极点。

III) 若 $m=n>p\geq q\geq 1$，

此情况下 $q\geq 1,p\geq 1,m\geq 2$，也是符合(*)式，故此时 z_∞ 不是 τ 的极点。

IV) $m=n\geq p>q\geq 1$，

此情况下 $q\geq 1,p\geq 2,m\geq 2$，符合(*)式，故此时 z_∞ 不是 τ 的极点。

V) $m=n\geq p>q=0$，

即在 z_∞ 处函数 $g(z)$ 解析而另外三个函数不解析，该情况下 $q=0,p\geq 1,m=n\geq 1$，显然符合(*)式，故此时 z_∞ 不是 τ 的极点。

VI) $m=n=p=q=1$，

不妨设 $z_\infty=0$ 为 $f(z),g(z),h(z),w(z)$ 的公共单级极点，则 $f(z),g(z),h(z),w(z)$ 在 0 处的洛朗展开式为

$$f(z)=\frac{A}{z}+A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+O\left(z^4\right),\quad g(z)=\frac{B}{z}+B_0+B_1z+B_2z^2+B_3z^3+O\left(z^4\right),$$

$$h(z)=\frac{C}{z}+C_0+C_1z+C_2z^2+C_3z^3+O\left(z^4\right),\quad w(z)=\frac{D}{z}+D_0+D_1z+D_2z^2+D_3z^3+O\left(z^4\right)。$$

通过计算可知(10)式在公共单级极点处可能产生一阶极点，从而 τ 在公共单级极点 $z_\infty=0$ 处可能不解析。

综上所述，若非常数亚纯函数 $f(z),g(z),h(z),w(z)$ 无公共单级极点，则 τ 为整函数，引理 4 得证。

3. 定理 1 的证明

记 $\tau(z)$ 为引理 4 中所定义的行列式，由引理 4 的证明过程知 $\tau(z)\neq 0$，且由(5)、(6)、(7)、(8)可得

$$\tau^4=\frac{1}{(fghw)^3}\begin{vmatrix}\frac{g'}{g} & \frac{h'}{h} & \frac{w'}{w}\\ L_5(g) & L_5(h) & L_5(w)\\ L_6(g) & L_6(h) & L_6(w)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{f'}{f} & \frac{h'}{h} & \frac{w'}{w}\\ L_5(f) & L_5(h) & L_5(w)\\ L_6(f) & L_6(h) & L_6(g)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{f'}{f} & \frac{g'}{g} & \frac{w'}{w}\\ L_5(f) & L_5(g) & L_5(w)\\ L_6(f) & L_6(g) & L_6(w)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{f'}{f} & \frac{g'}{g} & \frac{h'}{h}\\ L_5(f) & L_5(g) & L_5(h)\\ L_6(f) & L_6(g) & L_6(h)\end{vmatrix}$$

其中 $L_5(\mu)=14\left(\dfrac{\mu'}{\mu}\right)^2+\dfrac{\mu''}{\mu}$；$L_6(\mu)=182\left(\dfrac{\mu'}{\mu}\right)^3+42\dfrac{\mu'}{\mu}\cdot\dfrac{\mu''}{\mu}+\dfrac{\mu'''}{\mu}$($\mu$ 为非常数亚纯函数)。

从而有

$$\tau^{15}=\frac{\tau^{3}}{(fghw)^{9}}\begin{vmatrix}\frac{g'}{g} & \frac{h'}{h} & \frac{w'}{w}\\ L_5(g) & L_5(h) & L_5(w)\\ L_6(g) & L_6(h) & L_6(w)\end{vmatrix}^{3}\cdot\begin{vmatrix}\frac{f'}{f} & \frac{h'}{h} & \frac{w'}{w}\\ L_5(f) & L_5(h) & L_5(w)\\ L_6(f) & L_6(h) & L_6(g)\end{vmatrix}^{3}$$
$$\cdot\begin{vmatrix}\frac{f'}{f} & \frac{g'}{g} & \frac{w'}{w}\\ L_5(f) & L_5(g) & L_5(w)\\ L_6(f) & L_6(g) & L_6(w)\end{vmatrix}^{3}\cdot\begin{vmatrix}\frac{f'}{f} & \frac{g'}{g} & \frac{h'}{h}\\ L_5(f) & L_5(g) & L_5(h)\\ L_6(f) & L_6(g) & L_6(h)\end{vmatrix}^{3} \qquad (**)$$

因为非常数亚纯函数 $f(z),g(z),h(z),w(z)$ 满足费马型函数方程(2)，所以 $\rho_f=\rho_g=\rho_h=\rho_w$，又 $\min\{\rho_f,\rho_g,\rho_h,\rho_w\}<\frac{1}{2}$，所以有 $\rho_f=\rho_g=\rho_h=\rho_w<\frac{1}{2}$，下面分两种情况来讨论：

情况一：若非常数亚纯函数 $f(z),g(z),h(z),w(z)$ 无公共单级极点，则采用反证法，假设函数方程(2)存在级小于 $\frac{1}{2}$ 的非常数亚纯函数解，根据引理 1 知

$$\rho_f=\rho_{f'}=\rho_{f''}=\rho_{f'''},\rho_g=\rho_{g'}=\rho_{g''}=\rho_{g'''},$$
$$\rho_h=\rho_{h'}=\rho_{h''}=\rho_{h'''},\rho_w=\rho_{w'}=\rho_{w''}=\rho_{w'''}。$$

于是 $\max\{\rho_f,\cdots,\rho_{f'''},\rho_g,\cdots,\rho_{g'''},\rho_h,\cdots,\rho_{h'''},\rho_w,\cdots,\rho_{w'''}\}<\frac{1}{2}$，又根据引理 2 和(**)式有

$$\lim_{r\to\infty}\max|\tau(z)|^{4}\le\lim_{r\to\infty}\max_{|z|=r}(14\times182)^{12}\left(\left|\frac{f'}{f}\right|+\left|\frac{f''}{f'}\right|+\left|\frac{f'''}{f''}\right|+\left|\frac{g'}{g}\right|\right.$$
$$\left.+\left|\frac{g''}{g'}\right|+\left|\frac{g'''}{g''}\right|+\left|\frac{h'}{h}\right|+\left|\frac{h''}{h'}\right|+\left|\frac{h'''}{h''}\right|+\left|\frac{w'}{w}\right|+\left|\frac{w''}{w'}\right|+\left|\frac{w'''}{w''}\right|\right)^{12}=0$$

再结合引理 4 的结论知 τ 为整函数，则 $\tau(z)=0$，这与 $\tau(z)\neq0$ 矛盾。

情况二：若非常数亚纯函数 $f(z),g(z),h(z),w(z)$ 仅有一个公共单级极点 z_0，不妨设 $z_0=0$，由函数方程(2)有 $f^{15}(z^2)+g^{15}(z^2)+h^{15}(z^2)+w^{15}(z^2)=1$ 成立，兹令

$$F(z)=f(z^2),G(z)=g(z^2),H(z)=h(z^2),W(z)=w(z^2)$$

则有 $F^{15}(z)+G^{15}(z)+H^{15}(z)+W^{15}(z)=1$，且 $\rho_F=\rho_G=\rho_H=\rho_W=2\rho_f<2\times\frac{1}{2}=1$，而非常数亚纯函数 $f(z),g(z),h(z),w(z)$ 仅有一个公共单重极点 0，则 $F(z),G(z),H(z),W(z)$ 无公共单级极点，此时可转化为同情况一一样的讨论亦得出矛盾。

综上，定理 1 得证。

参考文献 (References)

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] Gundersen, G.G. (2003) Complex Functional Equations.

[3] 苏敏, 李玉华. 关于函数方程非平凡亚纯解的研究[J]. 云南师范大学学报: 自然科学版, 2009, 29(2): 44.

[4] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[5] Li, Y.H. (2000) Uniqueness Theorems for Meromorphic Functions of Order Less than One. *Northeastern Mathematical Journal*, **16**, 411-416.

[6] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.