Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(1), 47-54
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.81008

Mathieu Groups and Flag-Transitive $2\text{-}(v,k,\lambda)$ Designs

Jianan Chen, Shenglin Zhou

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 376073976@qq.com, slzhou@scut.edu.cn

Received: Jan. 3rd, 2018; accepted: Jan. 17th, 2018; published: Jan. 24th, 2018

Abstract

Flag-transitivity is one of the important conditions that can be imposed on the automorphism group of a $2\text{-}(v,k,\lambda)$ design. The classification of flag-transitive 2-designs is an important problem in the algebraic combinatorial theory. Dembowski has proved that if $G \le Aut(\mathcal{D})$ is flag-transitive and $(v-1,k-1)\le 2$, then G is also point-primitive. According to this result, in this paper we completed the classification of this type of designs, with $Soc(G)$ was one of five Mathieu groups M_i, where i =11, 12, 22, 23 or 24. We prove that there exists 62 2-designs satisfying the assumption.

Keywords

2-Design, Flag-Transitive, Socle, Mathieu Group

Mathieu群与旗传递$2\text{-}(v,k,\lambda)$设计

陈佳楠，周胜林

华南理工大学数学学院，广东 广州
Email: 376073976@qq.com, slzhou@scut.edu.cn

收稿日期：2018年1月3日；录用日期：2018年1月17日；发布日期：2018年1月24日

摘　要

旗传递性是群作用在$2\text{-}(v,k,\lambda)$设计上的重要性质之一。对满足一定条件的旗传递2-设计进行分类是一个比较有意思的问题。Dembowski已经证明了满足条件$(v-1,k-1)\le 2$的旗传递$2\text{-}(v,k,\lambda)$设计的自同

文章引用: 陈佳楠, 周胜林. Mathieu 群与旗传递 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计[J]. 理论数学, 2018, 8(1): 47-54.
DOI: 10.12677/pm.2018.81008

构群 G 是本原群。据此，本文在条件 $(v-1,k-1)\le 2$ 下，研究自同构群旗传递且其基柱 $Soc(G)$ 是五个 Mathieu 群之一时的 2-(v,k,λ) 设计的分类问题，得到了在同构意义下存在62个这样的设计。

关键词

2-设计，旗传递，基柱，Mathieu群

1. 引言

定义 1： 设 v,k,λ 为正整数，满足 $2<k<v$。一个 2-(v,k,λ) 设计或 2-设计 $\mathcal{D}$ 定义为符合以下条件的一对符号 $(\mathcal{P},\mathcal{B})$：

1) $\mathcal{P}$ 是有 v 个点的有限集，$\mathcal{P}$ 中的元素称为点；
2) $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{P}$ 中 b 个 k-子集构成的集族，$\mathcal{B}$ 的元素称为区组或区；
3) $\mathcal{P}$ 的任意给定的 2-子集都恰好包含在 $\mathcal{B}$ 的 λ 个区组之中。

由于每个区组的长度相等，易知过一个点的区组的个数是常数，设为 r。我们总假设 $\mathcal{D}$ 是单纯的，即 $\mathcal{B}$ 中的区组不允许重复出现。称 5-元组 (v,b,r,k,λ) 为设计 $\mathcal{D}$ 的参数。

旗传递设计的分类工作早在 30 多年前就已经开始了，那时的研究对象主要是旗传递的线性空间。1987 年，Davies [1]证明了旗传递且自同构群的基柱是散在单群的 2-$(v,k,1)$ 设计不存在。1990 年，Buekenhout，Delandtsheer，Doyen，Kleidman，Liebeck，Saxl [2]合作完成了旗传递线性空间的分类(一维仿射型的情况除外)。这项工作的完成激起了许多学者的兴趣。近年来，人们开始了在某些限制条件下旗传递 2-(v,k,λ) 设计分类的有关研究，这些限制条件有 $r=k$，$\lambda=2$，$(r,\lambda)=1$ 等等[3] [4] [5] [6] [7]。1998 年，P. H. Zieschang [7]证明了旗传递且 $(r,\lambda)=1$ 的 2-(v,k,λ) 设计的自同构群是仿射型或者几乎单的；2013 年，田德路和周胜林[8]完成了本原自同构群且基柱是散在单群的旗传递对称设计的分类问题。

本文研究了旗传递 2-设计当 $(v-1,k-1)\le 2$ 且自同构群 G 的基柱 $Soc(G)$ 为五个 Mathieu 群之一时的分类问题，得到下述结果：

定理 1： 设 $\mathcal{D}$ 是一个满足 $(v-1,k-1)\le 2$ 的 2-(v,k,λ) 设计，$G\le Aut(G)$ 是旗传递的且 $Soc(G)$ 是五个 Mathieu 群 $M_i\,(i=11,12,22,23,24)$ 之一。则在同构意义下存在 62 个 2-设计 $\mathcal{D}_i\,(1\le i\le 62)$，它们对应的参数 (v,b,r,k,λ)，自同构群 G，如表 1 和表 2 所示。

下面给出本文常用的几个引理。

引理 1 [9]： 若 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ 是一个 2-(v,k,λ) 设计。则下面式子成立：

1) $bk=vr$；
2) $\lambda(v-1)=r(k-1)$；
3) $b\ge v$。

引理 2 [10]： 设 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ 是一个 2-(v,k,λ) 设计，$G\le Aut(G)$，则对任意的 $\alpha\in\mathcal{P}$ 和 $B\in\mathcal{B}$，G 旗传递当且仅当下列条件之一成立：

1) G 是点－传递的，并且 G_α 在 $\mathcal{P}(\alpha)$ 上传递,，其中 $\mathcal{P}(\alpha)$ 表示所有过点 α 的区组；

Table 1. 54 designs and parameters with $(v-1,k-1)=1$

表 1. $(v-1,k-1)=1$ 时的 54 个设计及参数

$\mathcal{D}_i$	$(\lvert G\rvert/b, v, b, r, k, \lambda)$	G
1	(12, 12, 660, 330, 6, 150)	M_{11}
2	(24, 12, 330, 110, 4, 30)	
3	(36, 12, 220, 110, 6, 50)	
4	(48, 12, 165, 55, 4, 15)	
5	(48, 12, 165, 110, 8, 70)	
6	(60, 12, 132, 55, 5, 20)	
7	(72, 12, 110, 55, 6, 25)	
8	(120, 12, 792, 396, 6, 180)	M_{12}
9	(360, 12, 264, 132, 6, 60)	
10	(720, 12, 132, 66, 6, 30)	
11	(720, 12, 132, 88, 8, 56)	
12	(720, 12, 132, 99, 9, 72)	
13	(48, 22, 9240, 2520, 6, 600)	M_{22}
14	(72, 22, 6160, 2520, 9, 960)	
15	(72, 22, 6160, 3360, 12, 1760)	
16	(120, 22, 3696, 840, 5, 160)	
17	(168, 22, 2640, 1680, 14, 1040)	
18	(192, 22, 2310, 1260, 12, 660)	
19	(360, 22, 1232, 336, 6, 80)	
20	(660, 22, 672, 336, 11, 160)	
21	(720, 22, 616, 336, 12, 176)	
22	(960, 22, 462, 105, 5, 20)	
23	(1344, 22, 330, 210, 14, 130)	
24	(5760, 22, 77, 21, 6, 5)	
25	(24, 22, 9240, 2520, 6, 600)	$M_{22}:2$
26	(36, 22, 6160, 2520, 9, 960)	
27	(36, 22, 6160, 3360, 12, 1760)	
28	(96, 22, 2310, 1260, 12, 660)	
29	(48, 23, 212520, 73920, 8, 23520)	M_{23}
30	(120, 23, 85008, 36960, 10, 15120)	
31	(144, 23, 70840, 27720, 9, 10080)	
32	(336, 23, 30360, 18480, 14, 10920)	
33	(720, 23, 14168, 3696, 6, 840)	
34	(720, 23, 14168, 6160, 10, 2520)	
35	(1344, 23, 7590, 4620, 14, 2730)	

Continued

36	(5760, 23, 1771, 462, 6, 105)	
37	(7920, 23, 1288, 616, 11, 280)	
38	(20160, 23, 506, 176, 8, 56)	
39	(40320, 23, 253, 176, 16, 120)	
40	(240, 24,1020096, 510048, 12, 243936)	M_{24}
41	(384, 24, 637560, 212520, 8, 64680)	
42	(384, 24,637560, 318780,12, 152460)	
43	(384, 24, 637560, 425040, 16, 277200)	
44	(432, 24, 566720, 212520, 9, 73920)	
45	(1440, 24, 170016, 70840, 10, 27720)	
46	(2160, 24, 113344, 28336, 6, 6160)	
47	(2160, 24, 113344, 85008, 18, 62832)	
48	(2688, 24, 91080, 45540, 12, 21780)	
49	(6912, 24, 35420, 17710, 12, 8470)	
50	(11520, 24, 21252, 5313, 6, 1155)	
51	(20160, 24, 12144, 7590, 15, 4620)	
52	(40320, 24, 6072, 1771, 7, 462)	
53	(322560, 24, 759, 253, 8, 77)	
54	(322560, 24, 759, 506, 16, 330)	

Table 2. 8 designs and parameters with $(v-1,k-1)=2$

表 2. $(v-1,k-1)=2$ 时的 8 个设计及参数

$\mathcal{D}_i$	$(\lvert G\rvert/b,v,b,r,k,\lambda)$	G
55	(20, 11, 396, 180,5, 72)	M_{11}
56	(120, 11, 66, 30, 5, 12)	
57	(360, 23, 28336, 6160, 5, 1120)	M_{23}
58	(660, 23, 15456, 7392, 11, 3360)	
59	(1920, 23, 5313, 1155, 5, 210)	
60	(2520, 23, 4048, 1232, 7, 336)	
61	(2520, 23, 4048, 2640, 15, 1680)	
62	(40320, 23, 253, 77, 7, 21)	

2) G 是区－传递的，并且 G_B 在区组 B 上传递。

定理 2 [11]：传递群 G 的正规子群 $N\neq 1$ 是半传递的。

定理 3 [11]：设 $k=1,2,\cdots$，每个 k 重传递群是 $k-1/2$ 重传递的，每个 $k+1/2$ 重传递是 k 重传递的而且每个以它为子群的群也是 k 重传递的(但不一定是 $k+1/2$ 重传递的)。

引理 3 [12]：设 G 是几乎单型的有限本原置换群。若 G 作用在 Ω 上 3/2-传递，则下列之一成立：

1) G 在 Ω 上是 2-传递的；

2) $n=21$ 且 G 是 A_7 或 S_7 作用在集合 $\{1,2,\cdots,7\}$ 的无序二元组上；且非平凡的次级数为 10。

引理 4 [6]：设 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(v,k,λ) 且 $G \le Aut(G)$ 是旗传递的，则下列成立：

1) $r^2 > \lambda v \ge v$；

2) $r \mid |G_\alpha|$，G_α 是 G 的点稳定子群，$|G_\alpha|^3 > |G|$；

3) $r \mid \lambda d$，其中 d 表示 G 的任一非平凡次轨道长度。特别地，$\frac{r}{(r,\lambda)} \mid d$。

证明：1) 由 Fisher-不等式，$bk = vr$，$b \ge v$，所以有 $r \ge k$；

又 $\lambda(v-1) = r(k-1)$，即 $\lambda v - \lambda + r = rk$，$v \le \lambda v < \lambda v - \lambda + r = rk \le r^2$；

2) 由上式和引理 2，我们有 $r \mid |G_\alpha|$，所以 $r \le |G_\alpha|$，$v < r^2 \le |G_\alpha|^2$，又 $v = |G:G_\alpha|$，所以 $|G| < |G_\alpha|^3$；

3) 设 $\alpha \in \mathcal{P}$，G_α 的一个非平凡轨道为 Γ，长度为 d。令 B 是过点 α 的一个区组，$m = |\Gamma \cap B|$。因为 G 是旗传递的，所以 m 与 B 的选取无关。我们用两种不同的方法计数旗 (β, B)，$\beta \in \Gamma$，$\alpha \in B$，即得 $rm = \lambda|\Gamma|$。所以，$r \mid \lambda d$。

引理 5：设 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(v,k,λ) 且 $G \le Aut(G)$ 是旗传递的，若 $(v-1,k-1) \le 2$，则 G 是点本原的。特别地，G 是 2-传递或是 3/2-传递且为秩 3 的本原群。

证明：由引理 1 知 $\frac{\lambda}{(r,\lambda)}(v-1) = \frac{r}{(r,\lambda)}(k-1)$。下面我们分两种情况来证明：

当 $(v-1,k-1)=1$ 时，$(v-1) \mid \frac{r}{(r,\lambda)}$，由引理 4 可知 $\frac{r}{(r,\lambda)} \mid d$，所以 $(v-1) \mid d$，$(v-1) \le d$。又 d 是 G 的非平凡轨道长，显然 $(v-1) \ge d$，即 $d = v-1$，从而 G_α 在 $\Omega - \alpha$ 上传递，所以 G 在 Ω 上 2-传递。

当 $(v-1,k-1)=2$ 时，$\frac{v-1}{2} \mid \frac{r}{(r,\lambda)} \mid d$，所以 $d = \frac{v-1}{2}$ 或者 $d = v-1$。如果 $d = v-1$，那么 G 在 Ω 上 2-传递。如果 $d = \frac{v-1}{2}$，那么 G 是 Ω 上 3/2-传递秩 3 群。下证 G 必定是本原的。当 G 2-传递时，显然是本原的。当 G 3/2-传递秩 3 群，假设 G 是非本原的，则存在非本原块 Δ 使得 $\alpha \in \Delta$，$1 < |\Delta| < n$。但 Δ 是 G_α 的一些轨道的并。设 G_α 的轨道为 $\{\alpha\}$，Δ_1，Δ_2，其中 $|\Delta_1| = |\Delta_2| = \frac{n-1}{2}$，则 $\Delta = \alpha \cup \Delta_1$ 或 $\Delta = \alpha \cup \Delta_2$，此时 $|\Delta| = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$，而 $\frac{n+1}{2} \nmid n$，所以 G 是本原的。

2. 定理 1 的证明

2.1. 可能的参数

首先，由引理 5 可知，当 $(v-1,k-1) \le 2$ 时，G 是点本原的，且是 2-传递或者是 3/2-传递的。又由引理 3 知 Mathieu 群不可能 3/2-传递地作用在 2-设计上，所以我们只需考虑 2-传递的群的情况即可。

设 $G = M_i\,(i = 11,12,22,23,24)$，为使得设计是非完全的，那么必有 $k \ge 5$。需要知道的是，M_{11} 作用在 12 个点上是 3-传递的，M_{12} 作用在 12 个点上是 5-传递的，M_{22} 作用在 22 个点上是 3-传递的，M_{23} 作用在 23 个点上是 4-传递的，M_{24} 作用在 24 个点上是一个 5-传递的，$M_{22}:2$ 作用在 22 个点上是 3-传递的。

因此，由引理 1 和引理 4，我们知道，设计的参数必须满足下列 4 个条件：

1) $r \mid |G_\alpha|$ 且 $(v-1,k-1) \le 2$；

2) $b = vr/k$ 是一个整数；

3) $r \ge k$ 且 $C_v^k > b$；

4) $\lambda = r(k-1)/(v-1)$ 是一个整数。

根据这四个条件，利用计算机软件 GAP [13]及下面的程序可以算出 2104 组可能的参数。

算法程序 1：

```
design:=function (v,G)
local lambda,r,b,k,results;
results:=[];
   for k in [5..v-2] do
if not IsInt(G/k) or Gcd(v-1,k-1)>2    then continue;fi;
               for r in    DivisorsInt(G/v)    do b=v*r/k;
                     if    r < k or not IsInt(b) or Binomial(v,k)<=b then continue;fi;
                     lambda:=r*(k-1)/(v-1);
                     if not IsInt(lambda) then continue;fi;
          Add(results,[G/b,v,b,r,k,lambda]);od;od;
return results;
end;
```

2.2. 参数的分析

接下来，我们对找出来的 2104 个参数进行分析。设 G 和 $\mathcal{D}$ 满足定理 1 的假设条件，由引理 2 可知，G 是区传递的。由此，对于任意的 $\alpha\in B$，$B\in\mathcal{B}$，我们有 $|G:G_\alpha|=|\alpha^G|=v$，$|G_\alpha:G_{\alpha\beta}|=|B^{G_\alpha}|=r$，$|G:G_B|=b$，即 G 有指数为 b 的子群。又因为 G_B 在 B 上是点传递的，所以 B 是 G_B 作用在 P 上的一个长为 k 的轨道，并且至少存在上述轨道使得 G 作用在其上的轨道长度为 b。综上所述，如果 G 是一个旗传递 2-设计 $\mathcal{D}$ 的自同构群，则下列四个条件依次成立：

1) G 中至少存在一个指数为 b 的子群；
2) 符合 1)的子群中至少存在一个长为 k 的轨道 O；
3) G 作用在符合 2)的轨道中，至少有一个长度 $|O^G|=b$；
4) 设计 $\mathcal{D}$ 的区组必定是 3)中某一个 O^G。

通过在 Magma [14]命令 $Subgroup(G:OrderEqual:=n)$，这里 $n=|G|/b$，即可得到 G 的指数为 b 的所有子群共轭类。由此可知，有 1451 个参数组对应的设计的自同构群不存在与之对应的指数为 b 的子群，剩下 653 个参数。根据条件 2) 3)并通过命令 $Oribits(H)$ 和 $\#(O^G)$，我们剔除 591 个不满足条件的参数组，剩下 62 个参数。最后，我们利用命令 $Design\langle 2,v|G\rangle$ 检验剩余参数组是否是相应的 2-设计。

由此，我们得到了 62 个设计如表 1 和表 2，分别是当 $(v-1,k-1)=1$ 和 $(v-1,k-1)=2$ 时的情形。

2.3. 示例

以搜索 M_{11} 作用在 11 个点上的设计为例，因为它是一个 4-传递群，所以 $k\geq 5$，由于设计必须满足前文中的四个条件，因此由算法程序 1 可以找到 14 个设计参数组 $(|G|/b,v,b,r,k,\lambda)$：

$$(60,11,132,60,5,24),(240,11,33,15,5,6),(20,11,396,180,5,72),$$
$$(45,11,176,80,5,32),(80,11,99,45,5,18),(30,11,264,120,5,48),$$
$$(40,11,198,90,5,36),(90,11,88,40,5,16),(120,11,66,30,5,12),$$
$$(144,11,55,40,8,28),(180,11,44,20,5,8),(720,11,11,5,5,2),$$
$$(72,11,110,80,8,56),(360,11,22,10,5,4).$$

显然，区稳定子群 G_B 的阶只能是下面情形之一：

$$20,30,40,45,60,72,80,90,120,144,180,240,360,720.$$

利用其中至少存在一个指数为 b 的子群 $Subgroups(G:OrderEqual:=r)$，可以知道符合的 $|G|/b$ 的值有 7 种可能:20，60，72，120，144，360 或 720，它们对应的七个参数组 $(|G|/b,v,b,r,k,\lambda)$ 分别是：

$$\begin{aligned}&(20,11,396,180,5,72),(60,11,132,60,5,24),(360,11,22,10,5,4),\\&(120,11,66,30,5,12),(144,11,55,40,8,28),(720,11,11,5,5,2),\\&(72,11,110,80,8,56).\end{aligned}$$

在此基础上，以参数组(20, 11, 396, 180, 5, 72)为例来讨论设计的存在性。指数为 396 的 M_{11} 的子群共轭类轨道有三个：其长度为 1，5 和 5。由于 G 在 $\mathcal{B}$ 上传递，故应存在一个指数为 b 的子群 G_B，又由于 G_B 在 B 上传递，故 G_B 应存在一个长为 $|B|=k$ 的轨道，选取 G_B 轨道中长度为 5 的轨道

$$O_2=\{2,4,6,7,11\},\quad O_3=\{3,5,8,9,10\}.$$

计算发现 $|O_3^G|=66\neq 396$，矛盾。$|O_2^G|=396$，利用 Magma 命令 $Design\langle 2,11|O_2^G\rangle$ 计算发现，此时 $\mathcal{D}$ 为一个 2-(11, 5, 72)设计，所以参数组(20, 11, 396, 180, 5, 72)确实是我们要找的符合条件的参数，对应于表一的 $\mathcal{D}_1$。

致　谢

本论文在写作过程中就算法方面与詹小秦博士进行了有益的讨论，在此表示感谢！论文还得到广东省自然科学基金的资助。

基金项目

广东省自然科学基金(编号：2017A030313001)。

参考文献 (References)

[1] Davies, H. (1987) Flag-Transitivity and Primitivity. *Discrete Mathematics*, **63**, 91-93. https://doi.org/10.1016/0012-365X(87)90154-3

[2] Buekenhout, F., Delandtsheer, A., Doyen, J., *et al*. (1990) Linear Space with Flag-Transitive Automorphism Groups. *Geometriae Dedicata*, **36**, 89-94.

[3] Regueiro, E.O'R. (2005) On Primitivity and Reduction for Flag-Transitive Symmetric Designs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **109**, 135-148. https://doi.org/10.1016/j.jcta.2004.08.002

[4] Regueiro, E.O'R. (2005) Biplanes with Flag-Transitive Automorphism Groups of Almost Simple Type, with Alternating or Sporadic Socle. *European Journal of Combinatorics*, **26**, 577-584. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2004.05.003

[5] Regueiro, E.O'R. (2008) Biplanes with Flag-Transitive Automorphism Groups of Almost Simple Type, with Exceptional Socle of Lie Type. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **27**, 479-491. https://doi.org/10.1007/s10801-007-0098-8

[6] Zhan, X.Q. and Zhou, S.L. (2016) Flag-Transitive Non-Symmetric 2-Designs with $(r,\lambda)=1$ and Sporadic Scole. Des. Codes Cryptogr.

[7] Zieschang, P.H. (1998) Flag Transitive Automorphism Groups of 2-Designs with $(r,\lambda)=1$. *Journal of Algebra*, **118**, 265-275.

[8] Tian, D.L. and Zhou, S.L. (2015) Flag-Transitive $2\text{-}(v,k,\lambda)$ Symmetric Designs with Sporadic Socle. *The Journal of Combinatorial Designs*, **23**, 140-150. https://doi.org/10.1002/jcd.21385

[9] Amderson, I. and Honkala, I. (1997) A Short Course in Combinatorial Designs. Internet Edition.

[10] Dembowski, P. (1968) Finite Geometries. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-642-62012-6

[11] Wielandt, H. (1964) Finite Permutation Groups. Academic Press, New York.

[12] Bamberg, J., Giudici, M., Liebeck, M.W., Praeger, C.E. and Saxl, J. (2013) The Classification of Almost Simple 3/2-Transititive Groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, **365**, 4257-4311. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2013-05758-3

[13] The GAP-Group, GAP-Groups, Algorithms, and Programming. (2005) Version 4.4.

[14] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The Use Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125