Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 333-339
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84044

Hans汉斯

Meromorphic Function and Their Distribution of Zeros

Jianhao Lu, Li Chen

School of Mathematics and Computational Science, Wuyi University, Jiangmen Guangdong
Email: 335994956@qq.com

Received: Jun. 4th, 2018; accepted: Jun. 19th, 2018; published: Jun. 27th, 2018

Abstract

In this paper, we study zeros of difference product $f(z)^n \Delta f(z)(n \geq 2)$ and the value distribution of difference product $f(z)\Delta f(z)$ under the condition of $f(z)$ is a transcendental meromorphic function of finite order, where $\Delta f(z) = f(z+c) - f(z)$, c is a Non-zero constant such that $f(z+c) \not\equiv f(z)$.

Keywords

Transcendental Meromorphic Function, Difference Polynomials, Small Functions

亚纯函数及其差分乘积的零点分布

陆健豪，陈　莉

五邑大学数学与计算科学学院，广东 江门
Email: 335994956@qq.com

收稿日期：2018年6月4日；录用日期：2018年6月19日；发布日期：2018年6月27日

摘　要

本文主要研究$f(z)$为有限级超越亚纯函数时，差分乘积$f(z)^n \Delta f(z)(n \geq 2)$的零点情况以及$f(z)\Delta f(z)$的值分布情况，此处$\Delta f(z) = f(z+c) - f(z)$，$c$为任意非零常数满足$f(z+c) \not\equiv f(z)$。

关键词

超越亚纯函数，差分多项式，小函数

文章引用: 陆健豪, 陈莉. 亚纯函数及其差分乘积的零点分布[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 333-339.
DOI: 10.12677/pm.2018.84044

1. 引言与定理

本文使用了 Nevanlinna 值分布论中常用记号及其基本结论[1]。本文出现的“亚纯函数”表示在整个复平面上亚纯。另外本文使用$\sigma(f)$表示亚纯函数f的增长级，

$\lambda(f)$表示亚纯函数f的零点收敛指数，$\lambda(1/f)$表示亚纯函数f的极点收敛指数，记$\Delta f(z)=f(z+c)-f(z)$，c为任意非零常数使得$f(z+c)\not\equiv f(z)$。

Hayman 在[2]中证明了下面定理。

定理 A 若f为一个超越整函数且$n\geq 2$，则$f^n f'$可取所有非零复常数无限多次。

2007 年 Laine 和 Yang 在[3]中研究 Hayman 定理的差分形式的时候得出以下定理。

定理 B 设$f(z)$为有限级超越整函数，c为一非零复常数，则对于所有的$n\geq 2$，$f^n f(z+c)$可取所有非零值a无限多次。

我们知道$\Delta f(z)$能够看成$f'(z)$的差分形式，因此$f^n(z)f'(z)$的差分形式也可以看成$f^n(z)\Delta f(z)$，因此$f^n(z)\Delta f(z)$这一类差分乘积得到了数学家们的关注，其中 Chen 在[4]研究差分乘积$f^n(z)\Delta f(z)$的零点情况时得到以下定理。

定理 C 设$f(z)$为有限级超越整函数，c为任意非零复常数使得$f(z+c)\not\equiv f(z)$。

令$H_n(z)=f^n(z)\Delta f(z)$，$n\geq 2$为整数。则以下结论成立

1) 若$f(z)$具有无数多个零点，或者满足$\sigma(f)\neq 1$，则$H_n(z)$有无数多个零点。

2) 若$f(z)$仅有有限多个零点并且满足$\sigma(f)=1$，则$H_n(z)$仅有有限多个零点。

本文将上述定理的“整函数”条件推广到“亚纯函数”，得到以下定理。

定理 1 设$f(z)$为极点收敛指数$\lambda(1/f)<\sigma(f)<+\infty$的超越亚纯函数，$c$为任意非零复常数使得$f(z+c)\not\equiv f(z)$。$H_n(z)=f^n(z)\Delta f(z)$，$n\geq 2$为整数。则以下结论成立

1) 若$f(z)$具有无数多个零点，或者满足$\sigma(f)\neq 1$，则$H_n(z)$有无数多个零点。

2) 若$f(z)$仅有有限多个零点并且满足$\sigma(f)=1$，则$H_n(z)$仅有有限多个零点。

同时 Chen 在[4]中也考虑到差分乘积$f(z)^n\Delta f(z)$当$n=1$即$f(z)\Delta f(z)$的值分布情况，并得到以下定理。

定理 D $f(z)$为有限级超越整函数，且具有 Borel 例外值d,c为任意非零复常数使得$f(z+c)\not\equiv f(z)$。函数集$H(z)=f(z)\Delta f(z)$，则以下结论成立

1) $H(z)$可取任何非零复常数a无穷多次且满足$\lambda(H-a)=\sigma(f)$。

2) 若$d\neq 0$，则$H(z)$无有限的 Borel 例外值。

3) 若$d=0$，则 0 也是$H(z)$的 Borel 例外值，从而$H(z)$无有限非零的 Borel 例外值。

定理 E $f(z)$为有限级超越整函数,c为任意非零复常数使得$f(z+c)\not\equiv f(z)$。令$H(z)=f(z)\Delta f(z)$，则以下结论成立

1) 若$f(z)$仅有有限多个零点且满足$\sigma(f)\neq 1$，或者$f(z)$具有无穷多个零点，则$H(z)$有无数多个零点。

2) 若$f(z)$仅有有限多个零点并且满足$\sigma(f)=1$，则$H(z)$仅有有限多个零点。

本文将定理 D、E 中的整函数推广到亚纯函数得到如下定理。

定理 2 设 $f(z)$ 为具有两个 Borel 例外值 d,∞ 的有限级超越亚纯函数，c 为任意非零复常数使得 $f(z+c)\not\equiv f(z)$。令 $H(z)=f(z)\Delta f(z)$，则以下结论成立

1) $H(z)$ 可取任何非零复常数 a 无穷多次且满足 $\lambda(H-a)=\sigma(f)$。

2) 若 $d\neq 0$，则 $H(z)$ 无有限的 Borel 例外值。

3) 若 $d=0$，则 0 也是 $H(z)$ 的 Borel 例外值，从而 $H(z)$ 无有限非零的 Borel 例外值。

定理 3 设 $f(z)$ 为极点收敛指数 $\lambda(1/f)<\sigma(f)<+\infty$ 的超越亚纯函数，c 为任意非零复常数使得 $f(z+c)\not\equiv f(z)$。令 $H(z)=f(z)\Delta f(z)$，则以下结论成立

1) 若 $f(z)$ 仅有有限多个零点且满足 $\sigma(f)\neq 1$，或者 $f(z)$ 具有无穷多个零点，则 $H(z)$ 有无数多个零点。

2) 若 $f(z)$ 仅有有限多个零点并且满足 $\sigma(f)=1$，则 $H(z)$ 仅有有限多个零点。

最后，根据 Borel 例外值的定义，“$f(z)$ 为具有两个 Borel 例外值 d,∞ 的有限级超越亚纯函数”等价于 $\lambda(f)<\sigma(f)$，$\lambda(1/f)<\sigma(f)$。

2. 引理

本文定理的证明需要用到下述引理。

引理 1 [5] 设 $f(z)$ 为差分方程 $f^nP(z,f)=Q(z,f)$，的一个非常数有限级亚纯解，此处 $P(z,f),Q(z,f)$ 为 f 的差分多项式，其系数 $a_j(z)(j=1,\cdots,s)$ 为亚纯函数，令 $\delta<1$，若关于 f 及其平移的差分多项式 $Q(z,f)$ 的次数至多是 n，则有

$$m(r,P(z,f))=o\left(\frac{T(r+|c|,f)}{r^{\delta}}\right)+o(T(r,f))+O\left(\sum_{j=1}^{s}m(r,a_j)\right).$$

对所有的 r 除去一个关于 r 的可能存在的具有有限对数测度的例外集成立。

引理 2 [6] 设 $f_j(z)(j=1,\cdots,n)(n\geq 2)$ 为亚纯函数，$g_j(z)(j=1,\cdots,n)(n\geq 2)$ 为整函数且满足

1) $\sum_{j=1}^{n}f_j(z)\mathrm{e}^{g_j(z)}\equiv 0$；

2) 当 $1\leq j<k\leq n$ 时，$g_j(z)-g_k(z)$ 不是常数；

3) 当 $1\leq j\leq n,1\leq h<k\leq n$ 时，$T(r,f_j)=o\{T(r,\mathrm{e}^{g_h-g_k})\}(r\to\infty,r\notin E)$，$E\subset(1,\infty)$ 为具有有限线性测度或有限对数测度的集合。则有 $f_j(z)\equiv 0(j=1,\cdots,n)$。

引理 3 [7] 设 $f(z)$ 为非常数有限级亚纯函数，对 $c\in C\setminus(0)$，有

$$m\left(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\right)=S(r,f).$$

引理 4 [7] 设 $f(z)$ 为极点收敛指数 $\lambda(1/f)=\lambda<+\infty$ 的超越亚纯函数，c 为任意非零复常数，则对 $\forall\varepsilon>0$ 有

$$N(r,f(z+c))=N(r,f)+O(r^{\lambda-1+\varepsilon})+O(\log r).$$

引理 5 设 $f(z)$ 为极点收敛指数 $\lambda(1/f)<\sigma(f)<+\infty$ 的超越亚纯函数，c 为任意非零复常数，令 $H_n(z)=f^n(z)\Delta f(z)(n\geq 1)$，则 $\sigma(H_n)=\sigma(f)$。

证明：$$H_n(z)=f^n(z)\Delta f(z)=f(z)^{n+1}\frac{\Delta f(z)}{f(z)}. \tag{2.1}$$

由(2.1)以及引理 3、4 可得

$$m(r,H_n)\le(n+1)m(r,f)+m\left(r,\frac{\Delta f(z)}{f(z)}\right)=(n+1)m(r,f)+O\left(r^{\sigma-1+\varepsilon}\right).$$

$$N(r,H_n)\le nN(r,f)+N(r,\Delta f(z))\le(n+2)N(r,f)+O\left(r^{\lambda-1+\varepsilon}\right)+O(\log r).$$

于是

$$T(r,H_n)\le(n+2)T(r,f)+O\left(r^{\sigma-1+\varepsilon}\right)+O(\log r).$$

这意味着 $\sigma(H_n)\le\sigma(f)$。接下来证明 $\sigma(H_n)\ge\sigma(f)$。

由(2.1)以及引理 3、4 也可得

$$(n+1)m(r,f)=m\left(r,f^{n+1}\right)\le m(r,H_n)+m\left(r,\frac{f(z)}{\Delta f(z)}\right)=m(r,H_n)+O\left(r^{\sigma-1+\varepsilon}\right).$$

由 $\lambda(1/f)<\sigma(f)$ 得，$N(r,f)=O\left(r^{\sigma-1+\varepsilon}\right)$。

因此 $T(r,f)\le m(r,H_n)+O\left(r^{\sigma-1+\varepsilon}\right)$。从而，$\sigma(H_n)\ge\sigma(f)$ 结论成立。

3. 定理 1 的证明

证明：1) 因为 $f(z)$ 为超越亚纯函数且 $\Delta f(z)\not\equiv 0$，从而当 $f(z)$ 有无穷多个零点时，$H_n(z)$ 具有无穷多个零点。

现假设 $f(z)$ 仅有有限多个零点且 $\sigma(f)\ne 1$。又因为 $f(z)$ 为超越亚纯函数，故 $f(z)$ 能写成以下形式

$$f(z)=\frac{p_1(z)}{p_2(z)}\mathrm{e}^{q(z)}:=r(z)\mathrm{e}^{q(z)}. \tag{3.1}$$

此处 $q(z)$ 为多项式，$p_1(z)$ 为整函数满足 $\sigma(p_1)<\sigma(f)$，$p_2(z)$ 为 $f(z)$ 极点的典型乘积，因此 $\sigma(p_2)=\lambda(p_2)=\lambda(1/r)=\lambda(1/f)<\sigma(f)$。显然 $\sigma(r)<\sigma(f)$。

由(3.1)可得 $f(z+c)=r(z+c)\mathrm{e}^{q(z+c)}$。因此

$$H_n(z)=r(z)^n r(z+c)\mathrm{e}^{nq(z)+q(z+c)}-r(z)^{n+1}\mathrm{e}^{(n+1)q(z)}. \tag{3.2}$$

由引理 5 及 $f(z)$ 为超越函数，可得 $H_n(z)$ 为超越函数，故 $H_n(z)$ 能表示成如下形式

$$H_n(z)=\frac{g(z)}{p(z)}\mathrm{e}^{q_1(z)}:=r_1(z)\mathrm{e}^{q_1(z)}. \tag{3.3}$$

此处 $q_1(z)$ 为多项式，$g(z)$ 为整函数满足 $\sigma(g)<\sigma(H_n)$，$p(z)$ 为 $H_n(z)$ 极点的典型乘积，因此 $\sigma(p)=\lambda(p)=\lambda(1/r_1)=\lambda(1/H_n)<\sigma(H_n)$。显然 $\sigma(r_1)<\sigma(H_n)$。

由(3.2) (3.3)可得

$$r(z)^n r(z+c)\mathrm{e}^{nq(z)+q(z+c)}-r(z)^{n+1}\mathrm{e}^{(n+1)q(z)}=r_1(z)\mathrm{e}^{q_1(z)}. \tag{3.4}$$

假设 $q(z)=a_kz^k+a_{k-1}z^{k-1}+\cdots+a_0, a_k\ne 0$，此处 $a_k,\cdots,a_0$ 为常数，由 $\sigma(f)\ne 1$ 可知 $k\ge 2$。因此 $q(z+c)=a_kz^k+(kca_k+a_{k-1})z^{k-1}+a'_{k-2}z^{k-2}+\cdots+a'_0$，此处 $a'_{k-2},\cdots,a'_0$ 为常数。

由 $a_k\ne 0$ 可知 $(n+1)a_{k-1}\ne kca_k+(n+1)a_{k-1}$，故 $(n+1)q(z)-(nq(z)+q(z+c))$ 不为常数。

若 $nq(z)+q(z+c)-q_1(z)$ 和 $(n+1)q(z)-q_1(z)$ 都不为常数，则由引理 2 及(3.4)可得 $r(z)^n r(z+c)\equiv 0, r(z)^{n+1}\equiv 0, r(z)\equiv 0$。这是矛盾的。

若 $nq(z)+q(z+c)-q_1(z)=b$，b 为非零常数。即 $nq(z)+q(z+c)-b=q_1(z)$，因此(3.4)可变为

$$\left[r(z)^n r(z+c)-\mathrm{e}^{-b}r_1(z)\right]\mathrm{e}^{nq(z)+q(z+c)}-r(z)^{n+1}\mathrm{e}^{(n+1)q(z)}=0. \quad (3.5)$$

由(3.5)及引理 2 可得 $r(z)^n r(z+c)-\mathrm{e}^{-b}r_1(z)\equiv 0, r(z)^{n+1}\equiv 0$。这也是矛盾的。

若 $(n+1)q(z)-q_1(z)$ 为常数，则可由同样的方法得到矛盾。因此可得 $H_n(z)$ 有无穷多个零点。

2) 假设 $f(z)$ 仅有有限多个零点且 $\sigma(f)=1$。则 $f(z)$ 可写成如下形式

$$f(z)=\frac{p_1^*(z)}{p_2^*(z)}\mathrm{e}^{az+d}:=r^*(z)\mathrm{e}^{az+d}. \quad (3.6)$$

此处 a,d 为常数，$p_1^*(z)$ 为多项式，$p_2^*(z)$ 为 $f(z)$ 极点的典型乘积，因此 $\sigma(p_2^*)=\lambda(p_2^*)=\lambda(1/r^*)=\lambda(1/f)<\sigma(f)$。显然 $\sigma(r^*)<\sigma(f)$。

由(3.6)可得

$$f(z+c)=r^*(z+c)\mathrm{e}^{ac}\mathrm{e}^{az+d}, H_n(z)=\left\{r^*(z)^n\left(r^*(z+c)\mathrm{e}^{ac}-r^*(z)\right)\right\}\mathrm{e}^{(n+1)(az+d)}.$$

因为 $f(z+c)\not\equiv f(z)$，所以 $r^*(z+c)\mathrm{e}^{ac}-r^*(z)\not\equiv 0$。又因为 $r^*(z)\not\equiv 0$，故 $H_n(z)$ 仅有有限多个零点。

4. 定理 2 的证明

我们先证明第 2)和 3)。

2) 假设 $d\neq 0$，则 $f(z)$ 能写成如下形式。

$$f(z)=d+\frac{p_1(z)}{p_2(z)}\mathrm{e}^{az^m}:=d+r(z)\mathrm{e}^{az^m}. \quad (4.1)$$

此处 a 为非零常数，m 为正整数，$p_1(z)$ 为整函数满足 $\sigma(p_1)<\sigma(f)$，$p_2(z)$ 为 $f(z)$ 极点的典型乘积，因此 $\sigma(p_2)=\lambda(p_2)=\lambda(1/r)=\lambda(1/f)<\sigma(f)$。显然 $\sigma(r)<\sigma(f)$。因此

$$f(z+c)=d+r(z+c)r'(z)\mathrm{e}^{az^m}. \quad (4.2)$$

此处 $r'(z)$ 为整函数，且满足 $\sigma(f)=m-1$。由(4.1) (4.2)得

$$H(z)=r(z)\left[r(z+c)r'(z)-r(z)\right]\mathrm{e}^{2az^m}+d\left[r(z+c)r'(z)-r(z)\right]\mathrm{e}^{az^m}. \quad (4.3)$$

$$\text{由 } f(z+c)\not\equiv f(z)\text{，可得 } r(z+c)r'(z)-r(z)\not\equiv 0 \quad (4.4)$$

由(4.3) (4.4)可得 $H(z)$ 为有限级超越亚纯函数，且满足 $\sigma(H)=\sigma(f)=m$。

若 $H(z)$ 有 Borel 例外值 d^*，则 $H(z)$ 可表示成如下形式。

$$H(z)=d^*+\frac{g(z)}{p(z)}\mathrm{e}^{bz^m}:=d^*+r^*(z)\mathrm{e}^{bz^m}. \quad (4.5)$$

此处 b 为非零常数，m 为正整数，$g(z)$ 为整函数满足 $\sigma(g)<\sigma(H)$，$p(z)$ 为 $H(z)$ 极点的典型乘积，因此 $\sigma(p)=\lambda(p)=\lambda(1/r^*)=\lambda(1/H)<\sigma(H)$。$\sigma(r^*)<\sigma(H)=m$。

由(4.3) (4.5)可得

$$r(z)\left[r(z+c)r'(z)-r(z)\right]\mathrm{e}^{2az^m}+d\left[r(z+c)r'(z)-r(z)\right]\mathrm{e}^{az^m}-d^*-r^*(z)\mathrm{e}^{bz^m}=0. \quad (4.6)$$

若 $b\neq a$ 且 $b\neq 2a$，则由引理 2 和(4.6)可得

$$r(z+c)r'(z)-r(z)\equiv 0,$$

这是矛盾的。

若 $b=a$ 或 $b=2a$，则利用定理 1 中得出(3.5)式的方法也可以推出矛盾。因此，$H(z)$ 无有限的 Borel 例外值，(2)证明完毕。

下证(3)，若 $d=0$ 为 $f(z)$ 的 Borel 例外值，利用同样的方法由(4.3)可得

$$H(z)=r(z)\left[r(z+c)r'(z)-r(z)\right]\mathrm{e}^{2az^m}. \tag{4.7}$$

因为 $r(z)\left[r(z+c)r'(z)-r(z)\right]\not\equiv 0$ 且 $\sigma\left(r(z)\left[r(z+c)r'(z)-r(z)\right]\right)<m$，所以 0 为 $H(z)$ 的 Borel 例外值，从而 $H(z)$ 再无非零有限的 Borel 例外值。

最后证明 1)，由 2) 3)可知若 $f(z)$ 有有限的 Borel 例外值，则任何非零有限值 a 必不为 $H(z)$ 的 Borel 例外值。因此 $H(z)$ 可取 a 无穷多次，因此可得 $\lambda(H-a)=\sigma(H)=\sigma(f)$。

5. 定理 3 的证明

1) 因为 $f(z)$ 为亚纯函数且 $\Delta f(z)\not\equiv 0$，所以当 $f(z)$ 有无穷多个零点时 $H(z)$ 也有无穷多个零点。

现假设 $f(z)$ 有有限多个零点且 $\sigma(f)\neq 1$，因此 $f(z)$ 能写成如下形式

$$f(z)=\frac{p_1(z)}{p_2(z)}\mathrm{e}^{h(z)}:=r(z)\mathrm{e}^{h(z)}. \tag{5.1}$$

此处 $h(z)$ 为多项式，$\deg h(z)\geq 2$，$p_1(z)$ 为多项式，$p_2(z)$ 为 $f(z)$ 极点的典型乘积，因此 $\sigma(p_2)=\lambda(p_2)=\lambda(1/r)=\lambda(1/f)<\sigma(f)$。显然 $\sigma(r)<\sigma(f)$。

由(5.1)可得 $f(z+c)=r(z+c)\mathrm{e}^{h(z+c)}$。因此

$$H(z)=r(z)r(z+c)\mathrm{e}^{h(z)+h(z+c)}-r(z)^2\mathrm{e}^{2h(z)}. \tag{5.2}$$

由引理 5 及 $f(z)$ 为超越函数，可得 $H(z)$ 为超越函数，故 $H(z)$ 能表示成如下形式

$$H(z)=\frac{g(z)}{p(z)}\mathrm{e}^{h^*(z)}:=r^*(z)\mathrm{e}^{h^*(z)}. \tag{5.3}$$

此处 $h^*(z)$ 为多项式，$g(z)$ 为整函数满足 $\sigma(g)<\sigma(H)$，$p(z)$ 为 $H(z)$ 极点的典型乘积，因此 $\sigma(p)=\lambda(p)=\lambda(1/r^*)=\lambda(1/H)<\sigma(H)$。显然 $\sigma(r^*)<\sigma(H)$。

由(5.2) (5.3)可得

$$r(z)r(z+c)\mathrm{e}^{h(z)+h(z+c)}-r(z)^2\mathrm{e}^{2h(z)}=r^*(z)\mathrm{e}^{h^*(z)}. \tag{5.4}$$

若 $h(z)+h(z+c)-h^*(z)$ 和 $2h(z)-h^*(z)$ 都不为常数，则由引理 2 及(5.4)可得 $r(z)r(z+c)\equiv 0$，$r(z)^2\equiv 0$，$r^*(z)\equiv 0$。这是矛盾的。

若 $h(z)+h(z+c)-h^*(z)$ 或 $2h(z)-h^*(z)$ 为常数，则用证明定理 1 的方法也可以得到矛盾结论。因此 $H(z)$ 有无穷多个零点。

2) 假设 $f(z)$ 仅有有限多个零点且 $\sigma(f)=1$。则用证明定理 1 中证明 2)的方法也可以得出结论。因此定理 3 证明完毕。

基金项目

广东省自然科学基金资助项目(2016A030313002)，广东高校特色创新项目(2016KTSCX145)。

参考文献

[1] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[2] Hayman, W.K. (1959) Picard Values of Meromorphic Functions and Their Derivatives. *Annals of Mathematics*, **70**,

9-42. https://doi.org/10.2307/1969890

[3] Laine, I. and Yang, C.C. (2007) Value Distribution of Difference Polynomials. *Proceedings of the Japan Academy*, *Series A*, *Mathematical Sciences*, **83**, 148-151. https://doi.org/10.3792/pjaa.83.148

[4] Chen, Z.X. (2011) Value Distribution of Products of Meromorphic Functions and Their Differences. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **15**, 1411-1421. https://doi.org/10.11650/twjm/1500406353

[5] Chen, Z.X. (2014) Complex Differences and Difference Equations. Mathematics Monograph Series 29. Science Press, Beijing.

[6] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 79-80. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3626-8

[7] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of $f(z+\eta)$ and Difference Equations in the Complex Plane. *The Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1