Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(2), 149-163
Published Online March 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.82019

Hans汉斯

Uncertainty Principle for the α-Fock Space F_α^2

Weiye Pan*, Congli Yang, Jian Zhao

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou
Email: *1047347503@qq.com

Received: Feb. 23rd, 2018; accepted: Mar. 10th, 2018; published: Mar. 20th, 2018

Abstract

In this paper, we mainly introduce a positive parameter α and results about uncertainty principle of two self-adjoint operators for the Fock Space F^2 are generalized to the α-Fock Space F_α^2 in the complex plane. In particular, we also do a perfect proof for the case of a,b which are complex parameters.

Keywords

α-Fock Space, Uncertainty Principle, Quantum Physics, Gaussian Measures, Self-Adjoint Operators

α-Fock空间F_α^2上的测不准原理

潘维烨*，杨丛丽，赵　健

贵州师范大学数学科学学院，贵州　贵阳
Email: *1047347503@qq.com

收稿日期：2018年2月23日；录用日期：2018年3月10日；发布日期：2018年3月20日

摘　要

本文主要是引入一个参数α ($\alpha > 0$)，将Fock空间F^2上的关于两个自伴算子的测不准原理推广到α-Fock空间F_α^2上，并对a,b为任意复数的情形做了完善的证明。

*通讯作者。

文章引用: 潘维烨, 杨丛丽, 赵健. α-Fock 空间 F_α^2 上的测不准原理[J]. 理论数学, 2018, 8(2): 149-163.
DOI: 10.12677/pm.2018.82019

关键词

α-Fock空间，测不准原理，量子力学，Gaussian测度，自伴算子

1. 引言

海森堡测不准原理是量子力学的一个重要基本原理，它指出在一个量子力学系统中，一个粒子的位置和它的动量不可被同时确定。位置的不确定性 Δx 和动量的不确定性 Δp 一定满足不等式 $\Delta x\Delta p \ge h/2$，其中 h 是约化普朗克常数。类似的不确定性也存在于能量和时间、角动量和角度等许多物理量之间。因此在 Fock 空间及其推广的α-Fock 空间上研究测不准原理是有意义的。早在文献[1]和文献[2]中作者就给出了 Hilbert 空间上的几种测不准原理形式，本文主要是将文献[3]的结果进行推广和完善。更多关于测不准原理的结果，感兴趣的读者可以查阅文献[4]-[11]。值得一提的是，由于参数 α 的引入，本文的计算结果相对文献[3]更为复杂，且当 $\alpha = 1$ 时包含[3]中的所有结果。

下面对本文所用到的符号加以说明：

记 $\mathbb{C}$ 为一维复平面，$\mathbb{R}$ 为一维实平面，对任意的正实参数 α，我们定义：

$$\mathrm{d}\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi}\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\mathrm{d}A(z)$$

为 $\mathbb{C}$ 上的 Gaussian 测度，其中 $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Lebesgue 面积测度。

定义α-Fock 空间 F_α^2 为：

$$F_\alpha^2 = L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha) \cap H(\mathbb{C})$$

其中 $H(\mathbb{C})$ 为 $\mathbb{C}$ 上整函数全体。显然 F_α^2 是 $L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 的闭子空间，因此 F_α^2 是 Hilbert 空间，其上的内积和范数分别定义为：

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \tag{1.1}$$

$$\|f\|_{2,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \mathrm{d}\lambda_\alpha(z)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

注：本文的所有结果都是在复平面 $\mathbb{C}$ 上讨论的，下文不再作说明。

2. 相关引理及主要结果

文献[1]中给出了一个泛函分析里的关于 Hilbert 空间 H 上的两个自伴算子测不准原理的一般性结果：

定理 1: 设 A 和 B 为 Hilbert 空间 H 上的可能无界的自伴算子，则对于任意的 $f \in Dom(AB) \cap Dom(BA)$ 和任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 有

$$\|(A-a)f\|\|(B-b)f\| \ge \frac{1}{2}\left|\langle [A,B]f, f\rangle\right| \tag{2.1}$$

其中 $[A,B] = AB - BA$ 为 A 和 B 的换位子。等式成立当且仅当 $(A-a)f$ 和 $(B-b)f$ 相差一个纯虚数倍。

证明：详见[1]第 27 页。

在文献[3]中，陈泳和朱克和两位教授将定理 1 与海森堡测不准原理结合起来，得到了 Fock 空间 F^2 中的两个自伴算子的测不准原理。

定理 2：令 $f \in F^2$，则对所有 $a,b \in \mathbb{R}$ 有

$$\|f' + zf - af\| \|f' - zf + ibf\| \ge \|f\|^2$$

等式成立当且仅当存在正实数 c 和复数 C_1 使得

$$f(z) = C_1 \exp\left(\frac{c-1}{2(c+1)} z^2 + \frac{a - ibc}{c+1} z\right)$$

证明：详见[3]中定理 4 的证明。

定理 2 中主要讨论了空间 F^2 上的由甄灭算子和产生算子构造的两个自伴算子，而这在 F_α^2 上不再适用，因为在 F_α^2 中，甄灭算子的对偶算子不再是产生算子了，稍作改变，我们得到：

引理 1：对任意的 $\alpha > 0$，令 $T: F_\alpha^2 \to F_\alpha^2$ 为微分算子的常数倍，即 $Tf = \frac{1}{\alpha} f'$。则其对偶算子 T^* 为 $(T^* f)(z) = zf(z)$。

证明：设 F_α^2 中的标准正交基为

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n, n = 0,1,2,\cdots$$

可设 F_α^2 中稠密的两个多项式分别为

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n,\quad g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e_n$$

则

$$Tf(z) = \frac{1}{\alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{n+1} a_{n+1} e_n(z)$$

另外

$$zg(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} \sqrt{\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\alpha}} b_{n-1} e_n(z)$$

于是

$$\langle Tf, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{n+1} a_{n+1} \overline{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{n}{\alpha}} \overline{b_{n-1}} = \langle f, zg \rangle = \langle f, T^* g \rangle$$

证毕。

从定理 1 我们知道，如果有两个自伴算子 A 和 B 使得 $[A,B]$ 为恒等算子的常数倍，则可得到测不准原理。故我们考虑利用引理 1 中的算子 T 和 T^* 来构造这样两个自伴算子。

直接计算可知，对所有 $f \in F_\alpha^2$ 有：

$$[T, T^*] f = (TT^* - T^*T) f = \frac{(zf)'}{\alpha} - \frac{zf'}{\alpha} = \frac{f}{\alpha}$$

因此我们考虑 F_α^2 上的如下两个自伴算子：

$$A = T + T^*,\ B = i\left(T - T^*\right)$$

即

$$Af(z) = \frac{1}{\alpha} f'(z) + zf(z),\ Bf(z) = i\left(\frac{1}{\alpha} f'(z) - zf(z)\right) \tag{2.2}$$

由[1]知，若 $\frac{1}{\alpha} f' \in F_\alpha^2$，则 Af 和 Bf 的定义都是合理的，若 $\frac{1}{\alpha} f' + zf$ 和 $\frac{1}{\alpha} f' - zf$ 都属于 F_α^2，则 $\frac{1}{\alpha} f'$ 和 zf 显然也都在 F_α^2 中，于是 A 和 B 的定义域的交集包含那些使得 $\frac{1}{\alpha} f'$ (或 zf)仍旧在 F_α^2 中的 f。对 AB，BA 及他们定义域的交，同样确定为算子 A 和 B 的定义域的交集。

引理 2：对任意的 $\alpha > 0$，对上述定义的自伴算子 A 和 B，有 $[A,B] = -\frac{2}{\alpha} iI$，其中 I 为 F_α^2 上的恒等算子，i 为虚数单位。

证明：对所有 $f \in F_\alpha^2$，由(2.2)式可得

$$\begin{aligned} AB - BA &= i\left[\left(T + T^*\right)\left(T - T^*\right) - \left(T - T^*\right)\left(T + T^*\right)\right] \\ &= 2i\left[T^*T - TT^*\right] = -\frac{2}{\alpha} iI \end{aligned}$$

证毕。

下面将给出 α-Fock 空间 F_α^2 上的第一个测不准原理形式。

定理 3：对任意的 $\alpha > 0$，令 $f \in F_\alpha^2$，则对所有 $a,b \in \mathbb{R}$ 有

$$\left\|\frac{1}{\alpha} f' + zf - af\right\|_{2,\alpha} \left\|\frac{1}{\alpha} f' - zf + ibf\right\|_{2,\alpha} \ge \frac{1}{\alpha} \|f\|_{2,\alpha}^2 \tag{2.3}$$

等式成立当且仅当存在正实数 c 和复数 C' 使得

$$f(z) = C' \exp\left(\frac{\alpha(c-1)}{2(c+1)} z^2 + \frac{\alpha(a - ibc)}{c+1} z\right)$$

证明：因为 $a,b \in \mathbb{R}$，则由定理 1 可知

$$\|(A-a)f\|_{2,\alpha} \|(B-b)f\|_{2,\alpha} \ge \frac{1}{2}\left|\langle [A,B]f, f\rangle\right|$$

又因为

$$\left\|i\left(\frac{1}{\alpha} f' - zf\right) - bf\right\|_{2,\alpha} = \left\|\frac{1}{\alpha} f' - zf + ibf\right\|_{2,\alpha}$$

结合引理 2 可得

$$\left\|\frac{1}{\alpha} f' + zf - af\right\|_{2,\alpha} \left\|\frac{1}{\alpha} f' - zf + ibf\right\|_{2,\alpha} \ge \frac{1}{\alpha} \|f\|_{2,\alpha}^2$$

另外，由定理 1 可知(2.3)中等式成立当且仅当存在正实数 c 使得

$$\frac{1}{\alpha} f' + zf - af = ic\left[i\left(\frac{1}{\alpha} f' - zf\right) - bf\right] \tag{2.4}$$

或

$$i\left(\frac{1}{\alpha}f'-zf\right)-bf=ic\left(\frac{1}{\alpha}f'+zf-af\right) \tag{2.5}$$

这里，我们先计算(2.4)式有：

$$\frac{1+c}{\alpha}f'+\left[(1-c)z-(a-ibc)\right]f=0 \tag{2.6}$$

1) 若 $c=-1$，则(2.6)只有解 $f=0$ 这一零解。

2) 若 $c\neq-1$，(2.6)式可变形为 $\frac{f'}{f}=\frac{\alpha(c-1)z+\alpha(a-ibc)}{c+1}$，则由解常微分方程的初等方法可得(2.6)的一般解为

$$f(z)=C'\exp\left(\frac{\alpha(c-1)}{2(c+1)}z^2+\frac{\alpha(a-ibc)}{c+1}z\right) \tag{2.7}$$

其中 C' 为任意复常数。

由[1] (第 38 页)知每个 $f\in F_\alpha^2$ 则必满足

$$\lim_{z\to\infty}f(z)\exp\left(-\frac{\alpha}{2}|z|^2\right)=0 \tag{2.8}$$

因此函数(2.7)在空间 F_α^2 中的一个充要条件是 $C'=0$ 或 $|c-1|\leq|c+1|$。由于 c 是实数，后者等价于 $(c-1)^2\leq(c+1)^2$ 或 $c\geq0$。而当 $c=0$ 时，此时函数(2.7)为

$$f(z)=C'\exp\left(-\frac{\alpha}{2}z^2+\alpha az\right)$$

取 $z=ir$，其中 $r\to+\infty$，由(2.8)式知其等价于 $C'=0$。

对(2.5)式，同理可以讨论，证毕。

为了给出 F_α^2 上的测不准原理的其他形式，我们还需对函数(2.7)进行一些相关的计算。

由定理 3 我们知道函数(2.7)在空间 F_α^2 中的充要条件为 $C'=0$ 或 $c>0$，当 $C'\neq0$ 即 $c>0$ 时，我们可以对函数(2.7)进行一些相关的计算，如范数、内积等，这些计算结果都将在下文推论中用到。由于 $C'\neq0$，为了计算的简便，我们可将函数(2.7)的系数 C' 去掉，得到下面一个与函数(2.7)相差复常数倍但形式更简单的函数。即

$$f(z)=\exp\left(\frac{\alpha(c-1)}{2(c+1)}z^2+\frac{\alpha(a-ibc)}{c+1}z\right) \tag{2.9}$$

显然 $f\in F_\alpha^2$，其中 $\alpha,c>0$，$a,b\in\mathbb{R}$。最后，我们只需将函数(2.9)的相应计算结果代入系数 C' 即可。

为了方便书写，我们将函数(2.9)简记为

$$f(z)=\exp\left(\alpha\gamma z^2+\alpha\beta z\right) \tag{2.10}$$

其中

$$\gamma=\frac{c-1}{2(c+1)},\beta=\beta_1-i\beta_2=\frac{a}{c+1}-i\frac{bc}{c+1} \tag{2.11}$$

由于 $c>0$，则 $-\frac{1}{2}<\gamma<\frac{1}{2}$。

我们令 $z=x+iy$，其中 $x,y\in\mathbb{R}$。给出相应计算如下：

1) 对函数(2.9)计算 $\|f\|_{2,\alpha}^2$ 如下：

由(1.2)、(2.10)式得：

$$\|f\|_{2,\alpha}^2 = \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|e^{\alpha\gamma z^2}\right|^2\left|e^{\alpha\beta z}\right|^2 e^{-\alpha|z|^2}\mathrm{d}A(z) \tag{2.12}$$

因为

$$\left|e^{\alpha\gamma z^2}\right|^2 = e^{2\alpha\gamma\left(x^2-y^2\right)},\ \left|e^{\alpha\beta z}\right|^2 = e^{\alpha(2\beta_1 x+2\beta_2 y)},\ e^{-\alpha|z|^2} = e^{-\alpha\left(x^2-y^2\right)}$$

则进一步计算(2.12)得：

$$\begin{aligned}\|f\|_{2,\alpha}^2 &= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{(2\alpha\gamma-\alpha)x^2}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}} e^{-(2\alpha\gamma+\alpha)y^2}\mathrm{d}y\delta \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\delta\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\sqrt{\alpha-2\alpha\gamma}x\right)^2}\mathrm{d}\sqrt{\alpha-2\alpha\gamma}x\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\sqrt{2\alpha\gamma+\alpha}y\right)^2}\mathrm{d}\sqrt{2\alpha\gamma+\alpha}y\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-4\alpha^2\gamma^2}} \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\delta\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2\frac{\delta}{\sqrt{\alpha^2-4\alpha^2\gamma^2}}\end{aligned}$$

其中

$$\delta = \exp\left(\frac{\beta_1^2}{\alpha-2\alpha\gamma}+\frac{\beta_2^2}{\alpha+2\alpha\gamma}\right) \tag{2.13}$$

因为

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{2.14}$$

则

$$\|f\|_{2,\alpha}^2 = \frac{\alpha\delta}{\sqrt{\alpha^2-4\alpha^2\gamma^2}} \tag{2.15}$$

最后联立(2.11)、(2.13)和(2.15)式得：

$$\|f\|_{2,\alpha}^2 = \frac{|c+1|}{2\sqrt{c}}\exp\left(\frac{a^2+b^2c}{2\alpha(c+1)}\right) \tag{2.16}$$

2) 对函数(2.9)直接计算 $\langle zf, f\rangle$ 如下：

由(1.1)式和(1)的计算过程可得：

$$\begin{aligned}\langle zf, f\rangle &= \frac{\alpha}{\pi}\delta\int_{\mathbb{R}} x e^{(2\gamma-\alpha)\left(x+\frac{\beta_1}{2\gamma-\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}} e^{-(2\gamma+\alpha)\left(y-\frac{\beta_2}{2\gamma+\alpha}\right)^2}\mathrm{d}y + i\frac{\alpha}{\pi}\delta\int_{\mathbb{R}} e^{(2\gamma-\alpha)\left(x+\frac{\beta_1}{2\gamma-\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}} y e^{-(2\gamma+\alpha)\left(y-\frac{\beta_2}{2\gamma+\alpha}\right)^2}\mathrm{d}y \\ &= I_1 + iI_2\end{aligned}$$

先计算 I_1 得：

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{\alpha}{\pi}\delta\int_{\mathbb{R}}\left(x+\frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\right)e^{(2\alpha\gamma-\alpha)\left(x+\frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}} e^{-(2\alpha\gamma+\alpha)\left(y-\frac{\beta_2}{2\alpha\gamma+\alpha}\right)^2}\mathrm{d}y \\ &\quad -\frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\frac{\alpha}{\pi}\delta\int_{\mathbb{R}} e^{(2\alpha\gamma-\alpha)\left(x+\frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}} e^{-(2\alpha\gamma+\alpha)\left(y-\frac{\beta_2}{2\alpha\gamma+\alpha}\right)^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\delta\int_{\mathbb{R}} t e^{(2\alpha\gamma-\alpha)t^2}\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}} e^{-(2\alpha\gamma+\alpha)y^2}\mathrm{d}y - \frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\|f\|_{2,\alpha}^2\end{aligned}$$

因为

$$\int_{\mathbb{R}} t\mathrm{e}^{-(2\alpha\gamma-\alpha)t^2}\mathrm{d}t=0$$

于是

$$I_1=\frac{\beta_1}{\alpha-2\alpha\gamma}\|f\|_{2,\alpha}^2 \tag{2.17}$$

同理

$$I_2=\frac{\beta_2}{2\alpha\gamma+\alpha}\|f\|_{2,\alpha}^2 \tag{2.18}$$

最后联立(2.11)、(2.17)和(2.18)式有

$$\langle zf,f\rangle=\left(\frac{a}{2\alpha}+i\frac{b}{2\alpha}\right)\|f\|_{2,\alpha}^2 \tag{2.19}$$

3) 对函数(2.9)直接计算$\|zf\|_{2,\alpha}^2$如下：

由(1.2)式和(2)的计算过程可得：

$$\begin{aligned}\|zf\|_{2,\alpha}^2&=\frac{\alpha}{\pi}\delta\int_{\mathbb{R}} x^2\mathrm{e}^{(2\alpha\gamma-\alpha)\left(x+\frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-(2\alpha\gamma+\alpha)\left(y-\frac{\beta_2}{2\alpha\gamma+\alpha}\right)^2}\mathrm{d}y\\&\quad+\frac{\alpha}{\pi}\delta\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{(2\alpha\gamma-\alpha)\left(x+\frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}} y^2\mathrm{e}^{-(2\alpha\gamma+\alpha)\left(y-\frac{\beta_2}{2\alpha\gamma+\alpha}\right)^2}\mathrm{d}y\\&=I_3+I_4\end{aligned}$$

先计算I_3得：

$$\begin{aligned}I_3&=\frac{\alpha\delta}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(x+\frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\right)^2\mathrm{e}^{(2\alpha\gamma-\alpha)\left(x+\frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}} e^{-(2\alpha\gamma+\alpha)\left(y-\frac{\beta_2}{2\alpha\gamma+\alpha}\right)^2}\mathrm{d}y\\&\quad-\frac{2\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\frac{\alpha\delta}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(x+\frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\right)\mathrm{e}^{(2\alpha\gamma-\alpha)\left(x+\frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-(2\alpha\gamma+\alpha)\left(y-\frac{\beta_2}{2\alpha\gamma+\alpha}\right)^2}\mathrm{d}y\\&\quad+\frac{\beta_1^2}{(2\alpha\gamma-\alpha)^2}\frac{\alpha\delta}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{(2\alpha\gamma-\alpha)\left(x+\frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-(2\alpha\gamma+\alpha)\left(y-\frac{\beta_2}{2\alpha\gamma+\alpha}\right)^2}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因为

$$\int_{\mathbb{R}}\left(x+\frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\right)\mathrm{e}^{(2\alpha\gamma-\alpha)\left(x+\frac{\beta_1}{2\alpha\gamma-\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}} t\mathrm{e}^{(2\alpha\gamma-\alpha)t^2}\mathrm{d}t=0$$

进一步计算I_3得：

$$\begin{aligned}I_3&=\frac{\alpha}{\pi}\delta\int_{\mathbb{R}} t^2\mathrm{e}^{(2\alpha\gamma-\alpha)t^2}\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-(2\alpha\gamma+\alpha)y^2}\mathrm{d}y+\frac{\beta_1^2}{(2\alpha\gamma-\alpha)^2}\|f\|_{2,\alpha}^2\\&=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\frac{1}{\alpha-2\alpha\gamma}\frac{\alpha\delta}{\sqrt{\alpha^2-4\alpha^2\gamma^2}}+\frac{\beta_1^2}{(2\alpha\gamma-\alpha)^2}\|f\|_{2,\alpha}^2\end{aligned}$$

因为

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} t\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

综上

$$I_3 = \left[\frac{1}{2(\alpha-2\alpha\gamma)} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha-2\alpha\gamma)^2}\right]\|f\|_{2,\alpha}^2 \tag{2.20}$$

同理

$$I_4 = \left[\frac{1}{2(\alpha+2\alpha\gamma)} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha+2\alpha\gamma)^2}\right]\|f\|_{2,\alpha}^2 \tag{2.21}$$

联立(2.11)、(2.20)和(2.21)式得：

$$\|zf\|_{2,\alpha}^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{4\alpha^2} + \frac{(c+1)^2}{4\alpha c}\right)\|f\|_{2,\alpha}^2 \tag{2.22}$$

4) 对函数(2.9)直接计算$\dfrac{\|f'+zf\|_{2,\alpha}^2}{\|f\|_{2,\alpha}^2}$和$\dfrac{\|f'-zf\|_{2,\alpha}^2}{\|f\|_{2,\alpha}^2}$如下：

因为

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}^2 &= \|(2\gamma+1)+\beta f\|_{2,\alpha}^2 \\ &= (2\gamma+1)^2\|zf\|_{2,\alpha}^2 + |\beta|^2\|f\|_{2,\alpha}^2 + \mathrm{Re}\left[2(2\gamma+1)\bar{\beta}\langle zf, f\rangle\right]\end{aligned}$$

同理

$$\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}^2 = (2\gamma-1)^2\|zf\|_{2,\alpha}^2 + |\beta|^2\|f\|_{2,\alpha}^2 + \mathrm{Re}\left[2(2\gamma-1)\bar{\beta}\langle zf, f\rangle\right]$$

由(2.11)、(2.19)和(2.22)得

$$\begin{aligned}\frac{\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}^2}{\|f\|_{2,\alpha}^2} &= \left(\frac{c-1}{c+1}+1\right)^2\left(\frac{a^2+b^2}{4\alpha^2}+\frac{(c+1)^2}{4\alpha c}\right) \\ &\quad + \mathrm{Re}\left[\frac{4c}{c+1}\left(\frac{a}{c+1}+i\frac{bc}{c+1}\right)\left(\frac{a}{2\alpha}+i\frac{b}{2\alpha}\right)\right] + \frac{a^2+b^2c^2}{(c+1)^2} \\ &= \frac{c}{\alpha} + \left(\frac{a^2(\alpha+c)^2+(\alpha-1)^2b^2c^2}{\alpha^2(c+1)^2}\right)\end{aligned} \tag{2.23}$$

同理

$$\frac{\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}^2}{\|f\|_{2,\alpha}^2} = \frac{1}{\alpha c} + \left(\frac{b^2(\alpha+c)^2+(1-\alpha)^2a^2}{\alpha^2(c+1)^2}\right) \tag{2.24}$$

5) 对函数(2.9)直接计算$\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}$和$\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}$如下：

由(2.23)和(2.24)直接计算可得：

$$\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}=\left[\frac{c}{\alpha}+\left(\frac{a^2(\alpha+c)^2+(\alpha-1)^2b^2c^2}{\alpha^2(c+1)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\|f\|_{2,\alpha} \tag{2.25}$$

$$\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}=\left[\frac{1}{\alpha c}+\left(\frac{b^2(\alpha+c)^2+(1-\alpha)^2a^2}{\alpha^2(c+1)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\|f\|_{2,\alpha} \tag{2.26}$$

6) 对函数(2.9)直接计算 $\dfrac{\left\langle\frac{1}{\alpha}f'+zf,f\right\rangle}{\|f\|_{2,\alpha}^2}$ 和 $\dfrac{\left\langle\frac{1}{\alpha}f'-zf,f\right\rangle}{\|f\|_{2,\alpha}^2}$ 如下：

因为

$$\left\langle\frac{1}{\alpha}f'+zf,f\right\rangle=(2\gamma+1)\langle zf,f\rangle+\beta\|f\|_{2,\alpha}^2$$

$$\left\langle\frac{1}{\alpha}f'-zf,f\right\rangle=(2\gamma-1)\langle zf,f\rangle+\beta\|f\|_{2,\alpha}^2$$

所以由(2.16)、(2.19)式有：

$$\frac{\left\langle\frac{1}{\alpha}f'+zf,f\right\rangle}{\|f\|_{2,\alpha}^2}=\frac{(c+\alpha)a}{\alpha(c+1)}+i\frac{(1-\alpha)bc}{\alpha(c+1)} \tag{2.27}$$

同理

$$\frac{\left\langle\frac{1}{\alpha}f'-zf,f\right\rangle}{\|f\|_{2,\alpha}^2}=\frac{(1-\alpha)a}{\alpha(c+1)}-i\frac{(1+\alpha c)b}{\alpha(c+1)} \tag{2.28}$$

直接计算可验证，当 $\alpha=1$ 时，以上所有结果就是 F^2 中相应的结果。

7) 最后给出最小值讨论。

对任意的 $\alpha>0$，固定 $f\in F_\alpha^2$， A 为自伴算子，则对任意 $a,b\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}\|(A-a)f\|_{2,\alpha}^2&=\|Af\|_{2,\alpha}^2+|a|^2\|f\|_{2,\alpha}^2-2a\langle Af,f\rangle\\&=\|Af\|_{2,\alpha}^2+\|f\|_{2,\alpha}^2\left[\left|a-\frac{\langle Af,f\rangle}{\|f\|_{2,\alpha}^2}\right|^2-\frac{|\langle Af,f\rangle|^2}{\|f\|_{2,\alpha}^4}\right]\\&\ge\|Af\|_{2,\alpha}^2-\frac{|\langle Af,f\rangle|^2}{\|f\|_{2,\alpha}^2}\end{aligned}$$

即可得

$$\min_{a\in R}\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf-af\right\|_{2,\alpha}^2=\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}^2-\frac{\left|\left\langle\frac{1}{\alpha}f'+zf,f\right\rangle\right|^2}{\|f\|_{2,\alpha}^2} \tag{2.29}$$

其中等号成立当且仅当 $a=\dfrac{\left\langle \frac{1}{\alpha}f'+zf,f\right\rangle}{\|f\|_{2,\alpha}^2}$。

同理

$$\min_{b\in R}\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf+ibf\right\|_{2,\alpha}^2=\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}^2-\frac{\left|\left\langle \frac{1}{\alpha}f'-zf,f\right\rangle\right|^2}{\|f\|_{2,\alpha}^2} \tag{2.30}$$

且最小值当 $b=\dfrac{\left\langle \frac{1}{\alpha}f'-zf,f\right\rangle}{\|f\|_{2,\alpha}^2}i$ 时取得。

若 f 为 F_α^2 中的单位向量，即 $\|f\|_{2,\alpha}^2=1$ 时，可得到如下测不准原理的第一个推论：

推论 1 对任意的 $\alpha>0$，令 f 为 F_α^2 中的单位向量，则对所有 $a,b\in\mathbb{R}$ 有

$$\left(\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}^2-\left|\left\langle \frac{1}{\alpha}f'+zf,f\right\rangle\right|^2\right)\left(\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}^2-\left|\left\langle \frac{1}{\alpha}f'-zf,f\right\rangle\right|^2\right)\geq\frac{1}{\alpha^2}$$

等式成立当且仅当

$$f(z)=C'\exp\left(\frac{\alpha(c-1)}{2(c+1)}z^2+\frac{\alpha(a-ibc)}{c+1}z\right) \tag{2.31}$$

其中 c 为正实数，C' 为复数且

$$|C'|^2=\frac{2\sqrt{c}}{|c+1|}\exp\left(-\frac{a^2+b^2c}{2\alpha(c+1)}\right) \tag{2.32}$$

证明：由(2.16)式可得函数(2.31)的范数为：

$$\|f\|_{2,\alpha}^2=|C'|^2\frac{|c+1|}{2\sqrt{c}}\exp\left(\frac{a^2+b^2c}{2\alpha(c+1)}\right)$$

因为 $\|f\|_{2,\alpha}=1$，直接计算得：

$$|C'|^2=\frac{2\sqrt{c}}{|c+1|}\exp\left(-\frac{a^2+b^2c}{2\alpha(c+1)}\right)$$

又因为 $a,b\in\mathbb{R}$，f 为 F_α^2 中的单位向量，则由定理 3 得：

$$\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf-af\right\|_{2,\alpha}\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf+ibf\right\|_{2,\alpha}\geq\frac{1}{\alpha}$$

结合(2.29)和(2.30)对最小值的讨论得：

$$\left(\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}^2-\left|\left\langle \frac{1}{\alpha}f'+zf,f\right\rangle\right|^2\right)\left(\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}^2-\left|\left\langle \frac{1}{\alpha}f'-zf,f\right\rangle\right|^2\right)\geq\frac{1}{\alpha^2}$$

下面给出等号成立情形的详细证明：

1) 若 f 不具有(2.31)的形式，则由定理 3 可知对任意 $a,b\in\mathbb{R}$ 有

$$\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf-af\right\|_{2,\alpha}\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf+ibf\right\|_{2,\alpha}>\frac{1}{\alpha}$$

特别的我们令：

$$a=\left\langle\frac{1}{\alpha}f'+zf,f\right\rangle,\ b=i\left\langle\frac{1}{\alpha}f'-zf,f\right\rangle$$

则由最小值讨论可得：

$$\left(\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}^2-\left|\left\langle\frac{1}{\alpha}f'+zf,f\right\rangle\right|^2\right)\left(\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}^2-\left|\left\langle\frac{1}{\alpha}f'-zf,f\right\rangle\right|^2\right)>\frac{1}{\alpha^2}$$

此时等号不成立。

2) 若 f 具有(2.31)的形式，为区别开来我们记为 f_c，则由定理 3 可知

$$\left\|\frac{1}{\alpha}f_c'+zf_c-af_c\right\|_{2,\alpha}\left\|\frac{1}{\alpha}f_c'-zf_c+ibf_c\right\|_{2,\alpha}=\frac{1}{\alpha}\tag{2.33}$$

利用(2.27)和(2.28)直接计算内积可以得到

$$\left\langle\frac{1}{\alpha}f_c'+zf,f_c\right\rangle=\frac{(c+\alpha)a}{\alpha(c+1)}+i\frac{(1-\alpha)bc}{\alpha(c+1)}$$

$$i\left\langle\frac{1}{\alpha}f_c'-zf_c,f_c\right\rangle=\frac{(1-\alpha)a}{\alpha(c+1)}-i\frac{(1+\alpha c)b}{\alpha(c+1)}$$

即当 $a=\frac{(c+\alpha)a}{\alpha(c+1)}+i\frac{(1-\alpha)bc}{\alpha(c+1)},b=\frac{(1+\alpha c)b}{\alpha(c+1)}+i\frac{(1-\alpha)a}{\alpha(c+1)}$ 时，结合(2.29)、(2.30)式关于最小值问题的讨论可得

$$\left(\left\|\frac{1}{\alpha}f_c'+zf_c\right\|_{2,\alpha}^2-\left|\left\langle\frac{1}{\alpha}f_c'+zf_c,\ f_c\right\rangle\right|^2\right)\left(\left\|\frac{1}{\alpha}f_c'-zf_c\right\|_{2,\alpha}^2-\left|\left\langle\frac{1}{\alpha}f_c'-zf_c,f_c\right\rangle\right|^2\right)=\frac{1}{\alpha^2}$$

即不等式等号成立，证毕。

推论 2：若 $\alpha>0$，则对任意 $f\in F_\alpha^2$ 有

$$\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}\geq\frac{1}{\alpha}\|f\|_{2,\alpha}^2$$

等号成立当且仅当存在正实数 c 和复数 C' 使得

$$f(z)=C'\exp\left(\frac{\alpha(c-1)}{2(c+1)}z^2\right)\tag{2.34}$$

证明：在定理 3 中令 $a=b=0$ 即可，证毕。

推论 3：若 $\alpha>0$，对任意 $f\in F_\alpha^2$ 有

$$\frac{\sigma}{2}\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}^2+\frac{1}{2\sigma}\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}^2\geq\frac{1}{\alpha}\|f\|_{2,\alpha}^2$$

其中 $c,\sigma>0$，且 $c\sigma=1$。等号成立当且仅当存在正实数 c 和复数 C' 使得

$$f(z)=C'\exp\left(\frac{\alpha(1-\sigma)}{2(1+\sigma)}z^2\right)$$

证明：由推论 2 可得

$$\frac{1}{\alpha}\|f\|_{2,\alpha}^2 \le \left\|\sqrt{\sigma}\left(\frac{1}{\alpha}f'+zf\right)\right\|_{2,\alpha}^2 \left\|\left(\frac{1}{\alpha}f'-zf\right)\Big/\sqrt{\sigma}\right\|_{2,\alpha}^2$$
$$\le \frac{1}{2}\left[\left\|\sqrt{\sigma}\left(\frac{1}{\alpha}f'+zf\right)\right\|_{2,\alpha}^2+\left\|\left(\frac{1}{\alpha}f'-zf\right)\Big/\sqrt{\sigma}\right\|_{2,\alpha}^2\right]$$
$$=\frac{\sigma}{2}\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}^2+\frac{1}{2\sigma}\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}^2$$

等号成立当且仅当 f 为形如(2.34)且

$$\left\|\sqrt{\sigma}\left(\frac{1}{\alpha}f'+zf\right)\right\|_{2,\alpha}=\left\|\left(\frac{1}{\alpha}f'-zf\right)\Big/\sqrt{\sigma}\right\|_{2,\alpha}$$

由(2.25)、(2.26)式及 $a=b=0$ 知此等价于

$$f(z)=C'\exp\left(\frac{\alpha(c-1)}{2(c+1)}z^2\right), c\sigma=1$$

证毕。

除了以上几种测不准原理的推论形式外，我们还可以给出一些关于角和距离的几何形式的测不准原理如下：

推论 4：对任意的 $\alpha>0$，令 f 为 F_α^2 中任何非零函数，$\theta_\pm$ 分别为 f 和 $\frac{1}{\alpha}f'\pm zf$ 之间的夹角，则对所有 $a,b\in\mathbb{R}$ 有

$$\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}\left|\sin(\theta_+)\sin(\theta_-)\right|\ge\frac{1}{\alpha}\|f\|_{2,\alpha}^2$$

等式成立当且仅当

$$f(z)=C'\exp\left(\frac{\alpha(c-1)}{2(c+1)}z^2+\frac{\alpha(a-ibc)}{c+1}z\right)$$

其中 c 为正实数，C' 为任意非零复数。

证明：由于

$$\left\|\frac{f'}{\alpha}+zf\right\|_{2,\alpha}^2-\frac{\left|\langle f'/\alpha+zf,f\rangle\right|^2}{\|f\|_{2,\alpha}^2}=\left\|\frac{f'}{\alpha}+zf\right\|_{2,\alpha}^2\left[1-\left|\frac{\langle f'/\alpha+zf,f\rangle}{\|f'/\alpha+zf\|_{2,\alpha}\|f\|_{2,\alpha}}\right|^2\right]$$
$$=\left\|\frac{f'}{\alpha}+zf\right\|_{2,\alpha}^2\left(1-\cos^2(\theta_+)\right)$$

即

$$\left\|\frac{f'}{\alpha}+zf\right\|_{2,\alpha}^2-\frac{\left|\left\langle\frac{f'}{\alpha}+zf,f\right\rangle\right|^2}{\|f\|_{2,\alpha}^2}=\left\|\frac{f'}{\alpha}+zf\right\|_{2,\alpha}^2\sin^2(\theta_+) \tag{2.35}$$

$$\left\|\frac{f'}{\alpha}-zf\right\|_{2,\alpha}^2-\frac{\left|\left\langle\frac{f'}{\alpha}-zf,f\right\rangle\right|^2}{\|f\|_{2,\alpha}^2}=\left\|\frac{f'}{\alpha}-zf\right\|_{2,\alpha}^2\sin^2(\theta_-) \tag{2.36}$$

则由推论 1 知结论成立，证毕。

联立(2.35)、(2.36)、(2.23)、(2.24)、(2.27)、(2.28)式可分别计算得：

$$\sin^2(\theta_+)=1-\left|\frac{(c+\alpha)a}{\alpha(c+1)}+i\frac{(1-\alpha)bc}{\alpha(c+1)}\right|^2\left[\frac{c}{\alpha}+\frac{a^2(\alpha+c)^2+(\alpha-1)^2b^2c^2}{\alpha^2(c+1)^2}\right]^{-1}$$

$$\sin^2(\theta_-)=1+\left|\frac{(1-\alpha)a}{\alpha(c+1)}-i\frac{(1+\alpha c)b}{\alpha(c+1)}\right|^2\left[\frac{1}{\alpha c}+\frac{b^2(\alpha+c)^2+(1-\alpha)^2a^2}{\alpha^2(c+1)^2}\right]^{-1}$$

由此可求出此时两夹角 $\theta_\pm$ 的大小。

推论 5：对任意的 $\alpha>0$，令 f 为 F_α^2 中单位向量，则对任意 $\sigma>0$ 有

$$\left(\frac{\sigma}{2}\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}^2+\frac{1}{2\sigma}\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}^2\right)\left|\sin(\theta_+)\sin(\theta_-)\right|\geq\frac{1}{\alpha}$$

等号成立当且仅当 f 形如(2.31)且 $\sigma\left\|\frac{f'}{\alpha}+zf\right\|_{2,\alpha}=\left\|\frac{f'}{\alpha}-zf\right\|_{2,\alpha}$。

证明：由推论 4 得

$$\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}\left|\sin(\theta_+)\sin(\theta_-)\right|\geq\frac{1}{\alpha}$$

再由推论 3 的证明方法有

$$\frac{1}{\alpha}\leq\left(\frac{\sigma}{2}\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf\right\|_{2,\alpha}^2+\frac{1}{2\sigma}\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf\right\|_{2,\alpha}^2\right)\left|\sin(\theta_+)\sin(\theta_-)\right|$$

等号成立当且仅当 f 为形如(2.31)的函数且 $\sigma\left\|\frac{f'}{\alpha}+zf\right\|_{2,\alpha}=\left\|\frac{f'}{\alpha}-zf\right\|_{2,\alpha}$

由(2.25)、(2.26)式知此等价于

$$\sigma^2\left[\frac{c}{\alpha}+\left(\frac{a^2(\alpha+c)^2+(\alpha-1)^2b^2c^2}{\alpha^2(c+1)^2}\right)\right]=\frac{1}{\alpha c}+\left(\frac{b^2(\alpha+c)^2+(\alpha-1)^2a^2}{\alpha^2(c+1)^2}\right)$$

证毕。

推论 6：对任意的 $\alpha>0$，令 f 为 F_α^2 中单位向量，则

$$\left(\|f'/\alpha\|_{2,\alpha}^2+\|zf\|_{2,\alpha}^2\right)\left|\sin(\theta_+)\sin(\theta_-)\right|\geq\frac{1}{\alpha}$$

等成立当且仅当 f 形如(2.31)且

$$\frac{c}{\alpha}+\left(\frac{a^2(\alpha+c)^2+(\alpha-1)^2b^2c^2}{\alpha^2(c+1)^2}\right)=\frac{1}{\alpha c}+\left(\frac{b^2(\alpha+c)^2+(\alpha-1)^2a^2}{\alpha^2(c+1)^2}\right)$$

证明：由推论 5 中取 $\sigma=1$ 即得结论。证毕。

推论 7：对任意的 $\alpha>0$，令 f 为 F_α^2 中的非零向量，则对所有 $a,b\in\mathbb{R}$ 有

$$dist\left(\frac{1}{\alpha}f'+zf,[f]\right)dist\left(\frac{1}{\alpha}f'-zf,[f]\right)\geq\frac{1}{\alpha}\|f\|_{2,\alpha}^2$$

其中$[f]=\mathbb{C}f$为f张成的一维子空间，$dist(g,X)$为F_α^2中g到X的距离。等式成立当且仅当

$$f(z)=C'\exp\left(\frac{\alpha(c-1)}{2(c+1)}z^2+\frac{\alpha(a+ibc)}{c+1}z\right)$$

其中c为正实数，C'为非零复数。

证明：因为$dist\left(\frac{1}{\alpha}f'+zf,[f]\right)=\|f'/\alpha+zf\|_{2,\alpha}\left|\sin(\theta_+)\right|$。

同理$dist\left(\frac{1}{\alpha}f'-zf,[f]\right)=\|f'/\alpha-zf\|_{2,\alpha}\left|\sin(\theta_-)\right|$，则结论由推论 4 直接可得，证毕。

注：上述结论中的函数$\frac{f'}{\alpha}$或zf并不一定都属于F_α^2，当$\frac{f'}{\alpha}$或zf不属于F_α^2中时，上面所有结论中的每个不等式右边均为无穷大，综上，不等式总是成立的。

3. 复参变量下的测不准原理及其推广

注意到上面所讨论的测不准原理中a和b均为实参量，下面对a和b为复参量的情形做一个简单的讨论：

定理 4： 对任意的$\alpha>0$，令$f\in F_\alpha^2$，则对所有$a,b\in\mathbb{C}$有

$$\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf-af\right\|_{2,\alpha}\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf+ibf\right\|_{2,\alpha}\geq\frac{1}{\alpha}\|f\|_{2,\alpha}^2 \tag{3.1}$$

等式成立当且仅当a和b为实数且存在正实数c和复数C'使得

$$f(z)=C'\exp\left(\frac{\alpha(c-1)}{2(c+1)}z^2+\frac{\alpha(a-ibc)}{c+1}z\right)$$

证明：记$a=a_1+ia_2$，其中$a_1,a_2\in\mathbb{R}$，则

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf-af\right\|_{2,\alpha}^2&=\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf-a_1f-ia_2f\right\|_{2,\alpha}^2\\&=\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf-a_1f\right\|_{2,\alpha}^2+|a_2|^2\|f\|_{2,\alpha}^2\\&\quad-ia_2\left\langle f,\frac{1}{\alpha}f'+zf-a_1f\right\rangle+a_2i\left\langle\frac{1}{\alpha}f'+zf-a_1f,\ f\right\rangle\\&=\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf-a_1f\right\|_{2,\alpha}^2+|a_2|^2\|f\|_{2,\alpha}^2\\&\geq\left\|\frac{1}{\alpha}f'+zf-a_1f\right\|_{2,\alpha}^2\end{aligned}$$

同理记$b=b_1+ib_2$，其中$b_1,b_2\in\mathbb{R}$，则$\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf+ibf\right\|_{2,\alpha}^2\geq\left\|\frac{1}{\alpha}f'-zf+ib_1f\right\|_{2,\alpha}^2$，于是由定理 3 可知本定理成立，证毕。

以上所有结果均是对F_α^2中的两个特殊的自伴算子A和B讨论的，事实上，将自伴算子A和B一般化，以上结论均可成立。

定理 5: 对任意的$\alpha>0$，设$f\in F_\alpha^2$，T为F_α^2上的算子且满足$[T,T^*]=mI$，其中T^*是T的对偶算子，

m 是任意正实参数。则对所有 $f \in Dom\left(TT^*\right) \cap Dom\left(T^*T\right)$ 和 $a,b \in \mathbb{R}$，有

$$\left\|Tf + T^* f - af\right\|_{2,\alpha} \left\|Tf - T^* f + ibf\right\|_{2,\alpha} \geq m\|f\|_{2,\alpha}^2$$

等号成立当且仅当 $Tf + T^* f - af$ 和 $i\left(Tf - T^* f\right) - bf$ 相差纯虚数倍。

证明：同定理 3 的证法一致，证毕。

定理 6: 对任意的 $\alpha > 0$，设 $f \in F_\alpha^2$ 且 T 为 F_α^2 上的算子且满足 $\left[T, T^*\right] = mI$，其中 T^* 是 T 的对偶算子，m 是任意正实参数。则对所有 $f \in Dom\left(TT^*\right) \cap Dom\left(T^*T\right)$ 和 $a,b \in \mathbb{C}$，有

$$\left\|Tf + T^* f - af\right\|_{2,\alpha} \left\|Tf - T^* f + ibf\right\|_{2,\alpha} \geq m\|f\|_{2,\alpha}^2$$

等号成立当且仅当 $Tf + T^* f - af$ 和 $i\left(Tf - T^* f\right) - bf$ 相差纯虚数倍。

证明：同定理 4 的证法一致，证毕。

参考文献

[1] Zhu, K. (2012) Analysis on Fock Space. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8801-0

[2] Goh, S.S. and Micchelli, C.A. (1946) Uncertainty Principles in Hilbert Spaces. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **8**, 335-374.

[3] Zhu, K. (2015) Uncertainty Principles for the Fock Space. *Sci Sin Math*, **45**, 1.

[4] Gröchenig, K. (2001) Foundations of Time-Frequency Analysis. Birkhäuser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0003-1

[5] Cohen, L. (2013) Time-Frequence Analysis Theory and Applications. *Journal of Acoustical Society of America*, **134**, 4002. https://doi.org/10.1121/1.4830599

[6] Qu, F.F. and Deng, G.T. (2017) Further Discussion on Uncertainty Principles for the Fock Space. *Journal of Beijing Normal University* (*Natural Science*), **53**.

[7] Dym, H. and Mckean, H.P. (1972) Fourier Series and Integrals. *Academic Press*, **24**, 79.

[8] Havin, V. and Jöricke, B. (1994) The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-78377-7

[9] Folland, G.B. and Sitarm, A. (1997) The Uncertainty Principle: A Mathematical Survey. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, **3**, 207-238. https://doi.org/10.1007/BF02649110

[10] Faris, W.G. (1987) Inequalities and Uncertainty Principles. *Journal of Mathematical Physics*, **19**, 461. https://doi.org/10.1063/1.523667

[11] Selig, K.K. (2002) Uncertainty Principle Revisited. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, No. 14, 164.