Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 378-382
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84051

Hans汉斯

Uniqueness of the Meromorphic Function Sharing Two Values with Its Derivatives

Baoqin Chen, Zhi Li, Sheng Li*

Faculty of Mathematics and Computer Science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong
Email: cbqchen@126.com, hniylz@163.com, *lish_ls@qq.com

Received: Jun. 22nd, 2018; accepted: Jul. 8th, 2018; published: Jul. 16th, 2018

Abstract

This paper is to study the uniqueness of the meromorphic function sharing two values with its derivatives. Some interesting results are proved.

Keywords

Meromorphic Functions, Nevanlinna Theory, Uniqueness

与其导数分担两个公共值的亚纯函数的唯一性

陈宝琴，李　志，李　升*

广东海洋大学数学与计算机学院，广东　湛江
Email: cbqchen@126.com, hniylz@163.com, *lish_ls@qq.com

收稿日期：2018年6月22日；录用日期：2018年7月8日；发布日期：2018年7月16日

摘　要

本文研究了与其导数分担两个公共值的亚纯函数的唯一性，并证明了一些有趣的结果。

关键词

亚纯函数，Nevanlinna理论，唯一性

*通讯作者。

文章引用: 陈宝琴, 李志, 李升. 与其导数分担两个公共值的亚纯函数的唯一性[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 378-382.
DOI: 10.12677/pm.2018.84051

1. 引言

在本文中，亚纯函数是指该函数在整个复平面上亚纯。在下文中，假定所有读者都熟悉亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论的基本记号[1] [2] [3]。

对非常数亚纯函数 f，用 $S(r,f)$ 表示满足 $\lim\limits_{r\to\infty, r\notin E}\dfrac{S(r,f)}{T(r,f)}=0$ 的量，其中 E 为一个有限对数测度集。设 f 和 g 为两个非常数亚纯函数，$a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$。用 $E(a,f)$ 表示 $f-a$ 的所有零点之集(计重数)，用 $\bar{E}(a,f)$ 表示 $f-a$ 的所有不同零点之集(不计重数)。若 $\bar{E}(a,f)=\bar{E}(a,g)$，则称 f 和 g 分担 aIM。若 $E(a,f)=E(a,g)$，则称 f 和 g 分担 aCM。

Rubel 和 Yang [4]最早研究了与导数具有分担值的整函数的唯一性。他们证明了以下结果。

定理 A 设 f 为非常数整函数。若 f 和 f' 分两个不同的有限值 a,b CM，则 $f\equiv f'$。

1979 年，Mues 和 Steinmetz [5]改进了定理 A。他们证明了

定理 B 设 f 为非常数整函数。若 f 和 f' 分两个不同的有限值 a,b CM，则 $f\equiv f'$。

1983 年，Mues 和 Steinmetz [6]与 Gundersen [7]分别独立地将定理 A 推广到亚纯函数，得到

定理 C 设 f 为非常数亚纯函数。若 f 和 f' 分两个不同的有限值 a,b CM，则 $f\equiv f'$。

此后，大量文章探讨了将 f' 换成 $f^{(k)}(k\ge 2)$ 的情况，如文[8] [9] [10]。在此仅给出文献[8]中的结果如下：

定理 D 设 f 为非常数整函数。若 f 和 $f^{(k)}(k\ge 2)$ 分两个不同的有限值 a,b IM，则 $f\equiv f^{(k)}$。

考虑放宽定理 C 中“CM”的条件，Li [11]证明了以下结果。

定理 E 假设 f 为非常数亚纯函数，满足 $N(r,f)<\lambda T(r,f)$，其中 $\lambda\in[0,1/9)$，a,b 为两个不同的有限值。若 f 和 f' 分担 a,b IM，则 $f\equiv f'$。

本文考虑进一步放宽定理 D 和定理 E 中的条件，证明了以下结果：

定理 1 设 f 为非常数亚纯函数，k 为正整数。若 $\bar{N}(r,f)<T(r,f)/(3k+1)$，$f$ 和 $f^{(k)}$ 分担两个不同的非零有限值 a,b IM，则 $f\equiv f^{(k)}$。

定理 2 设 f 为非常数亚纯函数，k 为正整数。若 $\bar{N}(r,f)<T(r,f)/(3k^2+4k+2)$，$f$ 和 $f^{(k)}$ 分担 $0,a(\ne 0)$ IM，且 $E(0,f)\subseteq E(0,f^{(k)})$, $E(1,f)\subseteq E(1,f^{(k)})$，则 $f\equiv f^{(k)}$。

2. 引理

引理 1 [11]设 f 为非常数亚纯函数满足 $\bar{N}(r,f)=\lambda T(r,f)$，其中 $\lambda\in[0,1)$，再设 k 为正整数。若 f 和 $f^{(k)}$ 分担 1 IM，则

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)>\frac{1-\lambda}{k+1}T(r,f)+S(r,f).$$

3. 定理 1 的证明

假设 $f\not\equiv f^{(k)}$。首先由 f 和 $f^{(k)}$ 分担 a,b IM 及 Nevanlinna 第一基本定理可得

$$\begin{aligned}
&\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)\le\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)\\
&\le\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-f^{(k)}}\right)\le T\left(r,f-f^{(k)}\right)+S(r,f)\\
&=m\left(r,f-f^{(k)}\right)+N\left(r,f-f^{(k)}\right)+S(r,f)\\
&=m\left(r,f\left(1-\frac{f^{(k)}}{f}\right)\right)+N(r,f)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f)\\
&\le m(r,f)+N(r,f)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f)=T(r,f)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f).
\end{aligned}\tag{1}$$

注意到

$$m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+m\left(r,\frac{1}{f-b}\right)\le m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(r,f).$$

由(1)可得

$$T(r,f)\le m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f).\tag{2}$$

由于

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a}\right)-\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)-\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right),$$

故再由(1)可得

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)\le T(r,f)+k\bar{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f).\tag{3}$$

又因为

$$m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a}\right)+m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)\le m\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f),$$

所以

$$\begin{aligned}
&m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+2T\left(r,f^{(k)}\right)+O(1)\\
&=m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a}\right)+m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a}\right)\\
&\quad+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)T(r,f)+T\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f)\\
&\le T(r,f)+m\left(r,f^{(k+1)}\right)+N\left(r,f^{(k+1)}\right)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f)\\
&\le T(r,f)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right)+m\left(r,f^{(k)}\right)+N\left(r,f^{(k)}\right)+(k+1)\bar{N}(r,f)+S(r,f)\\
&\le T(r,f)+T\left(r,f^{(k)}\right)+(k+1)\bar{N}(r,f)+S(r,f).
\end{aligned}$$

由上式和(2)得到

$$T\left(r,f^{(k)}\right)\le(2k+1)\bar{N}(r,f)+S(r,f). \tag{4}$$

至此，由(2)和(4)可得

$$T(r,f)\le m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f)\le T\left(r,f^{(k)}\right)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f)\le(3k+1)\bar{N}(r,f)+S(r,f).$$

这与已知条件 $\bar{N}(r,f)<T(r,f)/(3k+1)$ 矛盾。定理 1 证明完毕。

4. 定理 2 的证明

断言 f 无极点，即为整函数。否则，f 至少有一个极点。不失一般性，不妨假设 $a=1$。记

$$g=\frac{f^{(k)}\left(f^{(k)}-f\right)}{f(f-1)}. \tag{5}$$

由于 f 和 $f^{(k)}$ 分担 0,1IM，且 $E(0,f)\subseteq E\left(0,f^{(k)}\right),E(1,f)\subseteq E\left(1,f^{(k)}\right)$，故 g 为亚纯函数，至少有一个极点，其极点均为 f 的极点，且重数不小于 $2k$。特别地，

$$m(r,g)=m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f-1}\left(\frac{f^{(k)}}{f}-1\right)\right)\le m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f-1}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=S(r,f). \tag{6}$$

将(5)写成

$$\left(f^{(k)}\right)^2-ff^{(k)}=g\left(f^2-f\right),$$

并对等式两边同时求导可得

$$2f^{(k)}f^{(k+1)}-f'f^{(k)}-ff^{(k+1)}=g'\left(f^2-f\right)+g\left(2ff'-f'\right). \tag{7}$$

由于 z_0 为 $f-1$ 的一个零点，z 则 $f(z_0)=f^{(k)}(z_0)=1$。再由(7)可得

$$g(z_0)=\frac{f^{(k)}(z_0)}{f(z_0)}=1.$$

故

$$\phi=\frac{\left(f^{(k+1)}-(1+g)f'\right)\left(f^{(k)}-f\right)}{f(f-1)}$$

为亚纯函数，至少有一个极点，其极点均为 f 的极点，且重数不小于 $3k+1$。结合(6)和对数导数引理可得

$$T(r,\phi)=m(r,\phi)+N(r,\phi)=S(r,f)+(3k+1)\bar{N}(r,f). \tag{8}$$

又因为 $E(0,f)\subseteq E\left(0,f^{(k)}\right),E(1,f)\subseteq E\left(1,f^{(k)}\right)$，所以由 ϕ 的定义可知 $f-1$ 的一个零点均为 ϕ 的零点，从而

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)\le N\left(r,\frac{1}{\phi}\right)\le T(r,\phi)=(3k+1)\bar{N}(r,f)+S(r,f)<\frac{3k+1}{3k^2+4k+2}T(r,f)+S(r,f). \tag{9}$$

另一方面，由已知条件 $\bar{N}(r,f)<T(r,f)/(3k+1)$ 和引理 1 可得

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)>\frac{3k+1}{3k^2+4k+2}T(r,f)+S(r,f).$$

这与(9)矛盾。这一矛盾表明 f 无极点，即为整函数。此时，由定理 D 即可完成定理 2 的证明。

致 谢

本论文得到广东省高等学校优秀青年教师培养计划项目(YQ2015089)，广东自然科学基金项目(2015A030313620)，广东海洋大学优秀青年教师培养计划项目(2014007，HDYQ2015006)，广东海洋大学创新强校工程项目(gdou2016050209)的资助。

参考文献

[1] Hayman, W. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[2] Laine, I. (1993) Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. W.de Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110863147

[3] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[4] Rubel, L.A. and Yang, C.C. (1977) Values Shared by an Entire Function and Its Derivative. *Lecture Notes in Mathematics* 599, Springer-Verlag, Berlin, 101-103. https://doi.org/10.1515/9783110863147

[5] Mues, E. and Steinmetz, N. (1979) Meromorphe funktionen, die mir ohrer ableitung zwei werte teilen. *Manuscripta Mathematica*, **29**, 195-206. https://doi.org/10.1007/BF01303627

[6] Mues, E. and Steinmetz, N. (1983) Meromorphe funktionen, die mirohrer ableitung werte teilen. *Results in Mathematics*, **6**, 48-55. https://doi.org/10.1007/BF03323323

[7] Gundersen, G.G. (1983) Meromorphic Functions That Share Two Finite Values with Their Derivative. *Pacific Journal of Mathematics*, **105**, 299-309. https://doi.org/10.2140/pjm.1983.105.299

[8] Li, P. and Yang, C.C. (2000) When an Entire Function and Its Linear Differential Polynomial Share Two Values. *Illinois Journal of Mathematics*, **44**, 349-361.

[9] Frank, G. and Weissenborn, G. (1986) Meromorphe Funktionen, die mit einer inher Ableitung Werte teilen. *Complex Variables*, **7**, 33-43. https://doi.org/10.1080/17476938608814184

[10] Yang, L.Z. (1999) Solution of a Differential Equation and Its Appliation. *Kodai Mathematical Journal*, **22**, 458-464. https://doi.org/10.2996/kmj/1138044097

[11] Li, S. (2013) Meromorphic Functions Sharing Two Values IM with Their Derivatives. *Results in Mathematics*, **63**, 965-971. https://doi.org/10.1007/s00025-012-0246-x