Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(2), 182-191
Published Online March 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.82023

Hans汉斯

Normal Families of Meromorphic Functions Sharing Values

Huating Liao, Shasha Zhang*

Hubei Key Laboratory of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan Hubei
Email: *amushasha@163.com

Received: Mar. 5th, 2018; accepted: Mar. 19th, 2018; published: Mar. 27th, 2018

Abstract

In this paper, we discuss the normality of families of meromorphic functions concerning shared values. A normal criterion for families of meromorphic functions which share values with their first derivative is given, where the shared values can be flexible with the related functions. This result generalizes a former normal criterion in which the shared values are fixed. Moreover, we study some other similar results.

Keywords

Meromorphic Functions, Shared Values, Normal Families

一类涉及分担值的亚纯函数正规族

廖华婷，张莎莎*

湖北大学数学与统计学学院，应用数学湖北省重点实验室，湖北 武汉
Email: *amushasha@163.com

收稿日期：2018年3月5日；录用日期：2018年3月19日；发布日期：2018年3月27日

摘　要

本文研究涉及分担值的亚纯函数族正规性准则。给出了一类涉及亚纯函数及其一阶导数分担值的正规族定则，其中的分担值依赖于函数族中的函数。本文的结论推广了已有的一个亚纯函数族关于固定分担值

*通讯作者。

文章引用: 廖华婷, 张莎莎. 一类涉及分担值的亚纯函数正规族[J]. 理论数学, 2018, 8(2): 182-191.
DOI: 10.12677/pm.2018.82023

的正规定则。进一步地，我们研究了其它类似的亚纯函数族正规定则。

关键词

亚纯函数，分担值，正规族

1. 引言

20 世纪初期，P. Montel 引入了正规族的概念，表示一个全纯或亚纯函数族的某种列紧性。设 F 为区域 D 内一族亚纯函数，如果函数族中任取一个函数列 $\{f_n(z), n=1,2,\cdots\}$ 都存在子序列 $\{f_{n_k}(z), k=1,2,\cdots\}$，在区域 D 中按球面距离内闭一致收敛，则称函数族 F 在区域 D 内正规([1])。

Montel 把正规族和函数的取值问题联系起来，证明了著名的 Montel 正规定则：设 F 为区域 D 内的一个亚纯函数族，a,b,c 为三个互不相等的复数，若对于任意的 $f\in F$ 有 $f\neq a, f\neq b, f\neq c$，则 F 在 D 内正规。Caratheodory 在文献[2]中把 Montel 正规定则中固定的复数推广到可随 $f\in F$ 变动的复数 a_f, b_f, c_f，两两之间的球距有一致下界 $\varepsilon(>0)$，即：$\min\{\sigma(a_f,b_f),\sigma(b_f,c_f),\sigma(a_f,c_f)\}\geq\varepsilon$ (ε为一个正实数)，对任意 $f\in F$，若 $f\neq a_f, f\neq b_f, f\neq c_f$，则 F 在 D 内正规。

除了涉及例外值的亚纯函数族的正规性，把亚纯函数正规族与分担值结合起来考虑也是亚纯函数正规族理论研究的一个重要课题，这方面工作最早从 Schwick 开始，之后国内外很多学者对这方面的问题进行了深入的研究。

1992 年，Schwick 研究亚纯函数及其导数分担值相关的正规族问题，证明了以下结论([3])：

定理 A：设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数，a_1,a_2,a_3 是三个判别的有穷复数，若对于 F 中的任意函数 f，f 和 f' 在 D 内分担 a_1,a_2,a_3，则 F 在 D 内正规。

2000 年，庞学诚和 Zalcman 在[4]中对 Schwick 的结果做了改进，得到如下结论：

定理 B：设 F 为单位圆盘Δ内的亚纯函数族，a，b，c 为互不相等的复数且 $c\neq 0$。若对于任意的 $f\in F$ 有 $\bar{E}_f(0)=\bar{E}_{f'}(a)$，$\bar{E}_f(b)=\bar{E}_{f'}(c)$，则 F 在Δ内正规。

定理 C：设 F 是区域 D 内的一个亚纯函数族，a，b，c 和 d 是有穷复数且满足 $c\neq a$ 及 $d\neq b$。若对于 F 中的任意函数 f，$f(z)=a\Leftrightarrow f'(z)=b$，$f(z)=c\Leftrightarrow f'(z)=d$，则 F 在 D 内正规。

以上正规定则中所涉及的分担值都为固定复数。根据 Caratheodory ([2])的思想，Singh 等人 2004 年在文献[5]中把定理 B 中固定的分担值推广为可随所对应函数而变动的分担值，得到如下结论：

定理 D：设 F 为单位圆盘Δ内的一个亚纯函数族，M 是常数，a,b,c 为定值且 $\frac{ab}{c^2}=M$，对于任意 $f\in F$，若存在非零复数 a_f,b_f,c_f 满足 $\min\{\sigma(a_f,b_f),\sigma(b_f,c_f),\sigma(a_f,c_f)\}\geq m$，($m>0$)，且 $\frac{a_f b_f}{c_f^2}=M$，使得 $\bar{E}_f(0)=\bar{E}_{f'}(a_f)$，$\bar{E}_f(b_f)=\bar{E}_{f'}(c_f)$，则 F 在Δ内正规。其中，$E_f(c_f)$ 和 $E_f(0)$ 分别为以下两个方程的解：

$$f'(z)=\frac{a_f b}{a}\left(1-\left(\frac{1}{c_f}-\frac{a}{ca_f}\right)f(z)\right)^2,\quad f'(z)=a_f\left(1-\left(\frac{1}{c_f}-\frac{a}{ca_f}\right)f(z)\right)^2$$

关于分担值可随函数而变动的正规定则，陈玮等人在 2016 年证明了如下结论([6])：

定理 E： 设 F 为区域 D 内的一个亚纯函数族，n 为正整数，若对于任意的 $f\in F$，存在非零复数 a_f，b_f，和 $c_f\in\mathbb{C}$，$c_f^{n+1}=a_f$，满足条件：1) $\min\left\{\sigma\left(0,b_f\right),\sigma\left(0,c_f\right),\sigma\left(b_f,c_f\right)\right\}\geq\varepsilon$ (ε为一个正实数)；2) $\dfrac{b_f}{c_f}$ 相对于 f 独立，使得 $f^n f'=a_f\Leftrightarrow f'=b_f$，则 F 在 D 内正规。

定理 F： 设 F 为区域 D 内的一个亚纯函数族，n 为正整数，若对于任意的 $f\in F$，存在非零复数 a_f，b_f，α_f，β_f 和 $c_f\in\mathbb{C}$，$c_f^{n+1}=\alpha_f$，满足条件：1) $\min\left\{\sigma\left(a_f,b_f\right),\sigma\left(a_f,c_f\right),\sigma\left(b_f,c_f\right)\right\}\geq\varepsilon$ (ε为一个正实数)；2) $\dfrac{a_f}{c_f}$，$\dfrac{b_f}{c_f}$，$\dfrac{\beta_f}{c_f}$ 相对于 f 独立，使得 $f^n f'=\alpha_f\Rightarrow f'=b_f$，$f'=a_f\Rightarrow f=\beta_f$，则 F 在 D 内正规。

本文进一步考虑分担值可随所对应函数而变动的正规族定则，对定理 C 做了推广，得到以下结论：

定理 1： 设 F 是区域 D 内的一个亚纯函数族，若对任意函数 $f\in F$，存在复数 $a_f(\neq 0)$，b_f，c_f，d_f，($a_f\neq c_f$，$b_f\neq d_f$)，满足条件：1) $\min\left\{\sigma\left(a_f,b_f\right),\sigma\left(a_f,c_f\right),\sigma\left(b_f,c_f\right)\right\}\geq\varepsilon$ (ε为一个正实数)；2) $\dfrac{b_f}{a_f}$，$\dfrac{c_f}{a_f}$，$\dfrac{d_f}{a_f}$ 相对于 f 独立，使得 $f=a_f\Leftrightarrow f'=b_f$，$f=c_f\Leftrightarrow f'=d_f$，则 F 在 D 内正规。

类似地，考虑方明亮和 L. Zalcman 在文献[7]中所证明的涉及高阶导数分担值的正规族定则：

定理 G： 设 F 是区域 D 内的一亚纯函数族，a，b 是两个非零有穷复数，k 是一个正整数。若对于 F 中的任意函数 f，f 的零点的重数至少为 $k+1$，$f(z)=a\Leftrightarrow f^{(k)}(z)=b$，则 F 在内正规。

本文对定理 G 做了推广，得到与定理 1 类似的结论：

定理 2： 设 F 是区域 D 内的一个亚纯函数族，k 是一个正整数，若对于任意的 $f\in F$，f 的零点的重数 $\geq k+1$，存在非零复数 a_f，b_f 满足条件 1) $\min\left\{\sigma\left(a_f,b_f\right),\sigma\left(a_f,0\right),\sigma\left(b_f,0\right)\right\}\geq\varepsilon$ (ε为一个正实数)；2) $\dfrac{b_f}{a_f}$ 相对于 f 独立，使得 $f(z)=a_f\Leftrightarrow f^{(k)}(z)=b_f$，则 F 在 D 内正规。

2. 预备知识

定义 1： ([8])设 $a,b\in\overline{\mathbb{C}}$，称非负实数 $\sigma(a,b)$ 为 a 与 b 之间的球面距离，其中 $\sigma(a,b)$ 定义如下

$$\sigma(a,b)=\begin{cases}\dfrac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}}, a\neq\infty,b\neq\infty;\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|a|^2}}, a\neq\infty,b=\infty;\\ 0, a=\infty,b=\infty.\end{cases}$$

定义 2： ([9])设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为区域 D 内的非常数亚纯函数，a 是一个复数，若 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 在区域 D 内有相同的零点，且零点的重数相同(不计重数)，则称 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 D 内分担 a *CM* (*IM*)，记为：$f=a\leftrightarrow g=a$ ($f=a\Leftrightarrow g=a$)。此时，a 称为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 *CM* (*IM*)公共值。

一般地，令 $\overline{E}_f(a)=\{z\in D: f(z)=a\}$ 表示 $f(z)-a$ 的不计重数的零点集合；$E_f(a)$ 表示 $f(z)-a$ 的计重数的零点集合。所以，如果 $\overline{E}_f(a)=\overline{E}_g(a)$，则 $f=a\Leftrightarrow g=a$；如果 $E_f(a)=E_g(a)$，则 $f=a\leftrightarrow g=a$。

引理 1： ([8])设 F 是区域 D 内的一族亚纯函数，F 中的每个函数的零点重数至少是 k，并且

1) 若 $f(z)=0$，必有 $\left|f^{(k)}(z)\right|\leq A$；

2) F 在单位圆内不正规，那么对于每一个α，$0\le\alpha\le k$，存在

a) 实数 r，$0<r<1$；

b) 点列 z_n，$|z_n|<r$；

c) 函数列 $f_n\in F$；

d) 正数列 $\rho_n\to 0^+$ 使得函数$\left\{\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n^\alpha}\right\}$在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个亚纯函数 $g(\xi)$，并且 $g^\#(\xi)\le g^\#(0)=kA+1$。其中，$g^\#(\xi)$ 表示球面导数，即 $g^\#(\xi)=\dfrac{|g'(\xi)|}{1+|g(\xi)|^2}$。

引理 2：([6])设ε为任意正数，L 是一个 Mobius 变换，若存在常数 a，b，c，使得 L 满足

$$\min\{\sigma(L(a),L(b)),\sigma(L(b),L(c)),\sigma(L(c),L(a))\}\ge\varepsilon$$

则 L 满足一致 Lipschitz's 条件，即

$$\sigma(L(z),L(\omega))\le k_\varepsilon\sigma(z,\omega)$$

其中，k_ε 是依赖于ε的常数。

引理 3：([8])设 f 是一个有穷级超越亚纯函数，k 是正整数，$p(z)$ (不恒等于 0)是多项式。若 f 的零点重级均不小于 $k+1$，则 $f^{(k)}(z)-p(z)$ 有无穷多个零点。

引理 4：([8])设 $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0+\dfrac{p(z)}{q(z)}$，$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是常数，$a_n\ne 0$，$p(z)$，$q(z)$ 是两个互素的多项式，且 $\deg p<\deg q$，k 是一正整数，若 $f^{(k)}(z)\ne 1$，则有

1) $n=k$，且 $n!a_n=1$；

2) $f(z)=\dfrac{1}{k!}z^k+\cdots+a_1z+a_0+\dfrac{1}{(az+b)^m}$；

3) 若 $f(z)$ 的零点的重级均不小于 $k+1$，则结论(2)式中 $m=1$，且 $f(z)=\dfrac{(cz+d)^{k+1}}{az+b}$，其中 a，b，c，d 是常数，$a\ne 0$，$c\ne 0$。

引理 5：([10])设 $f(z)$ 为一个整函数，若 $f(z)$ 的球面导数 $f^\#(z)$ 有界，则 $f(z)$ 的级至多为 1。

3. 定理的证明

定理 1 的证明：

在条件(2)下，存在非零常数 a，b，c，d 有 $\dfrac{b_f}{a_f}=\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{c_f}{a_f}=\dfrac{c}{a}$，$\dfrac{d_f}{a_f}=\dfrac{d}{a}$ 相对于 f 独立。Mobius 变换：$L_f(z)=\dfrac{a_f}{a}z$，其逆变换 $L_f^{-1}(z)=\dfrac{a}{a_f}z$。接下来证明函数族 $G=\{L_f^{-1}\circ f\mid f\in F\}$ 在 D 内正规。

不妨设 D 为单位圆Δ，假设 G 在Δ内不正规。由引理 1($\alpha=1$)，存在子列$\{g_j=L_{f_j}^{-1}\circ f_j\}\subset G$，$\{f_j\}\subset F$，$\{z_j\}\subset\Delta$，数列$\{\rho_j\}$满足 $\rho_j\to 0+$，使得

$$T_j(\xi)=\rho_j^{-1}\left[g_j(z_j+\rho_j\xi)-c\right]$$

在 $\mathbb{C}$ 上按球距一致收敛于非常数亚纯函数 $T(\xi)$，并且 T 满足 $T^\#(\xi)\le T^\#(0)=d+1$。

我们断言：

1.1 若 $T(\xi)=0$，则 $T'(\xi)=d$；

1.2 $T'(\xi)\neq b$；

1.3 $T(\xi)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯。

断言 1.1 的证明：设 $T(\xi)=0$，则由 Hurwitz 定理知，存在 $\xi_j\in\mathbb{C}$，$\xi_j\to\xi_0$，当 $j\to\infty$ 时，有

$$T_j(\xi_j)=\rho_j^{-1}\left[g_j(z_j+\rho_j\xi_j)-c\right]=0,$$

从而有

$$g_j(z_j+\rho_j\xi_j)=L_{f_j}^{-1}\circ f_j(z_j+\rho_j\xi_j)=\frac{a}{a_{f_j}}f_j(z_j+\rho_j\xi_j)=c,$$

$$f_j(z_j+\rho_j\xi_j)=\frac{c}{a}a_{f_j}=\frac{c_{f_j}}{a_{f_j}}a_{f_j}=c_{f_j},$$

由 $f_j=c_{f_j}\Leftrightarrow f_j'=d_{f_j}$ 得到

$$f_j'(z_j+\rho_j\xi_j)=d_{f_j},$$

$$T'(\xi_0)=\lim_{j\to\infty}g_j'(z_j+\rho_j\xi_j)=\lim_{j\to\infty}\frac{a}{a_{f_j}}f_j'(z_j+\rho_j\xi_j)=\lim_{j\to\infty}\frac{a}{a_{f_j}}d_{f_j}=\lim_{j\to\infty}\frac{a}{a}d=d,$$

于是断言 1.1 成立。

断言 1.2 的证明：假设 $T'(\xi_0)=b$。

显然，$T'(\xi)$ 不恒等于 b，否则 $T(\xi)=b(\xi-\xi_1)$，与断言 1.1 矛盾。由 Hurwitz 定理知存在 $\xi_j\in\mathbb{C}$，$\xi_j\to\xi_0$，使得当 $j\to\infty$ 时，有

$$T_j'(\xi_j)=g_j'(z_j+\rho_j\xi_j)=\frac{a}{a_{f_j}}f_j'(z_j+\rho_j\xi_j)=b,$$

$$f_j'(z_j+\rho_j\xi_j)=\frac{b}{a}a_{f_j}=b_{f_j}。$$

由 $f_j'=b_{f_j}\Leftrightarrow f_j=a_{f_j}$ 得 $f_j(z_j+\rho_j\xi_j)=a_{f_j}$，

$$g_j(z_j+\rho_j\xi_j)=L_{f_j}^{-1}\circ f_j(z_j+\rho_j\xi_j)=\frac{a}{a_{f_j}}f_j(z_j+\rho_j\xi_j)=a。$$

从而，

$$T_j(\xi_j)=\rho_j^{-1}\left[g_j(z_j+\rho_j\xi)-c\right]=\rho_j^{-1}\cdot(a-c),$$

$$T(\xi_0)=\lim_{j\to\infty}T_j(\xi_j)=\lim_{j\to\infty}\frac{a-c}{\rho_j}=\infty$$

与 $T'(\xi_0)=b$ 矛盾。因此断言 1.2 成立。

断言 1.3 的证明：假设 $T(\xi)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有极点 ξ_0，即 $T(\xi_0)=\infty$。

由于 T 不恒为∞，故存在闭圆盘 $\overline{\Delta}(\xi_0,\delta)=\{\xi:|\xi-\xi_0|\leq\delta\}$，当 $j\to\infty$ 时，$\frac{1}{T}$ 和 $\frac{1}{T_j}$ 在 $\overline{\Delta}(\xi_0,\delta)$ 上全纯，且 $\frac{1}{T_j}$ 一致收敛于 $\frac{1}{T}$。从而，在 $\overline{\Delta}(\xi_0,\delta)$ 上 $\frac{1}{T_j(\xi)}-\frac{\rho_j}{a-c}$ 也一致收敛于 $\frac{1}{T}$。设 ξ_0 是 $\frac{1}{T}$ 的 $m(\geq1)$ 重零点，则

$\left(\frac{1}{T}\right)^{(m)}(\xi_0)\neq 0$，且存在正数 $\delta_1(\leq\delta)$，使得在 $\Delta'(\xi_0,\delta_1)=\{\xi:0<|\xi-\xi_0|<\delta_1\}$ 内有 $\left(\frac{1}{T}\right)'(\xi)\neq 0$，$\left(\frac{1}{T}\right)^{(m)}(\xi)\neq 0$。由于在 $\bar{\Delta}(\xi_0,\delta)$ 上 $\frac{1}{T_j(\xi)}-\frac{\rho_j}{a-c}$ 一致收敛于 $\frac{1}{T}$，且 ξ_0 是 $\frac{1}{T}$ 的 m 重零点，由 Hurwitz 定理知，当 j 充分大时对 $\frac{1}{T_j(\xi)}-\frac{\rho_j}{a-c}$ 存在 m 个互异的点 ξ_{ij}，$i=1,2,\cdots,m$，满足

$$\frac{1}{T_j(\xi_{ij})}-\frac{\rho_j}{a-c}=0,\quad i=1,2,\cdots,m,$$

且 $\lim\limits_{j\to\infty}\xi_{ij}=\xi_0$。于是 $g_j(z_j+\rho_j\xi_{ij})-c=a-c$，即

$$g_j(z_j+\rho_j\xi_{ij})=\frac{a}{a_{f_j}}f_j(z_j+\rho_j\xi_{ij})=a,$$

则 $f_j(z_j+\rho_j\xi_{ij})=a_{f_j}$。从而

$$T_j'(\xi_{ij})=g_j'(z_j+\rho_j\xi_{ij})=\frac{a}{a_{f_j}}f_j'(z_j+\rho_j\xi_{ij})=\frac{a}{a_{f_j}}b_{f_j}=b,$$

$$\left.\left(\frac{1}{T_j(\xi)}\right)'\right|_{\xi=\xi_{ij}}=-\frac{T_j'(\xi_{ij})}{T_j^2(\xi_{ij})}=-\frac{b\rho_j^2}{(a-c)^2}\neq 0,\quad i=1,2,\cdots,m。$$

这说明当 j 充分大时 $\left(\frac{1}{T(\xi)}\right)'+\frac{b\rho_j^2}{(a-c)^2}$ 在 $\Delta\left(\xi_0,\frac{\delta_1}{2}\right)=\left\{\xi:|\xi-\xi_0|<\frac{\delta_1}{2}\right\}$ 内至少有 m 个不同的零点。再由 Hurwitz 定理知，ξ_0 至少为 $\left(\frac{1}{T}\right)'$ 的 m 重零点，即有 $\left(\frac{1}{T}\right)^{(m)}(\xi_0)=0$，矛盾。因此断言 1.3 得证。

断言证明完毕。

由断言 1.3 知，T 是一个整函数，由引理 5，T 的级数 ≤ 1。从而由断言 1.2 得 $T'(\xi)=b+\mathrm{e}^{A\xi+B}$。

以下分两种情形来考虑：

情形 1 $A\neq 0$。由 $T'(\xi)=b+\mathrm{e}^{A\xi+B}$ 得

$$T(\xi)=b\xi+c+\frac{e^{A\xi+B}}{A},\ (A,B,C\ \text{是常数})。$$

设 $T(\xi_0)=0$，则由断言 1.1 和 $T(\xi)=b\xi+c+\frac{\mathrm{e}^{A\xi+B}}{A}$ 得

$$T'(\xi_0)=b+\mathrm{e}^{A\xi_0+B}=d,\quad \xi_0=-\frac{1}{b}\left(c+\frac{d-b}{A}\right)。$$

因此，方程 $g(\xi)=0$ 只有一个解 $\xi=\xi_0$，但由 $T(\xi)=b\xi+c+\frac{\mathrm{e}^{A\xi+B}}{A}$ 知，$T(\xi)=0$ 有无穷多解，矛盾。

情形 2 $A=0$。由断言 1.1 知，$T'(\xi)\equiv d$，于是 $T(\xi)=d(\xi-\xi_1)$。从而有

$$T^{\#}(0)=\frac{|T'(0)|}{1+|T(0)|^2}\leq|T'(0)|=d,$$

即有 $T^{\#}(0)<|d|+1$，与 $T^{\#}(0)=|d|+1$ 矛盾。所以 G 在 D 内正规，G 在 D 内等度连续。

由条件(1)知：

$$\begin{aligned}\varepsilon &\le \min\left\{\sigma\left(a_f,b_f\right),\sigma\left(a_f,c_f\right),\sigma\left(b_f,c_f\right)\right\}\\ &=\min\left\{\sigma\left(L_f(a),L_f(b)\right),\sigma\left(L_f(a),L_f(c)\right),\sigma\left(L_f(b),L_f(c)\right)\right\}\end{aligned}$$

由引理 2，我们可知 L_f 满足 Lipschitz’s 条件

$$\sigma\left(L(z),L(\omega)\right)\le k_\varepsilon\sigma(z,\omega),$$

其中 k_ε 为取决于 ε 的常数。

取一点 $z\in D$，对于任意 $\varepsilon>0$，T 在 $z\in D$ 等度连续。存在 $\delta>0$，当 $\omega\in D$ 满足 $\sigma(z,\omega)<\delta$， 对于每个 $f\in F$ 满足

$$\sigma\left(\left(L_f^{-1}\circ f\right)(z),\left(L_f^{-1}\circ f\right)(\omega)\right)\le\frac{\varepsilon}{k_\varepsilon}。$$

因此，当 $\sigma(z,\omega)<\delta$，每个 $f\in F$ 满足

$$\begin{aligned}\sigma\left(f(z),f(\omega)\right)&=\sigma\left(\left(L_f\circ L_f^{-1}\circ f\right)(z),\left(L_f\circ L_f^{-1}\circ f\right)(\omega)\right)\\ &\le k_\varepsilon\sigma\left(\left(L_f^{-1}\circ f\right)(z),\left(L_f^{-1}\circ f\right)(\omega)\right)<\varepsilon\end{aligned}$$

即 F 在 z 处也等度连续。因此 F 在区域 D 内正规。

定理 1 证明完毕。

定理 2 的证明：

在条件(2)下，存在非零常数 a，b 有 $\frac{b_f}{a_f}=\frac{b}{a}$ 相对于 f 独立。Mobius 变换：$L_f(z)=\frac{a_f}{a}z$，其逆变换 $L_f^{-1}(z)=\frac{a}{a_f}z$。接下来证明函数族 $G=\left\{L_f^{-1}\circ f\mid f\in F\right\}$ 在 D 内正规。

不妨设区域 D 是单位圆Δ，假设 G 在单位圆Δ内不正规，则由引理 1 知，存在子列 $\left\{g_j=L_{f_j}^{-1}\circ f_j\right\}\subset G$，$\left\{f_j\right\}\subset F$，$\left\{z_j\right\}\subset\Delta$，列 $\left\{\rho_j\right\}$ 满足 $\rho_j\to0$，使得 $T_j(\xi)=\rho_j^{-k}g_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 T，且 T 的零点重级至少为 $k+1$。

我们断言：

2.1 $T^{(k)}(\xi)\ne b$；

2.2 T 没有单重极点。

断言 2.1 的证明：假设存在一点 $\xi_0\in\mathbb{C}$，使 $T^{(k)}(\xi_0)=b$，则 $T^{(k)}$ 不恒等于 b。否则 T 为 k 次多项式。这与 T 的零点重级 $\ge k+1$ 矛盾。由于 $T^{(k)}(\xi_0)=b$ 且 $T^{(k)}$ 不恒等于 b，故由 Hurwitz 定理知，存在 ξ_j，$\xi_j\to\xi_0$，使得当 $j\to\infty$ 时，

$$T_j^{(k)}\left(\xi_j\right)=g_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)=\frac{a}{a_{f_j}}f_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)=b,$$

$$f_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)=b_{f_j}。$$

由 $f_j=a_{f_j}\Leftrightarrow f_j^{(k)}=b_{f_j}$，得 $f_j\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)=a_{f_j}$，从而

$$T_j\left(\xi_j\right)=\frac{g_j\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)}{\rho_j^k}=\frac{a}{a_{f_j}\rho_j^k}f_j\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)=\frac{a}{\rho_j^k}$$

$$T(\xi_0)=\lim_{j\to\infty}T_j(\xi_j)=\lim_{j\to\infty}\frac{a}{\rho_j^k}=\infty$$

这与 $T^{(k)}(\xi_0)=b$ 矛盾，所以断言 2.1 成立。

断言 2.2 的证明：设 $T(\xi_0)=\infty$。由于 T 不恒等于∞，则存在闭圆 $\overline{\Delta}(\xi_0,\delta)$，使得当 $j\to\infty$ 时，$\frac{1}{T}$ 和 $\frac{1}{T_j}$ 在圆上全纯，且 $\frac{1}{T_j}$ 一致收敛于 $\frac{1}{T}$。所以在 $\overline{\Delta}(\xi_0,\delta)$ 上，$\frac{1}{T_j(\xi)}-\frac{\rho_j^k}{a}$ 一致收敛于 $\frac{1}{T}$。又由于 $\frac{1}{T}$ 不是常数，所以存在 ξ_j，$\xi_j\to\xi_0$，使得当 $j\to\infty$ 时有 $\frac{1}{T_j(\xi_j)}-\frac{\rho_j^k}{a}=0$，于是有

$$g_j(z_j+\rho_j\xi_j)=\frac{a}{a_{f_j}}f_j(z_j+\rho_j\xi_j)=a，\quad f_j(z_j+\rho_j\xi_j)=a_{f_j}。$$

从而，

$$\begin{aligned}&f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\xi_j)=b_{f_j},\\&g_j^{(k)}(z_j+\rho_j\xi_j)=\frac{a}{a_{f_j}}f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\xi_j)=b,\\&T_j^{(k)}(z_j+\rho_j\xi_j)=g_j^{(k)}(z_j+\rho_j\xi_j)=b\end{aligned}\tag{1}$$

若 $k=1$，则由(1)得

$$\begin{aligned}\left.\left(\frac{1}{T(\xi)}\right)'\right|_{\xi=\xi_0}&=-\frac{T'(\xi_0)}{T^2(\xi_0)}=\lim_{j\to\infty}\left[-\frac{T_j'(\xi_j)}{T_j^2(\xi_j)}\right]=\lim_{j\to\infty}\left[-\frac{b}{T_j^2(\xi_j)}\right]\\&=\lim_{j\to\infty}\frac{-b\rho_j^{2k}}{a^2}=\frac{-b}{a^2}\lim_{j\to\infty}\rho_j^{2k}=0\end{aligned}$$

因此 ξ_0 为 $T(\xi)$ 的重极点。所以 T 没有单重极点。

类似地，若 $k=2$，则由(1)得

$$\begin{aligned}\left.\left(\frac{1}{T(\xi)}\right)''\right|_{\xi=\xi_0}&=0=-\frac{T''(\xi_0)}{T^2(\xi_0)}+2\frac{\left[T'(\xi_0)\right]^2}{T^3(\xi_0)}=\lim_{j\to\infty}\left[-\frac{T_j''(\xi_j)}{T_j^2(\xi_j)}+2\frac{\left[T_j'(\xi_j)\right]^2}{T_j^3(\xi_j)}\right]\\&=\lim_{j\to\infty}\left[-\frac{T_j''(\xi_j)}{T_j^2(\xi_j)}\right]+2\lim_{j\to\infty}\frac{\left[T_j'(\xi_j)\right]^2}{T_j^3(\xi_j)}=2\lim_{j\to\infty}\left\{\left[-\frac{T_j'(\xi_j)}{T_j^2(\xi_j)}\right]^2\cdot T_j(\xi_j)\right\}\end{aligned}\tag{2}$$

由于 $\lim\limits_{j\to\infty}g_j(\xi_j)=\infty$，于是由(2)得

$$\lim_{j\to\infty}\left[-\frac{T_j'(\xi_j)}{T_j^2(\xi_j)}\right]^2=0$$

所以 $\left.\left(\frac{1}{T(\xi)}\right)'\right|_{\xi=\xi_0}=0$。因此 ξ_0 为 $T(\xi)$ 的重极点，故 T 没有单重极点。

若 $k \ge 3$，由归纳法可得

$$\left(\frac{1}{T}\right)^{(k)} = -\frac{T^{(k)}}{T^2} + k!\frac{(T')^k}{T^{k+1}} + \sum_{0\le i\le k-2} A_i T^i \tag{3}$$

其中 A_i 是 $\left(\frac{1}{T}\right)', \left(\frac{1}{T}\right)'', \cdots, \left(\frac{1}{T}\right)^{(k-1)}$ 的多项式。

因此由(1)和(3)得

$$\begin{aligned}
\left.\left(\frac{1}{T(\xi)}\right)^{(k)}\right|_{\xi=\xi_0} &= \lim_{j\to\infty}\left.\left(\frac{1}{T_j(\xi)}\right)^{(k)}\right|_{\xi=\xi_j} \\
&= \lim_{j\to\infty}\left[-\frac{T_j^{(k)}(\xi_j)}{T_j^2(\xi_j)} + k!\frac{\left(T_j'(\xi_j)\right)^k}{T_j^{k+1}(\xi_j)} + \sum_{0\le i\le k-2} A_i T_j^i(\xi_j)\right] \\
&= \lim_{j\to\infty}\left[k!\frac{\left(T_j'(\xi_j)\right)^k}{T_j^{k+1}(\xi_j)} + \sum_{1\le i\le k-2} A_i T_j^i(\xi_j)\right] + A_0(\xi_0) \\
&= \lim_{j\to\infty}\left[k!\left(-\frac{T_j'(\xi_j)}{T_j^2(\xi_j)}\right)^k (-1)^k T_j^{k-1}(\xi_j) + \sum_{1\le i\le k-2} A_i T_j^{i-1}(\xi_j)\right] T_j(\xi_j) + A_0(\xi_0)
\end{aligned} \tag{4}$$

由于 $\lim_{j\to\infty} T_j(\xi_j) = \infty$，于是由(4)得

$$\lim_{j\to\infty}\left[k!\left(-\frac{T_j'(\xi_j)}{T_j^2(\xi_j)}\right)^k (-1)^k T_j^{k-1}(\xi_j) + \sum_{1\le i\le k-2} A_i T_j^{i-1}(\xi_j)\right] = 0$$

类似地可得

$$\lim_{j\to\infty}\left[k!\left(-\frac{T_j'(\xi_j)}{T_j^2(\xi_j)}\right)^k (-1)^k T_j^{k-2}(\xi_j) + \sum_{2\le i\le k-2} A_i T_j^{i-2}(\xi_j)\right] = 0$$

如此进行下去，可得

$$\lim_{j\to\infty}\left[-\frac{T_j'(\xi_j)}{T_j^2(\xi_j)}\right]^k = 0$$

即得 $\left.\left(\frac{1}{T(\xi)}\right)'\right|_{\xi=\xi_0} = 0$，从而 ξ_0 为 $T(\xi)$ 的重极点。因而 T 没有单重极点，所以断言 2.2 成立。

由引理 3 知，T 是有理函数。若 T 是多项式，则由 T 的零点重级 $\ge k+1$ 及断言 2.1 可知，T 是常数，矛盾；若 T 不是多项式，则由 T 的零点重级 $\ge k+1$，断言 2.1 及引理 4 可知，T 有一个单极点，与 T 没有单极点矛盾。

因此 G 在 D 内正规，G 在 D 内等度连续。由条件(1)知：

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\le \min\left\{\sigma(a_f, b_f), \sigma(a_f, c_f), \sigma(b_f, c_f)\right\} \\
&= \min\left\{\sigma(L_f(a), L_f(b)), \sigma(L_f(a), L_f(c)), \sigma(L_f(b), L_f(c))\right\}
\end{aligned}$$

由引理 2，可知 L_f 满足 Lipschitz's 条件 $\sigma\left(L(z),L(\omega)\right)\le k_\varepsilon\sigma(z,\omega)$，其中 k_ε 为取决于ε的常数。

取一点 $z\in D$，对于任意 $\varepsilon>0$，T 在 $z\in D$ 等度连续，存在 $\delta>0$，当 $\omega\in D$ 满足 $\sigma(z,\omega)<\delta$，对于每个 $f\in F$ 满足

$$\sigma\left(\left(L_f^{-1}\circ f\right)(z),\left(L_f^{-1}\circ f\right)(\omega)\right)\le\frac{\varepsilon}{k_\varepsilon}$$

因此当 $\sigma(z,\omega)<\delta$ 时任一 $f\in F$ 满足

$$\begin{aligned}\sigma\left(f(z),f(\omega)\right)&=\sigma\left(\left(L_f\circ L_f^{-1}\circ f\right)(z),\left(L_f\circ L_f^{-1}\circ f\right)(\omega)\right)\\&\le k_\varepsilon\sigma\left(\left(L_f^{-1}\circ f\right)(z),\left(L_f^{-1}\circ f\right)(\omega)\right)<\varepsilon\end{aligned}$$

即 F 在 z 处也等度连续。因此 F 在区域 D 内正规。

定理 2 证明完毕。

致　谢

感谢评审专家对论文提出的宝贵意见。

参考文献

[1] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Spring-Verlag, Berlin.

[2] Caratheodory, C. (1960) Theory of Function of a Complex Variable. Vol. II, Chelsea Pul Co., New York.

[3] Schwick, W. (1992) Sharing Values and Normality. *Archiv der Mathematik*, **59**, 50-54. https://doi.org/10.1007/BF01199014

[4] Pang, X.C. and Zalcman, L. (2000) Normality and Shared Values. *Arkiv för Matematik*, **38**, 171-182. https://doi.org/10.1007/BF02384496

[5] Singh, A.P. and Singh, A. (2004) Sharing Values and Normality of Meromorphic Function. *Complex Variables, Theory and Application*: *An International Journal*, **49**, 417-425. https://doi.org/10.1080/02781070410001715097

[6] Chen, W., Tian, H.G. and Hu, P.C. (2016) Normal Families of Meromorphic Functions with Shared Values. *Acta Mathematica Scientia*, **36B**, 87-93. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(15)30080-1

[7] Fang, M.L. and Zalcman, L. (2002) Normal Families and Shared Values of Meromorphic Functions III. *Computational Methods and Function Theory*, **2**, 385-395.

[8] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[9] 吴春. 亚纯函数的正规族及唯一性的几个定理[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2007.

[10] Clunie, J. and Hayman, W.K. (1966) The Spherical Derivative of Integral and Meromorphic Functions. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **40**, 117-148. https://doi.org/10.1007/BF02564366