Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 365-372
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84049

Hans汉斯

The Growth of Academic Papers for a Class of Higher Order Differential Equations

Jie Zhang

Tongren University, Tongren Guizhou
Email: 1045445728@qq.com

Received: Jun. 20th, 2018; accepted: Jul. 5th, 2018; published: Jul. 12th, 2018

Abstract

Through the Nevanlinna theory of meromorphic function, this paper studied the growth of infinite order of higher order differential equations, and estimated upper bound and lower bound of higher order, higher lower order for the equation solution.

Keywords

High Order Differential Equations, Meromorphic Function, Higher Order, Higher Lower Order

一类高阶复微分方程解的增长性

张　杰

铜仁学院，贵州 铜仁
Email: 1045445728@qq.com

收稿日期：2018年6月20日；录用日期：2018年7月5日；发布日期：2018年7月12日

摘　要

本文利用亚纯函数的Nevanlinna理论研究了高阶复微分齐次方程的无穷级整函数解的增长性，估计了方程解的超级、超下级的上界和下界。

关键词

高阶复微分方程，亚纯函数，超级，超下级

文章引用：张杰. 一类高阶复微分方程解的增长性[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 365-372. DOI: 10.12677/pm.2018.84049

1. 引言和主要结果

本文使用值分布理论的标准记号，对于亚纯函数 $f(z)$，用 $\rho(f),\mu(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的级、下级。

定义 1：亚纯函数 $f(z)$ 的级、下级、零点收敛指数和极点收敛指数定义如下：

$$\rho(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^{+}T(r,f)}{\log r};\quad \mu(f)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log^{+}T(r,f)}{\log r}.$$

定义 2：亚纯函数 $f(z)$ 的超级、超下级分别定义为：

$$\rho_2(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log^{+}T(r,f)}{\log r};\quad \mu_2(f)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log\log^{+}T(r,f)}{\log r}.$$

定义 3：集合 $E\subset[0,+\infty)$，则 E 的 Lebesgue 线性测度为 $m(E)=\int_E \mathrm{d}t$。

集合 $F\subset[1,+\infty)$，则 F 的对数测度为 $m_l(F)=\int_F\frac{\mathrm{d}t}{t}$。

集合 $E\subset[0,+\infty)$ 的上密度和下密度定义如下：

$$\overline{\mathrm{dens}}E=\limsup_{r\to\infty}\frac{m(E\cap[0,r])}{r};\quad \underline{\mathrm{dens}}E=\liminf_{r\to\infty}\frac{m(E\cap[0,r])}{r}.$$

集合 $F\subset[1,+\infty)$ 的上对数密度和下对数密度定义如下：

$$\overline{\mathrm{logdens}}F=\limsup_{r\to\infty}\frac{m_l(F\cap[1,r])}{\log r};\quad \underline{\mathrm{logdens}}F=\liminf_{r\to\infty}\frac{m_l(F\cap[1,r])}{\log r}.$$

关于线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_s(z)f^{(s)}+\cdots+A_0(z)f=0 \tag{1.1}$$

解的增长性问题，主要有以下几个重要的结果，其中 $A_j(z)(j=0,1,\cdots,k-1)$ 是整函数。

定理 A [1]：设 $A_j(z)(j=0,1,\cdots,k-1)$ 是整函数，满足 $\max\{\rho(A_j),j=1,2,\cdots,k-1\}<\rho(A_0)$，则方程(1.1)的非平凡解是无穷级。

定理 B [1]：设 $A_j(z)(j=0,1,\cdots,k-1)$ 是整函数，满足 $\rho(A_0)<\max\{\rho(A_j),j\neq s\}<\rho(A_s)\leq\frac{1}{2}$，则方程(1.1)的非平凡解是无穷级。

现在的主要问题是：若主导系数为中间的系数 $A_s(z)$ 且 $\rho(A_S)>\frac{1}{2}$，方程(1.1)的非平凡解是否是无穷级？

在定理 A，定理 B 之后也出现了很多结果，文献[2]中证明了如下结果：

定理 C [2]：设 $A_j(z)(j=0,1,\cdots,k-1)$ 是整函数，满足 $\max\{\rho(A_j),j\neq 0\}<\rho(A_0)<+\infty$，则微分方程(1.1)的每个非平凡解 $f(z)$ 满足 $\rho_2(f)=\rho(A_0)$。

定理 D [2]：设 $A_j(z),(j=0,1,\cdots,k-1),F\neq 0$ 是整函数，若存在 $A_s(z)(0\leq s\leq k-1)$ 满足

$$b=\max\left\{\rho\left(A_j\right),\rho\left(F\right),j\neq s\right\}<\rho\left(A_s\right)<\frac{1}{2},$$

则微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}\left(z\right)f^{(k-1)}+\cdots+A_s\left(z\right)f^{(s)}+\cdots+A_0\left(z\right)f=F \tag{1.2}$$

的每个超越解 $f\left(z\right)$ 满足 $\rho_2\left(f\right)=\rho\left(A_s\right)$。

在文献[3]中已证明了下列结论：

定理 E [3]：设 $A_j\left(z\right),\left(j=0,1,\cdots,k-1\right)$ 是整函数，满足

$$\max\left\{\rho\left(A_j\right),j\neq 0\right\}<\mu\left(A_0\right)<\rho\left(A_0\right)<+\infty$$

则方程(1.1)的每个非平凡解满足 $\mu\left(A_0\right)=\mu_2\left(f\right)\leq\rho_2\left(f\right)\leq\rho\left(A_0\right)$。

定理 F [3]：设 $A_j\left(z\right),\left(j=0,1,\cdots,k-1\right)$ 是整函数，若存在 $s\in\left\{1,2,\cdots,k-1\right\}$ 使得 $\max\left\{\rho\left(A_j\right),j\neq 0,s\right\}<\mu\left(A_0\right)<\frac{1}{2}$， $A_S\left(z\right)$ 的亏值有限，则方程(1.1)的每个非平凡解满足：

$$\mu\left(A_0\right)\leq\rho_2\left(f\right)\leq\max\left\{\rho\left(A_0\right),\rho\left(A_s\right)\right\}.$$

在文献[4]已证。

定理 G [4]：设 $A\left(z\right),B\left(z\right)$ 是两个整函数， $0<\mu\left(B\right)<\frac{1}{2}$，若存在实常数 $\mu<\mu\left(B\right)$ 和下对数密度为 1 的集合 $E_\mu\subset\left[1,+\infty\right)$，使得对任意的 $r\in E_\mu$，有

$$\min_{|z|=r}\left|A\left(z\right)\right|\leq\exp\left(r^\mu\right),$$

则方程

$$f''+A\left(z\right)f'+B\left(z\right)f=0 \tag{1.3}$$

的任意非平凡解 $f\left(z\right)$ 满足 $\rho_2\left(f\right)\geq\mu\left(B\right)$。

文献[5]已证下列结论：

定理 H [5]：设 $A\left(z\right),B\left(z\right)$ 是级有限的整函数，满足 $\mu\left(A\right)<\mu\left(B\right)<\rho\left(B\right)<\rho\left(A\right)<\frac{1}{2}$，则方程(1.3)的任意非平凡解 $f\left(z\right)$，满足 $\mu_2\left(f\right)\leq\rho\left(B\right)\leq\rho_2\left(f\right)=\rho\left(A\right)$。

定理 I [5]：设 $A\left(z\right),B\left(z\right)$ 是级有限的整函数，满足 $\rho\left(B\right)<\mu\left(A\right)<\frac{1}{2}<\rho\left(A\right)$，则方程(1.3)的任意非平凡解 $f\left(z\right)$，满足 $\mu_2\left(f\right)\leq\mu\left(A\right)<\frac{1}{2}\leq\rho_2\left(f\right)\leq\rho\left(A\right)$。

本文是将定理 G, H, I 的结论推广到方程(1.1)中去，得到以下几个结果：

定理 1：设 $A_j\left(z\right),\left(j=0,1,\cdots,k-1\right)$ 是整函数， $0<\mu\left(A_0\right)<\frac{1}{2}$，若存在实常数 $\mu<\mu\left(A_0\right)$ 和下对数密度为 1 的集合 $E_\mu\subset\left[1,+\infty\right)$，即 $\underline{\text{logdens}}E_\mu=1$ 使得对任意的 $r\in E_\mu$，有

$$\min_{|z|=r}\left|A_j\left(z\right)\right|\leq\exp\left(r^\mu\right),\quad\left(j=1,2,\cdots,k-1\right)$$

则方程(1.1)的任意非平凡解 $f\left(z\right)$，满足 $\rho_2\left(f\right)\geq\mu\left(A_0\right)$。

定理 2：设 $A_j\left(z\right),\left(j=0,1,\cdots,k-1\right)$ 是整函数，满足

$$\max\left\{\mu\left(A_j\right),j\neq 0\right\}<\mu\left(A_0\right)\leq\rho\left(A_0\right)<\max\left\{\rho\left(A_j\right),j\neq 0\right\}<\frac{1}{2},$$

则方程(1.1)的任意非平凡解 $f(z)$，满足

$$\mu_2(f)<\rho(A_0)\le\rho_2(f)=\max\{\rho(A_j),j\ne0\}.$$

定理 3：设 $A_j(z),(j=0,1,\cdots,k-1)$ 是级有限的整函数，满足

$$\rho(A_0)<\max\{\mu(A_j),j\ne0\}<\frac{1}{2}\le\max\{\rho(A_j),j\ne0\},$$

则方程(1.1)的任意非平凡解 $f(z)$，满足

$$\mu_2(f)\le\max\{\mu(A_j),j\ne0\}<\frac{1}{2}\le\rho_2(f)\le\max\{\rho(A_j),j\ne0\}.$$

2. 相关引理

引理 1 [1]：设 $f(z)$ 是超越亚纯函数，$\alpha>1$ 是常数，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在对数测度有限的集合 $E_1\subset[1,+\infty)$ 和常数 $B>0$，B 依赖于 α 和 $(m,n)(m,n\in N且m<n)$，使得对任意的 z，满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$，有

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right|\le B\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}(\log^{\alpha}r)\log T(\alpha r,f)\right)^{n-m}$$

引理 2 [1]：f 是级为有穷的超越亚纯函数，对给定的实常数 $\varepsilon>0$ 及两个整数 k,j，且 $k>j\ge0$，则下列结论成立：

1) 存在对数测度有穷的集合 $E\subset(1,+\infty)$，使得对所有的 z 满足 $|z|\notin E\cup[0,1]$，有：

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\le|z|^{(k-j)(\rho(f)-1+\varepsilon)}$$

2) 存在线性测度有限的集合 $F\subset[0,+\infty)$，使得对所有的 z 满足 $|z|\notin F$，有：

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\le|z|^{(k-j)(\rho(f)+\varepsilon)}.$$

引理 3 [6]：设 $f(z)$ 是整函数，$\mu(f)<\infty$ 是常数，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在对数测度无穷的集合 $E\subset(0,+\infty)$，使得对任意的 $r\in E$，有

$$M(r,f)<\exp\{r^{\mu+\varepsilon}\},\quad m(r,f)<r^{\mu+\varepsilon}.$$

引理 4 [7]：设 $f(z)$ 是超越整函数，$0<\eta_1<\frac{1}{4}$ 和点列 $\{z_r\}$，使得 $|z_r|=r$ 和 $|f(z_r)|>M(r,f)\upsilon_f(r)^{-\frac{1}{4}+\eta_1}$，则存在对数测度有限的集合 $E_0\subset(0,+\infty)$，使得对任意的 $r\notin E_0$，有

$$\frac{f^{(j)}(z_r)}{f(z_r)}=\left(\frac{\upsilon_f(f)}{z_r}\right)^j(1+o(1)),\quad j\in N$$

其中 $\upsilon_f(r)$ 是 $f(z)$ 的中心指标。

引理 5 [2]：设 $f(z)$ 是级为无穷的整函数，满足 $\rho_2(f)=\rho,\mu_2(f)=\mu$，则

$$\rho_2(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log\upsilon_f(r)}{\log r}=\rho \text{ 和 } \mu_2(f)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log\log\upsilon_f(r)}{\log r}=\mu$$

引理 6：设 $A_j(z),(j=0,1,\cdots,k-1)$ 是级有限的整函数，则方程(1.1)的解 $f(z)$ 满足：

$$\mu_2(f) \le \max\{\mu(A_j), \rho(A_0), j \ne 0\} \text{ 和 } \mu_2(f) \le \max\{\rho(A_j), \mu(A_0), j \ne 0\}$$

证明：由方程(1.1)得

$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = -A_{K-1}(z)\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} - A_{K-2}(z)\frac{f^{(k-2)}(z)}{f(z)} - \cdots - A_1(z)\frac{f'(z)}{f(z)} - A_0(z)$ 于是，有

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \le |A_{K-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1(z)|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)| \tag{2.1}$$

由引理 3，存在对数测度有限的集合 $E_0 \subset [1,+\infty)$，使得对任意的 z 满足 $|z| = r \notin E_0$ 和 $|f(z)| = M(r,f)$，有

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| = \left(\frac{\upsilon_f(f)}{r}\right)^j (1+o(1)),\quad j = 1,2,\cdots,k \tag{2.2}$$

令 $\max\{\mu(A_j), \rho(A_0), j \ne 0\} = a$，应用引理 2，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在对数测度无穷的集合 $E_1 \subset (0,+\infty)$，使得对任意的 z 满足 $|z| = r \in E_1$ 时，有

$$|A_j(z)| < \exp\{r^{a+\varepsilon}\},\quad (j = 0,1,2,\cdots,k-1) \tag{2.3}$$

将(2.2) (2.3)代入(2.1)，则对任意的 z 满足 $|z| = r \in E_1 \setminus E_0$ 和 $|f(z)| = M(r,f)$，有

$$\left(\frac{\upsilon_f(f)}{r}\right)^k (1+o(1)) \le k \cdot \exp\{r^{a+\varepsilon}\}\left(\frac{\upsilon_f(f)}{r}\right)^{k-1} (1+o(1)) \tag{2.4}$$

由(2.4)式及引理 4，有

$$\mu_2(f) \le a = \max\{\mu(A_j), \rho(A_0), j \ne 0\}$$

类似地可证明

$$\mu_2(f) \le a = \max\{\rho(A_j), \mu(A_0), j \ne 0\}$$

引理 7 [5]：设 $f(z)$ 是整函数且 $\rho(f) = \rho < \frac{1}{2}$，记

$$A(r) = \min_{|z|=r} \log|f(z)|,\qquad B(r) = \max_{|z|=r} \log|f(z)|$$

若 $\rho < \alpha < 1$，则

$$\underline{\text{logdens}}(\{r : A(r) > \cos(\pi\alpha)B(r)\}) > 1 - \frac{\rho}{\alpha}$$

引理 8 [4]：设 $f(z)$ 是整函数且 $0 < \mu(f) < \frac{1}{2}$，记

$$m(r) = \inf_{|z|=r} \log|f(z)|,\quad M(r) = \sup_{|z|=r} \log|f(z)|$$

则对任意 $\alpha \in (\mu(f), 1)$，有

$$\overline{\text{logdens}}(\{r \in [1,+\infty) : n(r) > \cos(\pi\alpha)M(r)\}) > 1 - \frac{\mu(f)}{\alpha}$$

引理 9 [5]：设 $f(z)$ 是整函数且 $\mu(f)=\mu<\frac{1}{2},\mu<\rho=\rho(f)$，若 $\mu\le\rho<\min\left(\rho,\frac{1}{2}\right),\delta<\alpha<\frac{1}{2}$，则 $\overline{\log\mathrm{dens}}\left(\left\{r:A(r)>\cos(\pi\alpha)B(r)>r^{\delta}\right\}\right)>C(\rho,\delta,\alpha)$，$C(\rho,\delta,\alpha)$ 是依赖于 ρ,δ,α 的正常数。

引理 10 [2]：设 $f(z)$ 是超越整函数，则存在对数测度有限的集合 $E\subset(0,+\infty)$，使得对任意的 z 满足 $|z|=r\notin E$ 且 $|f(z)|=M(r,f)$，有

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\le 2r^{j},\ (j\in N)$$

引理 11 [5]：设 $f(z)$ 是整函数，且 $\rho(f)=\rho<+\infty$，则存在对数测度无穷的集合 $E\subset[1,+\infty)$，使得对任意的 z，有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}=\rho.$$

引理 12 [8]：设 $A_j(z),(j=0,1,\cdots,k-1)$ 是整函数且 $\rho(A_j)\le\rho<+\infty$，若 $f(z)$ 是方程(1.1)的解，则 $\rho_2(f)\le\rho$。

3. 定理的证明

3.1. 定理 1 证明

设 μ,β 是两个常数，满足 $0<\mu<\beta<\mu(A_0)$，$f(z)$ 是方程(1.1)的非平凡解，根据假设集合 $E_\mu\subset[1,+\infty)$ 且 $\underline{\log\mathrm{dens}}E_\mu=1$ 使得对任意的 $r\in E_\mu$，有

$$\min_{|z|=r}|A_j(z)|\le\exp(r^{\mu}),\ (j=1,2,\cdots,k-1)$$

令 $E_1=\left\{|z|:|z|=r\in E_\mu,|A_j(z)|=\min_{|z|=r}|A_j(z)|\le\exp(r^{\mu}),(j\ne0)\right\}$，则 $\underline{\log\mathrm{dens}}\left(\{|z|:|z|\in E_1\}\right)=1$，对任意的 z 有

$$|A_j(z)|\le\exp\left(|z|^{\mu}\right)(j\ne0).\tag{3.1}$$

在 $A_0(z)$ 中应用引理 8，对任意给定的 $\alpha\in(\mu(A_0),1)$，存在集合 $E_2\subset[1,+\infty)$，使 $\overline{\log\mathrm{dens}}(E_2)\ge1-\frac{\mu(A_0)}{\alpha}$，对任意的 z 满足 $|z|=r\in E_2\setminus[0,r_0]$，$r_0$ 是常数且 $r_0>1$，有

$$|A_0(z)|\ge\exp(r^{\beta}).\tag{3.2}$$

应用引理 1，存在对数测度有限的集合 $E_3\subset[1,+\infty)$，使得对任意的 z，满足 $|z|=r\notin E_3\cup[0,1]$，有

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\le BT(2r,f)^{2j},\ \ j=1,2,\cdots,k-1,\tag{3.3}$$

其中，B 为常数且 $B>0$。

令 $E_4=\{|z|:z\in E_1\}\cap\{E_2\setminus([0,r_0]\cup E_3)\}$，显然 $\overline{\log\mathrm{dens}}(E_4)>0$，故在 E_4 中存在序列 $\{r_j\}$，当 $j\to\infty$ 时 $r_j\to\infty$，当 $|z|=r=r_j$ 时，(3.1) (3.2) (3.3)都成立，故

$$\exp(r_j^{\beta})\le\left(1+\exp(r_j^{\mu})\right)B\cdot T(2r_j,f)^{2(k-1)}$$

$$\exp\left(\left(1-o(1)\right)r_j^{\beta}\right)\le B\cdot T\left(2r_j,f\right)^{2(k-1)} \tag{3.4}$$

由(3.4)当 $j\to\infty$ 时，有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r}\ge\beta$$

由 $\beta<\mu(A_0)$ 的任意性，有

$$\rho_2(f)\ge\mu(A_0).$$

3.2. 定理 2 证明

根据定理 B 和引理 5，方程(1.1)的任意非平凡解 $f(z)$ 满足 $\rho_2(f)=\max\left\{\rho(A_j),j=1,2,\cdots,k-1\right\}$，又由引理 6 方程(1.1)的任意非平凡解 $f(z)$ 满足

$$\mu_2(f)\le\max\left\{\mu(A_j),\rho(A_0),j\ne0\right\},\ \mu_2(f)\le\max\left\{\rho(A_j),\mu(A_0),j\ne0\right\}.$$

由 $\max\left\{\mu(A_j),j\ne0\right\}<\mu(A_0)\le\rho(A_0)<\max\left\{\rho(A_j),j\ne0\right\}<\frac{1}{2}$ 得

$$\mu_2(f)\le\max\left\{\mu(A_j),j\ne0\right\}<\rho(A_0)<\max\left\{\rho(A_j),j\ne0\right\}=\rho_2(f).$$

结论得证。

3.3. 定理 3 证明

设 $f(z)$ 是方程(1.1)的非平凡解，由引理 6 有

$$\mu_2(f)\le\max\left\{\mu(A_j),j\ne0\right\}.$$

不妨设 $\max\left\{\rho(A_j),j\ne0\right\}=\rho(A_s)$，方程(1.1)可变形为

$$A_S(z)=-\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}-A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}}-\cdots-A_{s+1}(z)\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}-A_{s-1}(z)\frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}}-\cdots-A_1(z)\frac{f'}{f^{(s)}}-A_0(z)\frac{f}{f^{(s)}},$$

于是

$$\begin{aligned}|A_S(z)|&\le\left|\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}\right|+|A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}}\right|+\ldots\ldots+|A_{s+1}(z)|\left|\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right|\\&\quad+|A_{s-1}(z)|\left|\frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}}\right|+\cdots+|A_1(z)|\left|\frac{f'}{f^{(s)}}\right|+|A_0(z)|\left|\frac{f}{f^{(s)}}\right|\\&\le\left|\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}\right|+|A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}}\right|+\cdots+|A_{s+1}(z)|\left|\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right|\\&\quad+\left|\frac{f}{f^{(s)}}\right|\left(|A_{s-1}(z)|\left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right|+|A_{s-2}(z)|\left|\frac{f^{(s-2)}}{f}\right|+\cdots+|A_1(z)|\left|\frac{f'}{f}\right|+|A_0(z)|\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

由引理 1，存在对数测度有限的集合 $E_0\subset[1,+\infty)$，对任意的 z 满足 $|z|=r\notin E_0$，有

$$\left|\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}\right|\le M\cdot T(2r,f)^{2k}. \tag{3.6}$$

M 为常数且 $M>0$，由

$$\rho(A_0)<\max\left\{\mu(A_j), j\neq 0\right\}<\frac{1}{2}\leq\max\left\{\rho(A_j), j\neq 0\right\},$$

对任意的 $\delta>0$，若 $\max\left\{\mu(A_j), j\neq 0\right\}\leq\delta<\frac{1}{2}$，取 $\varepsilon>0$，满足

$$\rho(A_0)+\varepsilon<\max\left\{\mu(A_j), j\neq 0\right\}\leq\delta<\frac{1}{2}. \tag{3.7}$$

应用引理 9，存在对数测度无穷的集合 $E_1\subset[1,+\infty)$，使得对任意的 z 满足 $|z|=r\in E_1$，有

$$\left|A_S(z)\right|\geq\exp\left\{r^{\delta}\right\}. \tag{3.8}$$

由引理 11，存在对数测度有限的集合 $E_2\subset[1,+\infty)$，使得对任意的 z 满足 $|z|=r\notin E_2$，有

$$\left|\frac{f}{f^{(s)}}\right|\leq 2r^{s}. \tag{3.9}$$

由(3.6)~(3.9)，对 $|z|=r\in E_1\setminus(E_0\cup E_2)$，有

$$\exp\left\{r^{\delta}\right\}\leq M\cdot\left[T(2r,f)^{2k}+2r^{s}\cdot\exp\left(r^{\rho(A_0)+\varepsilon}\right)\cdot T(2r,f)^{s}\right] \tag{3.10}$$

令 $\delta\to\frac{1}{2}$，由(3.10)知

$$\rho_2(f)\geq\frac{1}{2}.$$

另外，由引理 12 知 $\rho_2(f)\leq\max\left\{\rho(A_j), j\neq 0\right\}$，故有

$$\mu_2(f)\leq\max\left\{\mu(A_j), j\neq 0\right\}<\frac{1}{2}\leq\rho_2(f)\leq\max\left\{\rho(A_j), j\neq 0\right\}.$$

参考文献

[1] Frei, M. (1961) Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **35**, 201-222. https://doi.org/10.1007/BF02567016

[2] Chen, Z.X. and Yang, C.C. (2000) Quantitative Estimations on the Zeros and Growth of Entire Solutions of Linear Differential Equations. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **42**, 119-133. https://doi.org/10.1080/17476930008815277

[3] Zhang, C.Y. and Tu, J. (2010) Growth of Solutions to Linear Differential Equations with Entire Coefficients of Slow Growth. *Electronic Journal of Differential Equations*, **43**, 1-12.

[4] Long, J.R., Hettokangas, J. and Ye, Z. (2016) On the Relationship between the Lower Order of Coefficients and the Growth of Solutions of Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **444**, 153-166. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.030

[5] Liu, J. (1999) The Growth and Regular Growth of Solutions of Second Order Linear Differential Equations with Entire Coefficients. *Kodai Mathematical Journal*, **22**, 208-221. https://doi.org/10.2996/kmj/1138044043

[6] Tu, J. and Deng, G.T. (2008) Growth of Solutons of Certain Higher Order Linear Differential Equations. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **53**, 2693-2703. https://doi.org/10.1080/17476930801939387

[7] Laine, I. (1993) Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. Walter de Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110863147

[8] Bernal, L.G. (1987) On Growth k-Order of Solutions of a Complex Homogeneous Linear Differential Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **101**, 317-322.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org