Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 407-410
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84054

Three Derivation Methods of Diffusion Equation

Yuanying Zhuang[1], Ruige Li[1], Xiao Song[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Nanyang Institute of Technology, Nanyang Henan
[2]School of Computer and Information Engineering, Nanyang Normal University, Nanyang Henan
Email: yuanying566@foxmail.com, sxyoland@foxmail.com

Received: Jun. 25th, 2018; accepted: Jul. 10th, 2018; published: Jul. 17th, 2018

Abstract

Brownian motion has important applications among financial engineering, biology, physics and management science. Also Brownian motion is closed related to diffusion equation in mathematical physics. This article will introduce three derivation methods of diffusion equation in details, *i.e.*, from the perspectives of physics, stochastics and functional analysis, in order to provide reference for people further studying Brownian motion.

Keywords

Brownian Motion, Diffusion Equation, Functional

扩散方程的三种导出方法

庄元颖[1]，李瑞阁[1]，宋　晓[2]

[1]南阳理工学院数学与统计学院，河南　南阳
[2]南阳师范学院计算机与信息工程学院，河南　南阳
Email: yuanying566@foxmail.com, sxyoland@foxmail.com

收稿日期：2018年6月25日；录用日期：2018年7月10日；发布日期：2018年7月17日

摘　要

布朗运动在金融工程、生物医药、物理以及管理科学中都有着重要的应用，而布朗运动又和数学物理中的扩散方程紧密相关。本文将详细的介绍扩散方程的三种导出方式，也就是从物理、随机以及泛函的角度导出扩散方程，为大家深入研究布朗运动提供参考。

文章引用: 庄元颖, 李瑞阁, 宋晓. 扩散方程的三种导出方法[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 407-410.
DOI: 10.12677/pm.2018.84054

关键词

布朗运动，扩散方程，泛函

1. 引言

扩散方程是物理中描述液体流动，气流渗透的模型。它和布朗运动有着密切的关系，它的推导对理解布朗运动这样一个起源于生物学的问题有着重要的意义。推导扩散方程的方法很多，比如大家可以参考文献[1] [2]，以下我们主要分别从物理学，随机过程以及泛函分析的角度来推导扩散方程。

2. 物理上的推导

考虑某种物质在一种介质中的扩散现象，比如染料在水或者水晶中的扩散。我们还假设介质初始状态是各向同性的，也就是说，介质具有没有特定方向且在空间里面是均匀的。现在考虑与染料分子运动方向垂直的一个平面，该平面被染料分子从平面的一面到另一面持续的穿过。如果平面左边的浓度高于右边，将会有更多的染料粒子，也就是有染料粒子净流从左边流向右边。两边的浓度差越高，就会有更多的染料粒子从左边流向右边。反向亦然。

不妨将 $u(t,x)$ 记作染料在时间 t 的所处位置 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 的浓度，根据菲克定律，单位时间粒子流通过与粒子流运动方向垂直平面的单位截面积的向量场为

$$F(t,x)=-\frac{1}{2}a\nabla u(t,x)$$

这里 $F(t,x)$ 反映出染料净流的方向和强度，a 为扩散系数，∇ 为梯度算子。这样，垂直于扩散方向的单位向量 n 的流量就为 $F(t,x)\cdot n$。

现在我们考虑环绕点 x 的任意体积 V，那么在体积 V 中的染料粒子 数为 $\int_V u(t,x)\mathrm{d}x$。在体积 V 中染料粒子数的变化率

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u(t,x)\mathrm{d}x=-\int_{\partial V}F(t,x)\cdot\mathrm{d}n=-\int_V\nabla\cdot F(t,x)\mathrm{d}x,$$

最后一步用到了散度定理。因为 V 是任意的，我们就导出了扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{1}{2}\nabla\cdot(a\nabla u)(t,x).$$

当 $a=1$ 且 x 为二维向量时，我们得到柯尔莫格洛夫向前方程

$$\frac{\partial}{\partial t}u_t(x,y)=\frac{1}{2}\Delta_y u_t(x,y). \tag{1}$$

其中，$u_t(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$ 为布朗运动的转移密度方程。

3. 随机过程上的推导

以下的推导我们需要用到切普曼－柯尔莫格洛夫方程和离散性的随机行走的知识，见参考文献[3]。

我们现在考虑整点的一维对称随机行走。令 $u_k(m)$ 表示随机行走从原点出发在时刻 m 到达原点右边第 k 步的概率。由切普曼－柯尔莫格洛夫方程，我们得到

$$u_k(m+1)=\frac{1}{2}u_{k+1}(m)+\frac{1}{2}u_{k-1}(m)$$

由此得到

$$u_k(m+1)-u_k(m)=\frac{1}{2}\left[u_{k+1}(m)-2u_k(m)+u_{k-1}(m)\right] \tag{2}$$

上式左边是时间导数的离散化，而右边是空间二阶导数的离散化的一半。通过两边取极限，把两次位移间的时间缩短到 0，同时位移步数也缩短到 0，我们就可以从(2)式过渡到(1)式，也就是说，假设两次位移间的时长为 Δ，并且每步的长度为 ξ，那么(2)变为

$$\frac{u_{k\xi}((m+1)\Delta)-u_{k\xi}(m\Delta)}{\Delta}=\frac{\frac{1}{2}\left[u_{(k+1)\xi}(m\Delta)-2u_{k\xi}(m\Delta)+u_{(k-1)\xi}(m\Delta)\right]}{\Delta} \tag{3}$$

现在令 Δ 和 ξ 趋于 0，并且同时让 m 和 k 趋于∞使得 $k\xi\to x$ 而 $m\Delta\to t$。则 $u_{k\xi}(n\Delta)\to u(t,x)$，那么(3)式形式变成了(1)式。

4. 泛函分析上的推导

以下用到泛函分析和马氏过程的知识大家见参考文献[4] [5]。

我们先通过上面提到的布朗运动的转移密度方程构造转移密度半群 $(u_t)_{t\ge 0}$ 定义如下

$$u_t f(x)=\begin{cases}\int_{-x}^{x}u_t(x,y)f(y)\mathrm{d}y, & (t>0)\\ f(x), & (t=0)\end{cases}$$

我们可以验证 $(u_t)_{t\ge 0}$ 是一个半群：

$$u_{t+s}=u_t\cdot u_s=u_s\cdot u_t \qquad (s,t\ge 0) \tag{4}$$

这就是所谓的 C-K 方程。利用(4)可推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_t=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(u_{t+s}-u_t)=u_t\Gamma=\Gamma u_t, \tag{5}$$

在这里，定义

$$\Gamma=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(u_s-I)$$

是 $(u_t)_{t\ge 0}$ 的生成元，其中 I 是单位算子。对于合适的 f，我们定义 Γf 为

$$\Gamma f=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(u_t f-f)$$

实际上，如果 $f\in C_b^2(R)$，也就是 f 的二阶导数有界，那么

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(u_t f-f\right)(x)&=\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f\left(x+y\sqrt{t}\right)-f\left(x\right)}{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}\\&=\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\left\{y\sqrt{t}f'\left(x\right)+\frac{1}{2}y^2tf''\left(x+\theta y\sqrt{t}\right)\right\}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}\\&=\frac{1}{2}f''\left(x\right).\qquad\left(\text{这里}\theta\in\left(0,1\right)\text{取决于}y\sqrt{t}\right)\end{aligned}$$

上式中我们用到了泰勒公式。由上式我们得到布朗运动的生成元是

$$\Gamma=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2},$$

至少在 $C_b^2\left(R\right)$ 的意义下。从(5)我们发现，对于 $f\in C_b^2\left(R\right)$，

$$\frac{\partial}{\partial t}u_t f\left(x\right)=u_t\Gamma f\left(x\right)=\frac{1}{2}\Gamma_t f''\left(x\right),$$

对上式分部积分，我们得到(1)式。

5. 结论

本文介绍了三种从不同角度推导扩散过程的方法，利用物理学，随机过程及泛函分析的方法揭示了布朗运动和扩散方法的关系，为随机方程理论在金融工程、生物医药等方面的应用奠定了坚实的理论基础。

基金项目

国家自然科学基金——河南省联合基金资助(U1504605)。南阳理工学院引进人才基金资助(030/510037)。

参考文献

[1] 黄新, 李俊锋. 布朗运动的扩散方程[J]. 湖南城市学院学报, 2010, 19(1): 45-46.

[2] 焦潍苹, 李宏亮. 随机行走的扩散方程[J]. 浙江外国语学院学报, 2011(1): 96-99.

[3] Brzezniak, Z. and Zastawniak, T. (2005) Basic Stochastic Processes. Springer-Verlag London Limited, London.

[4] Rogers, L.C.G. and Williams, D. (2000) Diffusions, Markov Processes and Martingales: Volume 1 (Cambridge Mathematical Library). 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Karlin, S. and Taylor, H.M. (1975) A First Course in Stochastic Processes. 2nd Edition, Academic Press, New York.