Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(2), 121-125
Published Online March 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.82015

Bäcklund Transformation and Several Types of KdV Equations

Xiaoyin Guo, Zhong Wang, Fenyi Xue, Linge Yang, Dehao Zhou

School of Mathematics and Big Data, Foshan University, Foshan Guangdong
Email: wangzh79@mail2.sysu.edu.cn

Received: Feb. 20th, 2018; accepted: Mar. 5th, 2018; published: Mar. 12th, 2018

Abstract

In this paper, we investigate Bäcklund transformations of several types of KdV equations. We obtain the solitary wave solutions of a new type KdV equation and a fifth-order KdV equation with the help of Bäcklund transformations.

Keywords

Bäcklund Transformation, KdV Equation, Soliton

贝克隆变换与几类KdV型方程

郭晓茵，王　忠，薛汾仪，杨灵娥，周德浩

佛山科学技术学院，大数据学院，广东 佛山
Email: wangzh79@mail2.sysu.edu.cn

收稿日期：2018年2月20日；录用日期：2018年3月5日；发布日期：2018年3月12日

摘　要

本文研究了几类KdV型方程之间的贝克隆变换。通过贝克隆变换，本文求得了一类新型KdV方程和一类五阶KdV方程的孤立子解。

关键词

贝克隆变换，KdV方程，孤立子

文章引用: 郭晓茵, 王忠, 薛汾仪, 杨灵娥, 周德浩. 贝克隆变换与几类 KdV 型方程[J]. 理论数学, 2018, 8(2): 121-125.
DOI: 10.12677/pm.2018.82015

1. 引言

贝克隆变换作为一种求解非线性发展方程的有效方法一直引起研究者们的广泛关注[1]-[6]，它使求解方程的问题转变成纯代数的运算。贝克隆变换在孤立子理论中有广泛的应用，最近研究者们利用贝克隆变换，求出 mKdV 方程的呼吸子解，并证明其渐近稳定性[7]，显示其在证明孤子方程解的动力学行为上也有重要作用。

本文将研究几类 KdV 型方程的贝克隆变换，它们分别为经典的 KdV 方程和 mKdV 方程，以及一类新型的 KdV 方程和两类五阶 KdV 方程。通过贝克隆变换，我们求得新型的 KdV 方程和五阶 mKdV 方程的孤立子解。本文安排如下：第二小节我们给出贝克隆变换的定义；第三节我们给出几类经典 KdV 方程之间的贝克隆变换，并通过变换求出其孤立子解；第四小节我们推广了经典的 Miura 变换，我们得出了两类五阶 KdV 方程的贝克隆变换，并求出它们的孤立子解。

2. 贝克隆变换的定义

我们回忆[2]中的贝克隆定义： 考虑如下非线性发展方程

$$u_t = K(u)$$

其中未知函数 u 依赖于独立变量 x 和 t，对固定的 t，$u(t,x) \in S(\mathbb{R}^n)$，$S(\mathbb{R}^n)$ 为 Schwartz 空间。记另一非线性发展方程如下

$$v_t = G(v)\text{，对固定的 } t\text{，} u(t,x) \in S(\mathbb{R}^n)$$

贝克隆变换的定义如下：

定义： 给定两个发展方程 $u_t = K(u)$ 和 $v_t = G(v)$，则 $B(u,v)=0$ 表示上述两个方程解 $u(t,x)$ 和 $v(t,x)$ 之间的一个贝克隆变换，满足若

$$B(u(t,x),v(t,x))\big|_{t=0} = 0\text{，则有 } B(u(t,x),v(t,x))\big|_{t=t_0} = 0,\ \forall t_0 > 0\text{。}$$

由定义可知，两个发展方程的解可由方程之间的贝克隆变换联系起来：

$$u_t = K(u) \overset{B}{\leftrightarrow} v_t = G(v)$$

3. KdV 型方程的贝克隆变换和孤立子解

本节我们讨论三种 KdV 型方程的贝克隆变换，他们分别为 KdV 方程，mKdV 方程和一种新型的 KdV 方程，它们分别如下：

$$u_t - u_{xxx} + 6uu_x = 0 \quad (\text{KdV})$$

$$v_t - v_{xxx} + 6v^2 v_x = 0 \quad (\text{mKdV})$$

$$Q_t - Q_{xxx} + 3\frac{Q_x Q_{xx}}{Q} = 0 \quad (\text{New KdV})$$

我们特别考虑上述方程的孤立子解。KdV 方程和 mKdV 方程在孤立子理论的发展中起了十分重要的

作用。1968 年，R. M. Miura [5]发现的 KdV 方程与 mKdV 方程的有如下著名的变换关系：

$$u=-v_x-v^2 \quad (\text{Miura})$$

由贝克隆变换的定义可知，Miura 变换是一种特殊的贝克隆变换。

关于第三个 KdV 方程的贝克隆变换，我们有如下结果：

命题 1： 方程(New KdV)与 mKdV 方程的贝克隆变换为：

$$v=\frac{Q_x}{Q}=(\ln Q)' \tag{1}$$

方程(New KdV)与 KdV 方程的贝克隆变换为：

$$u=-\frac{Q_{xx}}{Q} \tag{2}$$

证明： 由于我们假设解在 Schwartz 空间，直接把(1)式带入 mKdV 方程，有：

$$\left(\frac{Q_x}{Q}\right)_t-\left(\frac{Q_x}{Q}\right)_{xxx}+6\left(\frac{Q_x}{Q}\right)^2\left(\frac{Q_x}{Q}\right)_x=0$$

通过化简可得

$$\left(\frac{Q_t}{Q}\right)_x-\left[\frac{Q_{xxx}}{Q}-3\frac{Q_xQ_{xx}}{Q^2}+2\left(\frac{Q_x}{Q}\right)^3-2\left(\frac{Q_x}{Q}\right)^3\right]_x=0$$

即可得方程(New KdV)。

另一方面，用同样的方法我们可把(2)式直接带入 KdV 方程也可得到方程(New KdV)，但此时计算量比较大。我们直接用 Miura 变换，把(1)式带入得到

$$u=-\left(\frac{Q_x}{Q}\right)_x-\left(\frac{Q_x}{Q}\right)^2=-\frac{Q_{xx}Q-Q_x^2}{Q^2}-\left(\frac{Q_x}{Q}\right)^2=-\frac{Q_{xx}}{Q}$$

证毕。

我们考虑通过贝克隆变换来求得方程(New KdV)的孤立子解，为此我们先求 mKdV 方程的孤立子解。为此，我们用行波法，令

$$v(t,x)=R(x-ct)=R(\xi)\text{，其中 } c>0\text{，}\ \xi=x-ct$$

代入 mKdV 方程，

$$-cR'-R'''+6R^2R'=-cR'-R'''+\left(2R^3\right)'=0$$

关于空间变量积分一次，得到 $-cR-R''+2R^3=A$。

我们只考虑积分常数 $A=0$ 的情况，最终有 mKdV 方程的一个孤立子解

$$v(x-ct)=\sqrt{\frac{c}{2}}\tanh\left[\frac{\sqrt{c}(x-ct)}{\sqrt{2}}\right]=\sqrt{\frac{c}{2}}\tanh\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\xi\right)$$

由贝克隆变换(1)

$$v(\xi)=\sqrt{\frac{c}{2}}\tanh\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\xi\right)=\left[\ln\cosh\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\xi\right)\right]'=(\ln Q)'$$

从而我们求得方程(New KdV)的一个孤立子解如下

$$Q(x-ct)=\cosh\left(\sqrt{\frac{c}{2}}(x-ct)\right)$$

同理对积分常数 $A\neq 0$ 的情况，我们可以求得 mKdV 方程的孤立子解，再利用贝克隆变换(1)，我们可以相应的求得方程(New KdV)的孤立子解。对 KdV 方程，我们可求出其孤立子解，接着利用贝克隆变换(2)，我们也可类似求出方程(New KdV)的孤立子解。

4. 五阶 KdV 型方程的贝克隆变换和孤立子解

本节我们考虑两类五阶 KdV 方程，如下

$$u_t+u_{xxx}+6uu_x-\mu\left(u_{xxxx}+5u_x^2+10uu_x+10u^3\right)_x=0 \quad (5\text{KdV})$$

$$v_t+v_{xxx}-\frac{3}{2}v^2v_x-\mu\left(v_{xxxx}+\frac{5}{2}v_x^3+10vv_xv_{xx}+\frac{5}{2}v^3v_{xx}+\frac{15}{8}u^4u_x\right)=0 \quad (5\text{mKdV})$$

这两个方程分别属于著名的 KdV 和 mKdV 梯队方程，和 KdV 和 mKdV 方程一样，它们是完全可积系统，都具有无穷个守恒律。本节我们研究上述两个五阶 KdV 方程之间的贝克隆变换，通过变换我们求得相应的孤立子解。

关于方程(5 KdV)和方程(5 mKdV)之间的贝克隆变换，我们有

命题 2：方程(5 KdV)和方程(5 mKdV)之间的贝克隆变换为：

$$u=\frac{1}{2}v_x-\frac{1}{4}v^2 \tag{3}$$

证明：记

$$P_{\mu,u}=u_t+u_{xxx}+6uu_x-\mu\left(u_{xxxx}+5u_x^2+10uu_x+10u^3\right)_x=0$$

$$W_{\mu,v}=v_t+v_{xxx}-\frac{3}{2}v^2v_x-\mu\left(v_{xxxx}+\frac{5}{2}v_x^3+10vv_xv_{xx}+\frac{5}{2}v^3v_{xx}+\frac{15}{8}u^4u_x\right)=0$$

把(3)代入 $P_{\mu,u}$，通过计算我们发现 $P_{\mu,u}$ 和 $W_{\mu,v}$ 满足如下关系：

$$\frac{1}{2}(\partial_x-v)W_{\mu,v}=P_{\mu,u} \tag{4}$$

从而由(4)可知，

$$W_{\mu,v}=0\Rightarrow P_{\mu,u}=0$$

但反之则不正确。证毕。

我们考虑通过贝克隆变换来求方程(5 KdV)的孤立子解。方程(5 mKdV)的孤立子解也可用行波法求得如下：

$$v(t,x)=\sqrt{2c}\tanh\left[\sqrt{\frac{c}{2}}(x-\beta t)\right],\ \beta=c+\mu c^2$$

从而由贝克隆变换(3)，我们可求得方程(5 KdV)的孤立子解如下

$$u(t,x)=\frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{c}{2}}(x-\beta t)\right),\ \beta=c+\mu c^2$$

基金项目

广东省自然科学基金(2017A030310634)。

参考文献

[1] Calogero, F. and Degasperis, A. (1980) Spectral Transform and Solitons I, Studies in Mathematics and Its Application. Vol. 13, North Holland, Amsterdam.

[2] Fokas, A.S. and Fuchssteiner, B. (1981) Bäcklund Transformation for Hereditary Symmetries. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **5**, 423-432. https://doi.org/10.1016/0362-546X(81)90025-0

[3] Gu, C., Hu, H. and Zhou, Z. (2005) Darboux Transformations in Integrable Systems. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/1-4020-3088-6

[4] 郭柏灵, 庞小峰. 孤立子[M]. 北京: 科学出版社, 1987.

[5] Miura, R.M. (Ed.) (1976) Bäcklund Transformations, I.S.T. Method and Their Applications. Lecture Notes in Math., 515, Springer, Berlin.

[6] Rogers, C. and Schief, W.K. (2002) Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511606359

[7] Alejo, M.A. and Munoz, C. (2015) Dynamics of Complex-Valued Modified KdV Solitons with Applications to the Stability of Breathers. *Analysis and PDE*, **8**, 629-674. https://doi.org/10.2140/apde.2015.8.629