Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 411-425
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84055

Hans汉斯

Existence of Multiple Positive Solutions for Multi-Parameter Second-Order Differential Systems with Indefinite Weight Functions

Peige Qin, Chunyan Xue

School of Applied Science, Beijing Information Science & Technology University, Beijing
Email: peige_qin@hotmail.com, xue_chunyan@126.com

Received: Jun. 26th, 2018; accepted: Jul. 11th, 2018; published: Jul. 18th, 2018

Abstract

This paper investigates the existence of multiple positive solutions for a class of multi-parameter second-order differential systems with indefinite weight functions. According to the different values of parameters λ and μ, and combining fixed-point theorem of cone expansion and compression of norm type, the results of at least two positive solutions and three positive solutions for the second-order differential systems are established. Finally, two examples are included to illustrate the rationality of the assumptions of obtained theorems.

Keywords

Indefinite Weight Function, Multi-Parameter, The Existence of Multiple Positive Solutions, Second-Order Differential Systems, The Fixed Point Theorem

具变号权函数的多参数二阶微分系统多个正解的存在性

秦培歌，薛春艳

北京信息科技大学理学院，北京
Email: peige_qin@hotmail.com, xue_chunyan@126.com

收稿日期：2018年6月26日；录用日期：2018年7月11日；发布日期：2018年7月18日

摘　要

本文研究了一类具变号权函数的多参数二阶微分系统多个正解的存在性。根据参数λ和μ的不同取值，并

文章引用：秦培歌，薛春艳．具变号权函数的多参数二阶微分系统多个正解的存在性[J]．理论数学，2018，8(4): 411-425. DOI: 10.12677/pm.2018.84055

结合范数形式的锥拉伸与压缩不动点定理，得到了二阶微分系统至少存在两个正解和三个正解的结果。最后，通过例子验证定理的条件是合理的。

关键词

变号权函数，多参数，多个正解存在性，二阶微分系统，不动点定理

1. 引言

考虑如下具变号权函数的多参数二阶微分系统：

$$\begin{cases} -u''=a(t)\varphi u+\lambda\omega(t)f(u), & 0<t<1, \\ -\varphi''=\mu b(t)u, & 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=0, \\ \varphi(0)=\varphi(1)=0. \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\lambda,\mu>0$ 是两个参数，且 $a(t),b(t),\omega(t)$ 在 $[0,1]$ 上可能变号。

令 $J=[0,1], R=(-\infty,+\infty), R_+=[0,+\infty)$，且 a,b,ω 和 f 分别满足如下条件：

(H1) $a,b,\omega:J\to R$ 是连续的，且存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$\begin{cases} a(t),b(t),\omega(t)\ge 0, & t\in[0,\xi], \\ a(t),b(t),\omega(t)\le 0, & t\in[\xi,1], \end{cases}$$

且 $a(t),b(t),\omega(t)$ 在 J 的任意子区间上不恒为零；

(H2) $f:R_+\to R_+$ 是连续的，且当 $u>0$ 时，$f(u)>0$；

(H3) 存在 $0<\theta<+\infty,\theta\ne 1$ 和 $k_1,k_2>0$ 使得 $k_1u^\theta\le f(u)\le k_2u^\theta, u\in R_+$；

(H4) 存在 $0<c\le 1$，使得 $f(u)\ge c\psi(u), u\in R_+$。

其中，$\psi(u)=\max\{f(\rho):0\le\rho\le u\}$。

当 $\lambda=\mu=1$ 时，系统(1)退化为 Wang 和 An 在文献[1]中研究的问题，利用不动点定理得到了该问题至少存在一个正解和两个正解的充分条件。但是，在文献[1]中，Wang 和 An 只考虑了 λ,μ 恒为 1 的情况，本文则考虑 $\lambda,\mu\not\equiv 1$ 时的情况，并且得到了系统(1)至少存在三个正解的结果。

在过去的几十年中，对于权函数不变号的二阶微分方程问题，众多学者进行了研究并取得很多成果[2]-[7]。例如，在文献[5]中，卢和冯研究了具偏差变元的二阶微分方程边值问题，并得到了三个正解的存在性。但是在这些文献中，作者都没有考虑权函数变号的情况，而对具变号权函数的微分方程边值问题的研究，在物理中有一定的意义。比如，量子力学、半导体理论以及核反应中的一些数学模型都可以归结为具变号权函数的微分方程问题[8] [9] [10]。因此，这类问题受到了越来越多的学者的关注，并获得了一些优秀成果[11]-[17]。文献[11]中，Jiang 和 Yao 研究了如下半线性两点边值问题

$$\begin{cases} w''(t)+h(t)f(w(t))=0, 0\le t\le 1, \\ w(0)=w(1)=0 \end{cases}$$

正解的存在性。其中，$h(t)$ 在 $[0,1]$ 上可能变号。作者运用 Schauder 不动点定理给出了上述问题正解存在性定理。

但是到目前为止，关于含参数的具变号权函数二阶微分系统多个正解的存在性的研究还不多见。本文致力于研究具变号权函数的多参数二阶微分系统存在多个正解的充分条件。

2. 预备知识

定义

$$a^+(t)=\max\{a(t),0\},\ a^-(t)=-\min\{a(t),0\};$$
$$b^+(t)=\max\{b(t),0\},\ b^-(t)=-\min\{b(t),0\};$$
$$\omega^+(t)=\max\{\omega(t),0\},\omega^-(t)=-\min\{\omega(t),0\}.$$

则有

$$a(t)=a^+(t)-a^-(t),\ b(t)=b^+(t)-b^-(t),\ \omega(t)=\omega^+(t)-\omega^-(t).$$

系统(1)等价于下列两个边值问题：

$$\begin{cases}-u''=a(t)\varphi u+\lambda\omega(t)f(u),0<t<1,\\ u(0)=u(1)=0,\end{cases}\tag{2}$$

和

$$\begin{cases}-\varphi''=\mu b(t)u,\quad 0<t<1,\\ \varphi(0)=\varphi(1)=0.\end{cases}\tag{3}$$

定义 2.1. 若 $(u,\varphi)\in C^2(0,1)\times C^2(0,1)$ 是系统(1)的一个正解，当且仅当 (u,φ) 满足系统(1)，且 $u,\varphi\ge 0$，$u,\varphi\not\equiv 0$。

引理 2.1. 假设条件(H1)-(H2)成立，则 $u\in C^2(0,1)$ 是问题(2)的一个解当且仅当 u 是下列积分方程的一个解

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)a(s)\varphi(s)u(s)\mathrm{d}s+\lambda\int_0^1 G(t,s)\omega(s)f(u(s))\mathrm{d}s.\tag{4}$$

其中，

$$G(t,s)=\begin{cases}t(1-s),\quad 0\le t\le s\le 1,\\ s(1-t),\quad 0\le s\le t\le 1.\end{cases}\tag{5}$$

证明：引理 2.1 的证明类似于文献[7]中引理 1.1 的证明。□

由 $G(t,s)$ 的定义可知，它有如下性质：

命题 2.1. $G(t,s)$ 由(5)式定义，则有

$$G(t,s)>0,\quad \forall t,s\in(0,1);\ G(t,s)\ge 0,\quad \forall t,s\in J,$$
$$G(t,t)G(s,s)\le G(t,s)\le G(s,s),\quad \forall t,s\in J.$$

引理 2.2. 假设条件(H1)成立，则问题(3)有一个解 φ 且

$$\varphi(t)=\mu\int_0^1 G(t,s)b(s)u(s)\mathrm{d}s.\tag{6}$$

证明：引理 2.2 的证明类似于文献[7]中引理 1.1 的证明。□

由引理 2.1 和引理 2.2 可得下列引理 2.3。

引理 2.3. 假设条件(H1)~(H2)成立，则 (u,φ) 是系统(1)的一个解当且仅当 u 是下列积分方程的解

$$u(t)=\mu\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)a(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\int_0^1 G(t,s)\omega(s)f(u(s))\mathrm{d}s, \tag{7}$$

且 φ 满足(6)式。

为了获得系统(1)正解的存在性，需要假设下列条件成立：

(H5) 存在 $0<\sigma_1<\xi$ 使得

$$\sigma_1\int_{\sigma_1}^{\xi} G(t,s)b^+(s)\mathrm{d}s\ge\xi\int_{\xi}^{1} G(t,s)b^-(s)\mathrm{d}s;$$

(H6) 存在 $0<\sigma_2<\xi$ 使得

$$\sigma_2\int_{\sigma_2}^{\xi} G(t,s)G(s,s)a^+(s)\mathrm{d}s\ge\xi\int_{\xi}^{1} G(t,s)a^-(s)\mathrm{d}s;$$

(H7) 存在 $0<\sigma_3<\xi$ 使得

$$\sigma_3^{\theta}c^2k_1\int_{\sigma_3}^{\xi} G(t,s)\omega^+(s)\mathrm{d}s\ge k_2\xi^{\theta}\int_{\xi}^{1} G(t,s)\omega^-(s)\mathrm{d}s.$$

令 $X=C[0,1]$。对于 $u\in X$，

$$\|u\|=\max_{t\in J}|u(t)|,$$

则 $(X,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间。

记

$$C_0^+[0,1]=\left\{u\in C[0,1]:\min_{t\in J}u(t)\ge 0,u(0)=u(1)=0\right\}.$$

定义锥 K 如下：

$$K=\left\{u\in C_0^+[0,1]:u\text{在}[0,\xi]\text{上凹},\text{在}[\xi,1]\text{上凸}\right\}. \tag{8}$$

对任意 $u\in K$，显然有 $\|u\|=\max_{t\in[0,\xi]}u(t)$。

对于 $r>0$，令

$$K_r=\left\{u\in K:\|u\|<r\right\}.$$

定义算子 $T:K\to X$ 如下：

$$(Tu)(t)=\mu\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)a(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\int_0^1 G(t,s)\omega(s)f(u(s))\mathrm{d}s. \tag{9}$$

由以上引理，我们可以得到引理 2.4。

引理 2.4. 假设条件(H1)~(H2)成立，则 (u,φ) 是系统(1)的解当且仅当 u 是算子 T 的不动点且 φ 满足(6)式。

引理 2.5. 假设条件(H1)~(H7)成立，则 $T(K)\subset K$ 且算子 $T:K\to K$ 是全连续的。

证明：引理 2.5 的证明类似于文献[1]中引理 2.2 的证明。□

下面给出本文运用的主要引理，见文献[18]。

引理 2.6. 设 P 是 Banach 空间 E 上的一个锥，Ω_1,Ω_2 是 E 中的有界开集，并且满足 $\theta\in\Omega_1,\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$。若算子 $T:P\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to P$ 全连续，则当下述条件满足其一时，算子 T 在 $P\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 上至少有一个不动点：

1) $\|Tx\|\le\|x\|, \forall x\in P\cap\partial\Omega_1; \|Tx\|\ge\|x\|, \forall x\in P\cap\partial\Omega_2$;

2) $\|Tx\|\ge\|x\|, \forall x\in P\cap\partial\Omega_1; \|Tx\|\le\|x\|, \forall x\in P\cap\partial\Omega_2$.

3. 主要结论

在本节中，我们运用引理 2.6 讨论系统(1)存在多个正解时的参数的最优区间。

定理 3.1. 假设条件(H1)~(H7)成立。当 $\theta>1$ 时，存在 $\lambda_0,\mu_1,\mu_2>0$，使得当 $\lambda\in[\lambda_0,+\infty)$，$\mu\in(\mu_2,\mu_1]$ 时，系统(1)至少存在两个正解。

证明： 一方面，由于 $\theta>1$，根据条件(H3)，得

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}\le\lim_{u\to 0}\frac{k_2u^\theta}{u}=0.$$

这表明存在 $r'>0$，使得

$$f(u)\le\varepsilon u,\quad 0\le u\le r'.$$

其中，ε 满足 $2\lambda\varepsilon M_1<1$，$M_1=\max_{t\in J}\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)\mathrm{d}s$。

令

$$M=\max_{t\in J}\int_0^\xi\int_0^\xi G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s. \tag{10}$$

选取 $r=\min\left\{\frac{1}{2\mu M},\frac{r'}{2}\right\}$，则有

$$\mu\le\mu_1=\frac{1}{2Mr}. \tag{11}$$

对任意 $u\in\partial K_r$，有 $0\le u(t)\le\|u\|=r, t\in J$，则 $f(u(t))\le\varepsilon u(t)\le\varepsilon r,\ t\in J$ 成立。进而有

$$\begin{aligned}
(Tu)(t)&=\mu\int_0^1\int_0^1G(t,s)G(s,\tau)a(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\int_0^1G(t,s)\omega(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\
&=\mu\int_0^\xi\int_0^1G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s-\mu\int_\xi^1\int_0^1G(t,s)G(s,\tau)a^-(s)\\
&\quad\cdot b(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s-\lambda\int_\xi^1G(t,s)\omega^-(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\
&\le\mu\int_0^\xi\int_0^1G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\
&=\mu\int_0^\xi\int_0^\xi G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\
&\quad-\mu\int_0^\xi\int_\xi^1G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^-(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\
&\le\mu\int_0^\xi\int_0^\xi G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\
&\le\mu r^2\max_{t\in J}\int_0^\xi\int_0^\xi G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\max_{t\in J}\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)\varepsilon r\mathrm{d}s\\
&=\mu Mr^2+\lambda\varepsilon M_1r<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r=\|u\|.
\end{aligned}$$

即

$$\|Tu\|<\|u\|,\quad\forall u\in\partial K_r. \tag{12}$$

令

$$N=\min_{\frac{\sigma_2}{2}\le t\le\sigma_2}\delta(t)\min_{\frac{\sigma_1}{2}\le t\le\sigma_1}\delta(t)\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_2}{2}}^{\sigma_2}G(t,s)a^+(s)\int_{\frac{\sigma_1}{2}}^{\sigma_1}G(s,\tau)b^+(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s, \tag{13}$$

$$N_1=\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_3}{2}}^{\sigma_3}G(t,s)\omega^+(s)\mathrm{d}s.$$

另一方面，由于$\theta>1$，根据条件(H3)，得

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}\geq\lim_{u\to+\infty}\frac{k_1u^\theta}{u}=+\infty.$$

这表明存在$R'>0$，使得

$$f(u)\geq\eta u,\ u\geq R'.$$

其中，η满足$2\lambda\eta\Gamma N_1\geq1$且

$$\Gamma=\min_{\frac{\sigma_3}{2}\leq t\leq\sigma_3}\delta(t)>0,\quad \delta(t)=\min\left\{\frac{t}{\xi},\frac{\xi-t}{\xi}\right\},t\in[0,\xi]. \tag{14}$$

如果$u\in K$，由$u(t)$在$[0,\xi]$上凹可得

$$u(t)\geq\delta(t)\|u\|,\quad t\in[0,\xi]. \tag{15}$$

进一步可得

$$\min_{\frac{\sigma_3}{2}\leq t\leq\sigma_3}u(t)\geq\min_{\frac{\sigma_3}{2}\leq t\leq\sigma_3}\delta(t)\|u\|=\Gamma\|u\|. \tag{16}$$

选取$R=\max\left\{(2\mu N)^{-1},\frac{R'}{\Gamma},r'\right\}+1$，则有

$$\mu>\mu_2'=\frac{1}{2NR}.$$

对任意$u\in\partial K_R$，由(16)式可得

$$\min_{\frac{\sigma_3}{2}\leq t\leq\sigma_3}u(t)\geq\Gamma\|u\|=\Gamma R>R'$$

和

$$\begin{aligned}\|Tu\|&=\mu\max_{t\in J}\int_0^1\int_0^1G(t,s)G(s,\tau)a(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\max_{t\in J}\int_0^1G(t,s)\omega(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\
&\geq\mu\max_{t\in J}\int_0^{\sigma_2}G(t,s)a^+(s)u(s)\int_0^1G(s,\tau)b(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\max_{t\in J}\int_0^{\sigma_3}G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\
&\geq\mu\max_{t\in J}\int_0^{\sigma_2}G(t,s)a^+(s)u(s)\int_0^{\sigma_1}G(s,\tau)b^+(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_3}{2}}^{\sigma_3}G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\
&\geq\mu\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_2}{2}}^{\sigma_2}G(t,s)a^+(s)\delta(s)\|u\|\int_{\frac{\sigma_1}{2}}^{\sigma_1}G(s,\tau)b^+(\tau)\delta(\tau)\|u\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_3}{2}}^{\sigma_3}G(t,s)\omega^+(s)\eta u(s)\mathrm{d}s\\
&\geq\mu R^2\min_{\frac{\sigma_2}{2}\leq t\leq\sigma_2}\delta(t)\min_{\frac{\sigma_1}{2}\leq t\leq\sigma_1}\delta(t)\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_2}{2}}^{\sigma_2}G(t,s)a^+(s)\int_{\frac{\sigma_1}{2}}^{\sigma_1}G(s,\tau)b^+(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\
&\quad+\lambda\eta\Gamma R\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_3}{2}}^{\sigma_3}G(t,s)\omega^+(s)\mathrm{d}s\\
&=\mu NR^2+\lambda\eta\Gamma N_1R>\frac{R}{2}+\frac{R}{2}=R=\|u\|.\end{aligned}$$

即

$$\|Tu\|>\|u\|,\quad \forall u\in\partial K_R. \tag{17}$$

最后，存在 $0<r_1<r$，由条件(H2)可定义

$$\beta_{r_1}=\min_{\Gamma r_1\le u\le r_1}\{f(u)\}>0.$$

令

$$\mu_2''=\frac{1}{2DMr_1},\quad \lambda_0=\frac{(2DM-N)r_1}{2DM\beta_{r_1}N_1}. \tag{18}$$

其中，$D=\frac{2r}{r_1}$。

则对任意 $u\in\partial K_{r_1}$，有

$$\Gamma r_1=\Gamma\|u\|\le\min_{\frac{\sigma_3}{2}\le t\le\sigma_3}u(t)\le u(t)\le\|u\|=r_1,\ t\in\left[\frac{\sigma_3}{2},\sigma_3\right]$$

和

$$\begin{aligned}
\|Tu\|&=\mu\max_{t\in J}\int_0^1\int_0^1G(t,s)G(s,\tau)a(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\max_{t\in J}\int_0^1G(t,s)\omega(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\
&\ge\mu\max_{t\in J}\int_0^{\sigma_2}G(t,s)a^+(s)u(s)\int_0^1G(s,\tau)b(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\max_{t\in J}\int_0^{\sigma_3}G(t,s)\omega(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\
&\ge\mu\max_{t\in J}\int_0^{\sigma_2}G(t,s)a^+(s)u(s)\int_0^{\sigma_1}G(s,\tau)b^+(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_3}{2}}^{\sigma_3}G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\
&\ge\mu\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_2}{2}}^{\sigma_2}G(t,s)a^+(s)\delta(s)\|u\|\int_{\frac{\sigma_1}{2}}^{\sigma_1}G(s,\tau)b^+(\tau)\delta(\tau)\|u\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_3}{2}}^{\sigma_3}G(t,s)\omega^+(s)\beta_{r_1}\mathrm{d}s\\
&\ge\mu\min_{\frac{\sigma_2}{2}\le t\le\sigma_2}\delta(t)\min_{\frac{\sigma_1}{2}\le t\le\sigma_1}\delta(t)\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_2}{2}}^{\sigma_2}G(t,s)a^+(s)\int_{\frac{\sigma_1}{2}}^{\sigma_1}G(s,\tau)b^+(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\|u\|^2\\
&\quad+\lambda\beta_{r_1}\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_3}{2}}^{\sigma_3}G(t,s)\omega^+(s)\mathrm{d}s\\
&\ge\mu_2''Nr_1^2+\lambda_0\beta_{r_1}N_1=\frac{Nr_1}{2DM}+\frac{(2DM-N)r_1}{2DM}=r_1=\|u\|.
\end{aligned}$$

因此，可得

$$\|Tu\|\ge\|u\|,\ \forall u\in\partial K_{r_1}. \tag{19}$$

取 $\mu_2=\max\{\mu_2',\mu_2''\}$。综上所述，由引理 2.6 可知，对任意 $\lambda\in[\lambda_0,+\infty),\mu\in(\mu_2,\mu_1]$，(12)式和(17)式、(12)式和(19)式分别蕴含着 T 有一个不动点 u_1,u_2 满足 $u_1\in\bar{K}_R\setminus\bar{K}_r$ 和 $u_2\in K_r\setminus K_{r_1}$。又由引理 2.4 可知，系统(1)至少存在两个正解 $(u_i,\varphi_i)(i=1,2)$。其中，

$$u_1\in\bar{K}_R\setminus\bar{K}_r,u_2\in K_r\setminus K_{r_1}$$

且

$$\varphi_i(t)=\mu\int_0^1G(t,s)b(s)u_i(s)\mathrm{d}s\ (i=1,2).\quad\square$$

定理 3.2. 假设条件(H1)~(H7)成立。当 $0<\theta<1$ 时，存在 $\lambda_0^*,\mu_0^*>0$，使得当 $\lambda\in(0,\lambda_0^*]$，$\mu\in(0,\mu_0^*]$时，系统(1)至少存在两个正解。

证明： 一方面，由于 $0<\theta<1$，根据条件(H3)，得

$$\lim_{u\to0}\frac{f(u)}{u}\ge\lim_{u\to0}\frac{k_1u^\theta}{u}=+\infty.$$

则存在 $r>0$，使得

$$f(u)\geq \eta u,\quad 0\leq u\leq r.$$

其中，η 满足 $\lambda\eta\Gamma N_1>1$。其中，N_1 在(13)式中定义，Γ 在(14)式中定义。

因此，对任意 $u\in\partial K_r$，由(16)式可得

$$\min_{\frac{\sigma_3}{2}\leq t\leq\sigma_3} u(t)\geq\Gamma\|u\|=\Gamma r$$

和

$$\begin{aligned}\|Tu\|&=\mu\max_{t\in J}\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)a(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\max_{t\in J}\int_0^1 G(t,s)\omega(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\&\geq\mu\max_{t\in J}\int_0^{\sigma_2} G(t,s)a^+(s)u(s)\int_0^1 G(s,\tau)b(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\max_{t\in J}\int_0^{\sigma_3} G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\&\geq\lambda\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_3}{2}}^{\sigma_3} G(t,s)\omega^+(s)\eta u(s)\mathrm{d}s\\&\geq\lambda\eta\Gamma N_1 r>r=\|u\|.\end{aligned}$$

即

$$\|Tu\|>\|u\|,\quad\forall u\in\partial K_r. \tag{20}$$

另一方面，由于 $0<\theta<1$，根据条件(H3)，得

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}\leq\lim_{u\to+\infty}\frac{k_2u^\theta}{u}=0.$$

则存在 $R'>r$，使得

$$f(u)\leq\varepsilon u,\quad u\geq R'.$$

其中，ε 满足 $2\lambda\varepsilon M_1<1$，$M_1$ 在定理 3.1 中定义。

由条件(H2)，可得 $\psi(R')>0$，则有

$$f(u)\leq\psi(R')+\varepsilon u,u\in[0,+\infty).$$

令

$$\max\left\{R',\frac{2\lambda M_1\psi(R')}{1-2\lambda M_1\varepsilon}\right\}<R\leq(2\mu M)^{-1}.$$

则可验证对于充分小的 $\lambda,\mu,\varepsilon>0$，$\max\left\{R',\frac{2\lambda M_1\psi(R')}{1-2\lambda M_1\varepsilon}\right\}<(2\mu M)^{-1}$ 是合理的。因此，对任意 $u\in\partial K_R$，可得

$$\begin{aligned}(Tu)(t)&=\mu\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)a(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\int_0^1 G(t,s)\omega(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\&=\mu\int_0^\xi\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s-\mu\int_\xi^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)a^-(s)\\&\quad\cdot b(\tau)u(s)u(\tau)d\tau ds+\lambda\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s-\lambda\int_\xi^1 G(t,s)\omega^-(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\&\leq\mu\int_0^\xi\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\&=\mu\int_0^\xi\int_0^\xi G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)u(s)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s-\mu\int_0^\xi\int_\xi^1 G(t,s)G(s,\tau)\end{aligned}$$

$$\cdot a^+(s)b^-(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\int_0^{\xi}G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$
$$\le \mu\int_0^{\xi}\int_0^{\xi}G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\int_0^{\xi}G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$
$$\le \mu R^2\max_{t\in J}\int_0^{\xi}\int_0^{\xi}G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\max_{t\in J}\int_0^{\xi}G(t,s)\omega^+(s)(\psi(R')+\varepsilon u)\mathrm{d}s$$
$$\le \mu MR^2+\lambda(\psi(R')+\varepsilon R)M_1<\frac{R}{2}+\frac{R}{2}=R=\|u\|.$$

即

$$\|Tu\|<\|u\|,\quad \forall u\in\partial K_R. \tag{21}$$

令

$$\mu_0^*=\frac{1}{2Mr_1},\ \lambda_0^*=\frac{r_1}{2\psi(r_1)M_1}.$$

其中，$0<r_1<r$，M,M_1在定理3.1中定义。

则对任意$u\in\partial K_{r_1}$，类似于(21)式的证明，可得

$$(Tu)(t)\le \mu\int_0^{\xi}\int_0^{\xi}G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\int_0^{\xi}G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$
$$\le \mu r_1^2\max_{t\in J}\int_0^{\xi}\int_0^{\xi}G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\lambda\max_{t\in J}\int_0^{\xi}G(t,s)\omega^+(s)\psi(r_1)\mathrm{d}s$$
$$=\mu Mr_1^2+\lambda\psi(r_1)M_1\le \mu_0^*Mr_1^2+\lambda_0^*\psi(r_1)M_1=\frac{r_1}{2}+\frac{r_1}{2}=r_1=\|u\|.$$

即

$$\|Tu\|\le\|u\|,\quad \forall u\in\partial K_{r_1}. \tag{22}$$

综上所述，由引理2.6可知，对任意$\lambda\in(0,\lambda_0^*]$，$\mu\in(0,\mu_0^*]$，(20)式和(21)式、(20)式和(22)式分别蕴含着T有一个不动点u_1,u_2满足$u_1\in\bar{K}_R\setminus\bar{K}_r$和$u_2\in K_r\setminus K_{r_1}$。又由引理2.4可知，系统(1)至少存在两个正解$(u_i,\varphi_i)(i=1,2)$。其中，

$$u_1\in\bar{K}_R\setminus\bar{K}_r,u_2\in K_r\setminus K_{r_1}$$

且

$$\varphi_i(t)=\mu\int_0^1G(t,s)b(s)u_i(s)\mathrm{d}s\ (i=1,2).\ \square$$

定理3.3. 假设条件(H1)~(H7)成立。当$0<\theta<1$时，存在$\lambda_1^*,\mu_1^*>0$，使得当$\lambda\in(0,\lambda_1^*]$，$\mu\in(0,\mu_1^*]$，且$k_2$满足$0<k_2<\frac{(2\mu M)^{\theta-1}}{2\lambda M_1}$时，系统(1)至少存在三个正解。其中，$M,M_1$在定理3.1中定义。

证明： 首先，由于$0<\theta<1$，根据条件(H3)，得

$$\lim_{u\to0}\frac{f(u)}{u}\ge\lim_{u\to0}\frac{k_1u^{\theta}}{u}=+\infty.$$

则存在$r>0$，使得

$$f(u)\ge\eta u,\quad 0\le u\le r.$$

其中，η满足$\lambda\eta\Gamma N_1>1$。其中，N_1在(13)式中定义，Γ在(14)式中定义。

因此，对任意$u\in\partial K_r$，与(20)式的证明相同，可得

$$\|Tu\| > \|u\|, \quad \forall u \in \partial K_r. \tag{23}$$

其次，选取充分大的 $R_1 \ge \max\left\{\frac{1}{2\mu M}, \frac{1}{\mu N}\right\}$，则有 $\mu N R_1^2 \ge R_1$。

对任意 $u \in \partial K_{R_1}$，有

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &= \mu \max_{t\in J} \int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)a(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + \lambda \max_{t\in J}\int_0^1 G(t,s)\omega(s)f(u(s))\mathrm{d}s \\
&\ge \mu \max_{t\in J}\int_0^{\sigma_2} G(t,s)a^+(s)u(s)\int_0^1 G(s,\tau)b(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + \lambda \max_{t\in J}\int_0^{\sigma_3} G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s \\
&\ge \mu \max_{t\in J}\int_0^{\sigma_2} G(t,s)a^+(s)u(s)\int_0^{\sigma_1} G(s,\tau)b^+(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \\
&\ge \mu \max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_2}{2}}^{\sigma_2} G(t,s)a^+(s)u(s)\int_{\frac{\sigma_1}{2}}^{\sigma_1} G(s,\tau)b^+(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \\
&\ge \mu \max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_2}{2}}^{\sigma_2} G(t,s)a^+(s)\delta(s)\|u\|\int_{\frac{\sigma_1}{2}}^{\sigma_1} G(s,\tau)b^+(\tau)\delta(\tau)\|u\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \\
&\ge \mu \min_{\frac{\sigma_2}{2}\le t\le\sigma_2}\delta(t)\min_{\frac{\sigma_1}{2}\le t\le\sigma_1}\delta(t)\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_2}{2}}^{\sigma_2} G(t,s)a^+(s)\int_{\frac{\sigma_1}{2}}^{\sigma_1} G(s,\tau)b^+(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\|u\|^2 \\
&= \mu N R_1{}^2 \ge R_1 = \|u\|.
\end{aligned}$$

即

$$\|Tu\| \ge \|u\|, \quad \forall u \in \partial K_{R_1}. \tag{24}$$

再次，由于 $0<\theta<1$，根据条件(H3)，得

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u} \le \lim_{u\to+\infty}\frac{k_2 u^\theta}{u} = 0.$$

则存在 $R>0$，使得

$$f(u) \le \varepsilon u, \quad u \ge R.$$

存在 $R>0$，满足

$$(2\lambda k_2 M_1)^{\frac{1}{1-\theta}} < R < (2\mu M)^{-1}.$$

则对任意 $u\in\partial K_R$，可得

$$\begin{aligned}
(Tu)(t) &= \mu\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)a(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + \lambda\int_0^1 G(t,s)\omega(s)f(u(s))\mathrm{d}s \\
&= \mu\int_0^\xi\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - \mu\int_\xi^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)a^-(s) \\
&\quad \cdot b(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + \lambda\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s - \lambda\int_\xi^1 G(t,s)\omega^-(s)f(u(s))\mathrm{d}s \\
&\le \mu\int_0^\xi\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + \lambda\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s \\
&= \mu\int_0^\xi\int_0^\xi G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \\
&\quad - \mu\int_0^\xi\int_\xi^1 G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^-(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + \lambda\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s \\
&\le \mu\int_0^\xi\int_0^\xi G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\|u\|^2 + \lambda\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)k_2\|u\|^\theta\mathrm{d}s \\
&\le \mu R^2\max_{t\in J}\int_0^\xi\int_0^\xi G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + \lambda k_2 R^\theta\max_{t\in J}\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)\mathrm{d}s \\
&= \mu M R^2 + \lambda k_2 M_1 R^\theta < \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R = \|u\|.
\end{aligned}$$

即

$$\|Tu\| < \|u\|, \quad \forall u \in \partial K_R. \tag{25}$$

最后，选取 $r_1 \in (0, r)$。由条件(H2)可得 $\psi(r_1) > 0$。

令

$$\mu_1^* = \frac{1}{2Mr_1}, \quad \lambda_1^* = \frac{r_1}{2\psi(r_1)M_1}.$$

则对任意 $u \in \partial K_{r_1}$，有

$$\begin{aligned}(Tu)(t) &\le \mu\int_0^\xi\int_0^\xi G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)u(s)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + \lambda\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s \\ &\le \mu r_1^2 \max_{t\in J}\int_0^\xi\int_0^\xi G(t,s)G(s,\tau)a^+(s)b^+(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + \lambda\max_{t\in J}\int_0^\xi G(t,s)\omega^+(s)\psi(r_1)\mathrm{d}s \\ &= \mu M r_1^2 + \lambda M_1\psi(r_1) \le \mu_1^* M r_1^2 + \lambda_1^* M_1 \psi(r_1) = \frac{r_1}{2} + \frac{r_1}{2} = r_1 = \|u\|.\end{aligned}$$

即

$$\|Tu\| \le \|u\|, \quad \forall u \in \partial K_{r_1}. \tag{26}$$

综上所述，由引理 2.6 可知，对任意 $\lambda \in (0, \lambda_1^*], \mu \in (0, \mu_1^*]$，(24)式和(25)式、(23)式和(25)式、(23)式和(26)式分别蕴含着 T 有一个不动点 u_1, u_2, u_3 满足 $u_1 \in \bar{K}_{R_1} \setminus \bar{K}_R$， $u_2 \in K_R \setminus \bar{K}_r$ 和 $u_3 \in K_r \setminus K_{r_1}$。又由引理 2.4 可知，系统(1)至少存在三个正解 $(u_i, \varphi_i)(i = 1,2,3)$。其中，

$$u_1 \in \bar{K}_{R_1} \setminus \bar{K}_R,\ u_2 \in K_R \setminus \bar{K}_r,\ u_3 \in K_r \setminus K_{r_1}$$

且

$$\varphi_i(t) = \mu\int_0^1 G(t,s)b(s)u_i(s)\mathrm{d}s\ (i = 1,2,3). \quad \square$$

4. 例子

例 4.1. 考虑如下二阶微分系统：

$$\begin{cases} -u'' = a(t)\varphi u + \lambda\omega(t)(u + \sin u)^\theta, & 0 < t < 1, \\ -\varphi'' = \mu b(t)u, & 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

其中，$\theta > 1$ 且

$$b(t) = \begin{cases} 27\left(\frac{2}{3} - t\right), & t \in \left[0, \frac{2}{3}\right], \\ -\frac{1}{18}\left(t - \frac{2}{3}\right), & t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \end{cases}$$

$$a(t) = \begin{cases} 256\left(\frac{2}{3} - t\right), & t \in \left[0, \frac{2}{3}\right], \\ -\frac{1}{45}\left(t - \frac{2}{3}\right), & t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \end{cases}$$

$$\omega(t)=\begin{cases}3\times 4^{\theta}\left(\frac{2}{3}-t\right), & t\in\left[0,\frac{2}{3}\right],\\ -\frac{1}{4}\left(t-\frac{2}{3}\right), & t\in\left[\frac{2}{3},1\right].\end{cases}$$

结论： 当 $\lambda\in\left[\frac{4507}{794\times\left(\frac{1}{5}+4\sin\frac{1}{20}\right)^{\theta}},+\infty\right)$，$\mu\in\left(\frac{515}{4396},\frac{515}{2198}\right]$ 时，系统(27)至少存在两个正解。

为了验证满足定理 3.1 的条件的成立，根据文献[2]的命题 2.3，我们给出以下命题：

命题 4.1. 考虑如下问题

$$\begin{cases}-u''=k(t)u^{\alpha},0<t<1,\\ u(0)=u(1)=0.\end{cases}$$

其中，$\alpha>0$，$k(t)$ 满足

$$\left.\begin{aligned}k(t)\ge 0,\ t\in[0,\xi]\\ k(t)\le 0,\ t\in[\xi,1]\end{aligned}\right\}$$

且

$$c_1u^{\alpha}\le f(u)=u^{\alpha}\le c_2u^{\alpha}.$$

如果存在 $0<\sigma<\xi$ 使得

$$c_1\frac{\xi-\sigma}{1-\xi}\sigma^{\alpha+1}k^{+}\left(\xi-\frac{\xi-\sigma}{1-\xi}\tau\right)\ge c_2\xi^{\alpha}k^{-}(\xi+\tau),\ \tau\in[0,1-\xi]. \tag{28}$$

则下列不等式成立

$$\sigma^{\alpha}\int_{\sigma}^{\xi}G(t,s)k^{+}(s)\mathrm{d}s\ge\frac{c_2}{c_1}\xi^{\alpha}\int_{\xi}^{1}G(t,s)k^{-}(s)\mathrm{d}s. \tag{29}$$

例 4.1 的证明： 由 $a(t)$，$b(t)$ 和 $\omega(t)$ 的定义可知 $\xi=\frac{2}{3}$。下面来验证定理 3.1 的条件成立。

首先，条件(H1)~(H4)显然成立。其次，分三步验证条件(H5)~(H7)成立。

第一步验证条件(H5)的成立。令 $c_1=c_2=1$，$\alpha=1$ 和 $\sigma_1=\frac{1}{3}$，(28)式等价于下列不等式

$$\frac{1}{9}b^{+}\left(\frac{2}{3}-\tau\right)\ge\frac{2}{3}b^{-}\left(\frac{2}{3}+\tau\right),\quad \tau\in\left[0,\frac{1}{3}\right].$$

令 $\frac{2}{3}-\tau=\gamma$。则上述不等式等价于

$$\frac{1}{9}b^{+}(\gamma)\ge\frac{2}{3}b^{-}\left(\frac{4}{3}-\gamma\right),\quad \gamma\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right].$$

由 $b(t)$ 的定义可得上述不等式成立，则条件(H5)成立。

第二步验证条件(H6)的成立。令 $c_1=1$，$c_2=\frac{9}{2}$，$\alpha=1$ 和 $\sigma_2=\frac{1}{3}$，则(29)式为

$$\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} G(t,s)a^{+}(s)\mathrm{d}s \ge 3\int_{\frac{2}{3}}^{1} G(t,s)a^{-}(s)\mathrm{d}s.$$

另外，由上述不等式可得

$$\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} G(t,s)\frac{2}{9}a^{+}(s)\mathrm{d}s \ge \frac{2}{3}\int_{\frac{2}{3}}^{1} G(t,s)a^{-}(s)\mathrm{d}s$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} G(t,s)\left(\min_{s\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]} G(s,s)\right)a^{+}(s)\mathrm{d}s$$

$$\ge \frac{2}{3}\int_{\frac{2}{3}}^{1} G(t,s)a^{-}(s)\mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} G(t,s)G(s,s)a^{+}(s)\mathrm{d}s \ge \frac{2}{3}\int_{\frac{2}{3}}^{1} G(t,s)a^{-}(s)\mathrm{d}s.$$

即由上述不等式可得条件(H6)的成立。

与第一步的证明类似，(28)式等价于下列不等式

$$\frac{1}{9}a^{+}(\gamma) \ge 3a^{-}\left(\frac{4}{3}-\gamma\right),\quad \gamma\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right].$$

由 $a(t)$ 的定义可得上述不等式成立，则条件(H6)成立。

第三步验证条件(H7)的成立。令 $c_1 = 2^{\theta}$，$c_2 = 1$，$\alpha = \theta$ 和 $\sigma_2 = \frac{1}{3}$，与第一步的证明类似，(28)式等价于下列不等式

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\theta+1}\omega^{+}(\gamma) \ge \left(\frac{4}{3}\right)^{\theta}\omega^{-}\left(\frac{2}{3}+\gamma\right),\quad \gamma\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right].$$

由 $\omega(t)$ 的定义可得上述不等式成立，可得条件(H7)成立。因此，条件(H1)~(H7)成立。

最后，由计算可得

$$\Gamma = \min_{\frac{\sigma_3}{2}\le t\le\sigma_3}\delta(t) = \frac{1}{4},\quad M = \frac{2198}{515},$$

$$M_1 = \frac{267}{3320}\times 4^{\theta},\quad N = \frac{1363}{24352},$$

$$\max_{t\in J}\int_{\frac{\sigma_3}{2}}^{\sigma_3} G(t,s)\omega^{+}(s)\mathrm{d}s = 3\times 4^{\theta}\times\frac{113}{9634}.$$

取 $r_1 = \frac{1}{5}$，$r = \frac{1}{2}$，则

$$\beta_{r_1} = \min_{\Gamma r_1\le u\le r_1}\{f(u)\} = \left(\frac{1}{20}+\sin\frac{1}{20}\right)^{\theta},\quad D = 5,$$

$$\mu_2'' = \frac{515}{4396},\quad \lambda_0 = \frac{4507}{794\times\left(\frac{1}{5}+4\sin\frac{1}{20}\right)^{\theta}},\quad \mu_1 = \frac{515}{2198}.$$

取 $R = 77$，可得 $\mu_2' = \frac{318}{2741}$。则 $\mu_2 = \max\{\mu_2',\mu_2''\} = \mu_2'' = \frac{515}{4396}$。

综上所述，由定理 3.1 可得，当 $\lambda \in \left[\dfrac{4507}{794\times\left(\frac{1}{5}+4\sin\frac{1}{20}\right)^{\theta}},+\infty\right)$，$\mu \in \left(\dfrac{515}{4396},\dfrac{515}{2198}\right]$时，系统(27)至少存在两个正解。

例 4.2. 考虑如下二阶微分系统：

$$\begin{cases} -u''=a(t)\varphi u+\lambda\omega(t)(u+\sin u)^{\theta}, & 0<t<1, \\ -\varphi''=\mu b(t)u, & 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=0, & \\ \varphi(0)=\varphi(1)=0. & \end{cases} \tag{30}$$

其中，$0<\theta<1$，且 $a(t),b(t),\omega(t)$ 定义与例 4.1 中相同。

结论： 当 $\lambda \in \left(0,\dfrac{332}{267\times\left(\frac{4}{5}+4\sin\frac{1}{5}\right)^{\theta}}\right]$，$\mu \in \left(0,\dfrac{2575}{4396}\right]$时，若 k_2 满足 $0<k_2<\dfrac{1660}{267\lambda\times 4^{\theta}}\left(\dfrac{515}{4396\mu}\right)^{1-\theta}$，则系统(30)至少存在三个正解。

例 4.2 的证明： 类似与例 4.1 的证明，条件(H1)~(H7)成立。

取 $r_1=\dfrac{1}{5}$，则 $\lambda_1^*=\dfrac{332}{267\times\left(\frac{4}{5}+4\sin\frac{1}{5}\right)^{\theta}}$，$\mu_1^*=\dfrac{2575}{4396}$。由定理 3.3 可得，若 k_2 满足

$$0<k_2<\frac{1660}{267\lambda\times 4^{\theta}}\left(\frac{515}{4396\mu}\right)^{1-\theta},$$

则系统(30)至少存在三个正解。

基金项目

国家自然科学基金面上项目(11471146)，北京市教育委员会专项(PXM2017_014224_000020)。

参考文献

[1] Wang, F.L. and An, Y.K. (2015) On Positive Solutions for a Second Order Differential System with Indefinite Weight. *Applied Mathematics and Computation*, **259**, 753-761. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.02.089

[2] Zhang, X.M. and Feng, M.Q. (2015) Positive Solutions for a Second-Order Differential Equation with Integral Boundary Conditions and Deviating Arguments. *Boundary Value Problems*, **2015**, 1-21. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0490-6

[3] Feng, M.Q., Zhang, X.M. and Ge, W.G. (2010) Existence Theorems for a Second Order Nonlinear Differential Equation with Nonlocal Boundary Conditions and Their Applications. *Journal of Applied Mathematical & Computing*, **33**, 137-153. https://doi.org/10.1007/s12190-009-0278-x

[4] Chen, H.B. and Li, P.L. (2008) Three-Point Boundary Value Problems for Second-Order Ordinary Differential Equations in Banach Spaces. *Computers & Mathematics with Applications*, **56**, 1852-1860. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.04.024

[5] 卢高丽，冯美强. 具偏差变元的二阶微分方程多个正解及其应用[J]. 中国科技论文, 2016, 11(5): 571-575.

[6] Wang, F.L. and An, Y.K. (2011) Positive Solutions for a Second-Order Differential System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **373**, 370-375. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.07.031

[7] 冯美强，闫东丽. 一类带积分边界奇异边值问题正解的存在性[J]. 北京信息科技大学学报, 2010, 25(2): 5-11.

[8] Benguria, R., Brezis, H. and Lieb, E.H. (1981) The Thomas-Fermi-Von Weizsacker Theory of Atoms and Molecules. *Communications in Mathematical Physics*, **79**, 167-180. https://doi.org/10.1007/BF01942059

[9] Lieb, E.H. (1981) Thomas-Fermi and Related Theories of Atoms and Molecules. *Reviews of Modern Physics*, **53**, 603-641. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.53.603

[10] Kastenberg, W.E. and Chambre, P.L. (1968) On the Stability of Nonlinear Space-Dependent Reactor Kinetics. *Nuclear Science and Engineering*, **31**, 67-79. https://doi.org/10.13182/NSE68-A18009

[11] Jiang, X.F. and Yao, Q.L. (2001) An Existence Theorem of Positive Solution for a Semilinear Two-Point BVP with Change of Sign. *Mathematica Applicata*, **14**, 68-71.

[12] Yao, Q.L. (2001) Existence and Multiplicity of Positive Radial Solutions for a Semilinear Elliptic Equation with Change of Sign. *Applicable Analysis*, **80**, 65-77. https://doi.org/10.1080/00036810108840980

[13] Ma, R.Y. and Han, X.L. (2009) Existence and Multiplicity of Positive Solutions of a Nonlinear Eigenvalue Problem with Indefinite Weight Function. *Applied Mathematics & Computation*, **215**, 1077-1083. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.06.042

[14] Gao, C.H., Dai, H.W. and Ma, R.Y. (2012) Existence of Positive Solutions to Discrete Second-Order Boundary Value Problems with Indefinite Weight. *Advances in Difference Equations*, **2012**, 3. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-3

[15] Wang, F.L. and An, Y.K. (2013) Existence of Doubly Periodic Solutions for a Class of Telegraph System with Indefinite Weight. *Bulletin des Sciences mathematiques*, **137**, 1007-1017. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2013.02.005

[16] Boscaggin, A. and Zanolin, F. (2015) Second-Order Ordinary Differential Equations with Indefinite Weight: The Neumann Boundary Value Problem. *Annali di Matematica*, **194**, 451-478. https://doi.org/10.1007/s10231-013-0384-0

[17] Boscaggin, A. and Garrione. M. (2015) Multiple Solutions to Neumann Problems with Indefinite Weight and Bounded Nonlinearities. *Journal of Dynamics & Differential Equations*, **28**, 1-21.

[18] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.