Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 398-406
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84053

Hans汉斯

Matrix Lattice Transform Operator for Super Gabor Frames

Binghuan Xiao, Zhongyan Li

Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, NCEPU, Beijing
Email: 17801137786@163.com, lzhongy@ncepu.edu.cn

Received: Jun. 24th, 2018; accepted: Jul. 10th, 2018; published: Jul. 17th, 2018

Abstract

For a time frequency lattice $\Lambda=(a\mathbb{Z}\times b\mathbb{Z})$, it is known that a super Gabor frame of length L exists if and only if $|ab|\le\frac{1}{L}$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$. In $L^2(\mathbb{R}^2)$, we know that we can construct a super Gabor frame for $\Lambda=(\mathbb{Z}^2\times A\mathbb{Z}^2)$. We can construct a super Gabor frame (especially orthonormal super Gabor frame) for any full rank lattices by our result. And we find matrix lattice transform operator and it is necessary and sufficient condition. Matrix lattice transform operators can be used to obtain new super Gabor frames and can help us better understand the basic theory of super Gabor frames theorem based on our method of constructing a super Gabor frame. At last, we give some examples about how to construct super Gabor frames based on our method and the application of matrix lattice transform operator.

Keywords

Full Rank Lattice, Super Gabor Frame, Orthonormal Super Gabor Frame, Matrix Lattice Transform Operator

超Gabor框架中的矩阵格变换算子

肖炳环，李忠艳

华北电力大学数理学院，北京
Email: 17801137786@163.com, lzhongy@ncepu.edu.cn

收稿日期：2018年6月24日；录用日期：2018年7月10日；发布日期：2018年7月17日

摘　要

在$L^2(\mathbb{R})$空间，对于时频格$\Lambda=(a\mathbb{Z}\times b\mathbb{Z})$，存在超Gabor框架的充要条件是$|ab|\le\frac{1}{L}$。在$L^2(\mathbb{R}^2)$空间，

文章引用: 肖炳环, 李忠艳. 超 Gabor 框架中的矩阵格变换算子[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 398-406.
DOI: 10.12677/pm.2018.84053

已知如何构造一个 $\mathcal{K}=\mathbb{Z}^2,\mathcal{L}=A\mathbb{Z}^2$ 的超Gabor框架。本文的目的是构造 $\mathcal{K}=A\mathbb{Z}^2,\mathcal{L}=B\mathbb{Z}^2$ 意义下的超Gabor框架(特别是当A = I的时候，存在正交的超Gabor框架，$\mathcal{K},\mathcal{L}$ 是满秩的格)，这样就能构造出任何满秩的格的超Gabor框架，并且给出矩阵格变换算子的概念和充要条件。在构建超Gabor框架的方法之上，矩阵格变换算子能帮助我们更好的理解超Gabor框架的基础理论。最后，给出了关于构造超Gabor框架的还有矩阵格变换算子的例子。

关键词

满秩格，超Gabor框架，正交超Gabor框架，矩阵格变换算子

1. 引言

本篇文章的目的是在 $\Lambda=\left(A\mathbb{Z}^2\times B\mathbb{Z}^2\right)$ 上构造超 Gabor 框架并且研究一维空间的矩阵格变换算子。我们先介绍下关于本文的基本概念：

若 $\mathbb{H}$ 是希尔伯特空间。一个 $\mathbb{H}$ 里的序列 $\{f_n\}$ 称作框架，如果存在常数 $C_1,C_2>0$，使得：

$$C_1\|f\|^2\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|\langle f,f_n\rangle\right|^2\le C_2\|f\|^2,\forall f\in\mathbb{H}$$

当 $C_1=C_2=C$ 时，框架 $\{f_n\}$ 叫做紧框架；当 $C_1=C_2=1$ 时，框架 $\{f_n\}$ 叫做正规紧框架。

若 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中两个满秩的格。那么 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ 中满秩的格 $\Lambda=\mathcal{K}\times\mathcal{L}=\{(k,l)\mid k\in\mathcal{K},l\in\mathcal{L}\}$ 通常被视为可分的时频格：$\mathcal{K}$ 作为频域格，$\mathcal{L}$ 作为时域格[1]。在 $\mathbb{H}=L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ 情况下，序列有下面这种形式：

$$G(g,\Lambda)=\left\{g_{k,l}\mid g_{k,l}=\mathrm{e}^{i2\pi kx}g(x-l):k\in\mathcal{K},l\in\mathcal{L}\right\}$$

其中 $g(x)\in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$。并且 $G(g,\Lambda)$ 是 Gabor (或 Weyl Heisenberg)族定义的由 **g** 的时频偏移获得的函数集合[2]。我们称 **g** 是 Gabor 框架生成元，当序列 $g_i(x)\in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ 是一个 Gabor 框架的时候。即当存在常数 $C_1,C_2>0$ 使得对于全部 $f\in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ 时，我们有

$$C_1\|f\|^2\le\sum_{k\in\mathcal{K},l\in\mathcal{L}}\left|\langle f,g_{k,l}\rangle\right|^2\le C_2\|f\|^2$$

当 $C_1=C_2=1$，该框架叫做 Parseval Gabor 框架生成元。

本文的焦点在超 Gabor 框架的构建以及矩阵格变换算子上，一个向量 $g(x)=\left(g^1(x),g^2(x),\cdots,g^L(x)\right)$ 叫做长度为 L 的超 Gabor 框架生成元，如果 $G(g,\Lambda)=\left\{g_{k,l}^{(1)}(x)\oplus g_{k,l}^{(2)}(x)\oplus\cdots\oplus g_{k,l}^{(L)}(x)\right\}$ 是希尔伯特直和空间 $\oplus_{j=1}^{L}L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ 上的一个框架，其中 $g^{(i)}(x)\in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$。

在一维空间如果存在长度为 L 的超 Gabor 框架，那么 $|ab|\le\dfrac{1}{L}$，此时 $\mathcal{K}=a\mathbb{Z},\mathcal{L}=b\mathbb{Z}$。事实上任何 Parseval 框架生成元 **g** 都满足范数条件 $\|g\|=|ab|$ [3]。

2. 引理准备

一些超 Gabor 框架 $L=1$ 即 Gabor 框架时的一些引理：

引理 2.1：存在前框架函数族 $\{f_\alpha:\alpha\in\mathbb{Z}\}$（当格 $\mathcal{K}=a\mathbb{Z},\mathcal{L}=b\mathbb{Z}$ 时），使得 $\sum_\alpha G^*_{f_\alpha}G_{f_\alpha}=1$ 以及 $\sum_\alpha\|f_\alpha\|_2^2=|ab|$。

引理 2.2：如果 $|ab|\le 1$，则存在函数 $g\in L^2(\mathbb{R})$，使得 $G(g,\Lambda)$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一个框架[4]。

引理 2.3：令 $\mathcal{K}=a\mathbb{Z}$ 和 $\mathcal{L}=b\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{R}$ 中两个满秩的格，因此：

1) 存在长度为 L 的超 Gabor 框架的充要条件是 $|ab|\le\frac{1}{L}$；

2) 存在长度为 L 的正交超 Gabor 框架的充要条件是 $|ab|=\frac{1}{L}$[5]。

3. 主要结果

首先给出本文的主要结论之一如何构造一维超 Gabor 框架。在之前的基础上拓展到任意满秩的格 $\mathcal{K}$，而不是 $\mathcal{K}=\mathbb{Z}$。首先，称 $\{d_1,d_2,\cdots,d_L\}$ 是 $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}(a\in\mathbb{Z})$ 的全数字集合如果 $d_1,d_2,\cdots,d_L\in\mathbb{Z}$ 满足 $\{a\mathbb{Z}+d_i\}_{i=1}^L$ 是 $\mathbb{Z}$ 的划分区间。

定理 3.1：令 $\mathcal{K}=a\mathbb{Z},\mathcal{L}=b\mathbb{Z}$ 是满秩的格。若 $\{d_1,d_2,\cdots,d_L\}$ 是 $\mathbb{Z}/(ab)^{-1}\mathbb{Z}$ 的全数字集合，那么对于任意的 $a^{-1}\mathbb{Z}$ 的基本域 Ω，向量 $\mathbf{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_L)$ 是长度为 L 的超 Gabor 框架生成元(特别当 $a=1$ 的时候，为一个正交超 Gabor 框架)，其中 $g_i=\Omega_i$，

$$\Omega_i=\bigcup_{n\in a^{-1}\mathbb{Z}}\left[\left((ab)\Omega+bd_i+n\right)\cap\Omega\right]\ \ (1\le i\le L,L=|ab|^{-1}).$$

证明：首先证明 $\{\Omega\}_{i=1}^L$ 是 Ω 的一个划分区间，因此每一个 Ω_i 通过 $b\mathbb{Z}$ 为瓦格覆盖了 $\mathbb{R}$。由 $\{d_1,d_2,\cdots,d_L\}$ 是 $\mathbb{Z}/(ab)^{-1}\mathbb{Z}$ 的一个全数字集合，得到：$bZ=\bigcup_{i=1}^L\left(a^{-1}Z+bd_i\right)$。因此

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^L\Omega_i&=\Omega\cap\left[\bigcup_{i=1}^L\bigcup_{n\in a^{-1}\mathbb{Z}}\left((ab)\Omega+bd_i+n\right)\right]\\&=\Omega\cap\left\{\left[(ab)\Omega+bd_1+a^{-1}\mathbb{Z}\right]\cup\left[(ab)\Omega+bd_2+a^{-1}\mathbb{Z}\right]\cup\cdots\cup\left[(ab)\Omega+bd_L+a^{-1}Z\right]\right\}\\&=\Omega\cap\left[(ab)\Omega+b\mathbb{Z}\right]=\Omega\end{aligned}$$

接下来证明每一个 Ω_i 的不相交性：如果 $s\in\Omega_i\cap\Omega_j(i\ne j)$，那么 $s\in\bigcup_{n\in a^{-1}\mathbb{Z}}\left[\left((ab)\Omega+bd_i+n\right)\cap\Omega\right]$ 且 $s\in\bigcup_{n\in a^{-1}\mathbb{Z}}\left[\left((ab)\Omega+bd_j+n\right)\cap\Omega\right]$。因此 $s=(ab)s_1+bd_1+n_1$ 且 $s=(ab)s_2+bd_2+n_2$，其中 $s_1,s_2\in\Omega$，$n_1,n_2\in a^{-1}\mathbb{Z}$。又因为 $(ab)s_1+bd_1+n_1=(ab)s_2+bd_2+n_2$。因此我们得到：

$$s_1+a^{-1}d_1+(ab)^{-1}n_1=s_2+a^{-1}d_2+(ab)^{-1}n_2.$$

因为 Ω 是一个瓦格，所以 $d_1+(ab)^{-1}\mathbb{Z}=d_2+(ab)^{-1}\mathbb{Z}$，并且 $d_1-d_2\in(ab)^{-1}\mathbb{Z}$。这与 $d_1-d_2\in a^{-1}\mathbb{Z}$ 矛盾，因此我们得到 $s\in\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$。

下面证明每一个 Ω_i 是以 $b\mathbb{Z}$ 为瓦格的：首先令 $x\in\Omega_i\cap(\Omega_j+bl),l\in\mathbb{Z}$。记 $x=(ab)x_1+bd_i+n_1$，$x=(ab)x_2+bd_i+n_2+b\mathbb{Z}=y+bl$，其中 $x_1,x_2\in\Omega,n_1,n_2\in a^{-1}\mathbb{Z}$，$y=(ab)x_2+bd_i+n_2$。因此得到 $(ab)(x_1-x_2)=n_2-n_1+bl$。因为 Ω 是以 $a^{-1}\mathbb{Z}$ 为瓦格的，有 $x_1=x_2$，$bl=n_1-n_2$，所以 $x-y=n_1-n_2\in a^{-1}\mathbb{Z}$，$x=y$，$l=0$。这样就证明了 Ω_i 通过 $b\mathbb{Z}$ 包裹 $\mathbb{R}$；第二，证明 $\mu(\Omega_i)=|b|$。对于任意 $x\in\Omega_1$，有一些 $y\in\Omega$，$n\in a^{-1}\mathbb{Z}$ 使得 $x=(ab)y+bd_1+n$。不失一般性，假设 $d_1\in(ab)^{-1}\mathbb{Z}$，则 $bd_1\in a^{-1}\mathbb{Z}$，$x-(ab)y=bd_1+n\in a^{-1}\mathbb{Z}$。这意味着 Ω_1 是 $b\mathbb{Z}$ 平移的 $(ab)\Omega$ 的同余子集。对于任意 $y\in(ab)\Omega$，有一些 $x\in\Omega$，使得 $y=(ab)x$。由于 Ω 是 $a^{-1}Z$ 瓦格的，有 $y=z+n$，其中 $z\in\Omega$，$n\in a^{-1}\mathbb{Z}$。这意味着 $Z=(ab)x+bd_1-n-bd_1$。因为 $-n-bd_1\in a^{-1}\mathbb{Z}$，因此 $z\in\Omega_1$。这样就证明了 $(ab)\Omega$ 是 $b\mathbb{Z}$ 平移的 Ω_1 的同余子集。所以 Ω_1 是 $b\mathbb{Z}$ 平移的

$(ab)\Omega$ 的同余子集，即 $\mu(\Omega_i)=|b|$。

Ω_j 是 $b\mathbb{Z}$ 平移的 Ω_1+bd_j 的同余子集的证明可以在[5]中看到。最后我们证明 $g=(g_1,g_2,\cdots,g_L)$ 是长度为 L 的超 Gabor 框架。这就要求 $G(g_i,\Lambda)$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的 Parseval 框架并且 $G(g_i,\Lambda)$ 和 $G(g_j,\Lambda)(i\neq j)$ 是强不相交的。

由上可知 Ω_j 通过 $b\mathbb{Z}$ 为瓦格覆盖了 $\mathbb{R}$ 通过 $a^{-1}\mathbb{Z}$ 包裹 $\mathbb{R}$。由此可得 $L^2(\mathbb{R})=\bigoplus_{l\in a^{-1}\mathbb{Z}}L^2(\Omega_j+l)$，$\|f\|^2=\sum_{k\in a\mathbb{Z}}\left|\left\langle f,\mathrm{e}^{i2\pi kx}g_j(x-l)\right\rangle\right|$，对于任意 $f\in L^2(\Omega_j+l)$。记 $f=\sum_{l\in b\mathbb{Z}}f_l$ 对每一个 $f\in L^2(\mathbb{R})$，可得 $\left\langle f_l,\mathrm{e}^{i2\pi kx}g_j(x-l)\right\rangle=\left\langle f,\mathrm{e}^{i2\pi kx}g_j(x-l)\right\rangle$。这样可知：

$$\|f\|^2=\sum_{l\in b\mathbb{Z}}|f_L|^2=\sum_{l\in b\mathbb{Z}}\sum_{k\in a\mathbb{Z}}\left|\left\langle f_l,\mathrm{e}^{i2\pi kx}g_j(x-l)\right\rangle\right|^2=\sum_{l\in b\mathbb{Z}}\sum_{k\in a\mathbb{Z}}\left|\left\langle f,\mathrm{e}^{i2\pi kx}g_j(x-l)\right\rangle\right|^2.$$

因此 $G(g_j,\Lambda)$ 是一个 $L^2(\mathbb{R})$ 的 Parseval 框架。

对于每一个 l 有：

$$l\sum_{k\in a\mathbb{Z}}\left\langle f,\mathrm{e}^{i2\pi kx}g_j(x-l)\right\rangle\mathrm{e}^{i2\pi kx}g_i(x-l)=0,$$

其中 $f\in L^2(\mathbb{R})$。因为 Ω_j 和 Ω_i 是 Ω 的不相交的基本域。这样得到：

$$\sum_{l\in b\mathbb{Z}}\sum_{k\in a\mathbb{Z}}\left\langle f,\mathrm{e}^{i2\pi kx}g_j(x-l)\right\rangle\mathrm{e}^{i2\pi kx}g_i(x-l)=0,$$

因此 $G(\Omega_j,\Lambda)$ 和 $G(\Omega_i,\Lambda)$ 是强不交的[6]。所以 $g=(g_1,g_2,\cdots,g_L)$ 是一个长度为 L 的超 Gabor 框架。

特别的，当 $a=1$ 时，$\|g\|^2=\sum_{j=1}^{L}\|g_j\|^2=\sum_{j=1}^{L}\mu(\Omega_j)=1$。所以 $g=(g_1,g_2,\cdots,g_L)$ 是一个长度为 L 的正交超 Gabor 框架。

上述定理给出了一维空间对于任何满秩的格 $K=a\mathbb{Z},L=b\mathbb{Z}$ 如何构造超 Gabor 框架。下个定理将给出如何在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上构造超 Gabor 框架的方法。首先定义一些概念：记 $S_i(i=1,2,3,4)$ 是 $(AB)\Omega$ 的四条边线，S_L 是其中最短的一条。令 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是 S_L 的两个端点，那么 $S_x=|x_1|+|x_2|,S_y=|y_1|+|y_2|$。并且定义以下符号($1\leq i,j\leq L$)：

$$\sigma=\begin{cases}\begin{bmatrix}|x_1-x_2| & 0\\ 0 & |y_1|+|y_2|\end{bmatrix}, S_x<S_y\\ \begin{bmatrix}|x_1|+|x_2| & 0\\ 0 & |y_1-y_2|\end{bmatrix}, S_x>S_y\\ \begin{bmatrix}|x_1|+|x_2| & 0\\ 0 & |y_1|+|y_2|\end{bmatrix}, S_x=S_y\end{cases},\quad k_{i,j}=\begin{cases}\begin{bmatrix}i-1\\ 0\end{bmatrix}, S_x<S_y\\ \begin{bmatrix}0\\ i-1\end{bmatrix}, S_x>S_y\\ \begin{bmatrix}i-1\\ j-1\end{bmatrix}, S_x=S_y\end{cases}$$

定理 3.2：令 $\mathcal{K}=A\mathbb{Z}^2$ 和 $\mathcal{L}=B\mathbb{Z}^2$ 是满秩的格，并且 $AB^{-1}\in M_{(d\times d)}(\mathbb{Z})$。则对 $|detA|^{-1}\mathbb{Z}^2$ 的任意基本域 Ω，向量 $g=(g_1,g_2,\cdots,g_L)$ 是长度为 L 的超 Gabor 框架生成元(特别的当 $|detA|=1$ 时，是一个正交超 Gabor 框架)，其中 $g_i=\Omega_i$ 并且

$$\Omega_{i,j}=\bigcup_{k\in A\mathbb{Z}^2}\left[(AB)\Omega+\sigma k_{i,j}+k\right].$$

因为 $\mu(AB\Omega)=\dfrac{\mu(\Omega)}{L}$ 并且每一个 $\mu(\Omega_{i,j})=\mu(AB\Omega)$，所以得到 L 个 Ω_i。因此

$$\Omega_i = \bigcup_{k\in A\mathbb{Z}^2}\left[\left((AB)\Omega+\sigma k_{i,j}+k\right)\cap\Omega\right]\ \ (1\le i\le L,\ \ L=\left|detAB\right|^{-1}).$$

这个定理可以非常简单的证明。我们可以关注以下几点：第一，$\{\Omega_i\}$ 是 Ω 的划分区间；第二，每一个 Ω_i 是 $\sigma\mathbb{Z}^2$ 瓦格的；最后

$$\sum_{l\in B\mathbb{Z}^2}\sum_{k\in A\mathbb{Z}^2}\left\langle f,\mathrm{e}^{i2\pi\langle k,x\rangle}g_j(x-l)\right\rangle\mathrm{e}^{i2\pi\langle k,x\rangle}g_m(x-l)=0\,(i\ne m).$$

因此在这种情况下存在超 Gabor 框架。当 $|detA|=1,\|g\|^2=\sum_{j=1}^{L}\|g_j\|^2=\mu(\Omega)=1$ 时，存在正交超 Gabor 框架。下一节给出如何用定理 3.1 和定理 3.2 构造超 Gabor 框架的例子。接下来从格同构和矩阵格变换算子的定义开始，研究矩阵格变换算子[7]。

定义 3.3：令 $\mathcal{K}_1=A\mathbb{Z}^2$，$\mathcal{L}_1=B\mathbb{Z}^2$ 和 $\mathcal{K}_2=C\mathbb{Z}^2$，$\mathcal{L}_2=D\mathbb{Z}^2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中四个满秩的格。一个超 Gabor 框架：

$$G(g,\Lambda)=\left\{g_{k,l}^{(i)}\middle|\ g_{k,l}^{(i)}=\mathrm{e}^{i2\pi kx}g^{(i)}(x-l):k\in\mathcal{K}_1,l\in\mathcal{L}_1,1\le i\le L_m\right\}$$

和另外一个超 Gabor 框架：

$$G(h,\Lambda)=\left\{h_{k,l}^{(j)}\middle|\ h_{k,l}^{(j)}=\mathrm{e}^{i2\pi kx}h^{(i)}(x-l):k\in\mathcal{K}_2,l\in\mathcal{L}_2,1\le j\le L_n\right\}$$

称为格同构的，如果 $|detAB|=|detCD|,(L_m,L_n\in\mathbb{Z},L_m,L_n>0)$。

定义 3.4：矩阵 $X(x_{ij}\in R)$ 称为超 Gabor 框架的矩阵格变换算子，如果 $X\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}$，其中 A、B、C、D 如同定义 3.3 里一样。

一维超 Gabor 框架的矩阵格变换算子有一个性质。

定理 3.5：对角矩阵或者反对角矩阵 A 是一个超 Gabor 框架的矩阵格变换算子当且仅当 $|det(A)|=1$。

证明：我们只证明对角矩阵的情形就可以，反对角矩阵同理可得。我们先证定理 3.5 的必要性。如果

$$G(g,\Lambda)=\left\{g_{k,l}^{(1)}\oplus g_{k,l}^{(2)}\oplus\cdots\oplus g_{k,l}^{(L)}:k\in\mathcal{K}_1,l\in\mathcal{L}_1\right\}$$

和

$$G(h,\Lambda)=\left\{h_{k,l}^{(1)}\oplus h_{k,l}^{(2)}\oplus\cdots\oplus h_{k,l}^{(L)}:k\in\mathcal{K}_2,l\in\mathcal{L}_2\right\}$$

是两个超 Gabor 框架，其中 $\mathcal{K}_1=a\mathbb{Z},\mathcal{L}_1=b\mathbb{Z},\mathcal{K}_2=c\mathbb{Z},\mathcal{L}_2=d\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{R}$ 中四个满秩的格[8]。存在一个矩阵格变换算子，使得 $A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$。

令 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{bmatrix}$，所以我们可以得到 $\begin{bmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$，所以

$$\begin{cases}a_{11}a=c\\a_{22}b=d\end{cases}.$$

由上式可得：$a_{11}=\dfrac{c}{a}$，$a_{22}=\dfrac{d}{b}$。用以上方程直接计算 $|det(A)|$。因为 $|ab|=|cd|$，所以 $|det(A)|=|a_{11}a_{22}|=\left|\dfrac{c}{a}\times\dfrac{d}{b}\right|=\left|\dfrac{cd}{ab}\right|=1$。

现在证明定理 3.5 的充分性：如果有一个对角矩阵形如 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{bmatrix}$ 并且满足 $|det(A)|=|a_{11}a_{22}|=1$。

存在 $K_1 = a\mathbb{Z}, L_1 = b\mathbb{Z}$ （$a,b\in\mathbb{R}$）的超 Gabor 框架 $G(g,\Lambda)=\left\{g_{k,l}^{(1)}\oplus g_{k,l}^{(2)}\oplus\cdots\oplus g_{k,l}^{(L)}:k\in\mathcal{K}_1,l\in\mathcal{L}_1\right\}$。则我们用 A 对 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ 做变换。得到 $A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$，所以 $\begin{cases}c=a_{11}a\\d=a_{22}b\end{cases}$。

那么存在 $\mathcal{K}_2=c\mathbb{Z},\mathcal{L}_2=d\mathbb{Z}$ 作为时频格的超 Gabor 框架 $G(h,\Lambda)=\left\{h_{k,l}^{(1)}\oplus h_{k,l}^{(2)}\oplus\cdots\oplus h_{k,l}^{(L)}:k\in\mathcal{K}_2,l\in\mathcal{L}_2\right\}$。[9] $|cd|=|a_{11}a\times a_{22}b|=|a_{11}a_{22}ab|=|ab|$。因此 A 符合定义 3.4，即 A 是一个超 Gabor 框架的矩阵格变换算子。

需要注意的是：如果一个矩阵 A 满足 $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$，其中 a、b、c、d 是两个超 Gabor 框架的四个满秩的格。A 不一定是一个矩阵格变换算子。例如：$a=2,b=\frac{1}{4},c=\frac{1}{4},d=2$，则存在一个矩阵 $A=\begin{bmatrix}1/4&-1\\1/2&4\end{bmatrix}$ 使得 $\begin{bmatrix}1/4&-1\\1/2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1/4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/4\\2\end{bmatrix}$ 并且 $\left|2\times\frac{1}{4}\right|=\left|\frac{1}{4}\times 2\right|=\frac{1}{2}$.，但是 $|A|\neq 1$。

推论 3.6：对于一维超 Gabor 框架：

$$G(g,\Lambda)=\left\{g_{k,l}^{(1)}\oplus g_{k,l}^{(2)}\oplus\cdots\oplus g_{k,l}^{(L)}:k\in\mathcal{K}_1,l\in\mathcal{L}_1\right\}(\mathcal{K}_1=x\mathbb{Z},\mathcal{L}_1=y\mathbb{Z}),$$

它一定格同构于另一个超 Gabor 框架：

$$G(h,\Lambda)=\left\{h_{k,l}^{(1)}\oplus h_{k,l}^{(2)}\oplus\cdots\oplus h_{k,l}^{(L)}:k\in\mathcal{K}_2,l\in\mathcal{L}_2\right\}(\mathcal{K}_2=\mathbb{Z},\mathcal{L}_2=z\mathbb{Z}).$$

并且存在一个矩阵格变换算子 A 使得 $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\z\end{bmatrix}$。

4. 算例

论文在本节给出有关如何构造超 Gabor 框架的例子。同时我们也使用矩阵格变换算子得到新的超 Gabor 框架。

例 4.1：1) 令 $a=2,b=\frac{1}{4}$。那么 $|ab|^{-1}=2$，令 $\Omega=\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 是通过 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 为瓦格覆盖了 $\mathbb{R}$ 的区间。令 $g_i=\chi_{\Omega_i},i=1,2$，其中每一个 Ω_i 就像图 1 中所示。那么由定理 3.1，$\left\{g_{k,l}^{(1)}\oplus g_{k,l}^{(2)}\right\}$ 是长度为 2 的超 Gabor 框架。

2) 令 $a=\frac{1}{4},b=2$。那么 $|ab|^{-1}=2$，令 $\Omega=[-2,2]$ 是通过 $4\mathbb{Z}$ 为瓦格覆盖了 $\mathbb{R}$ 的区间。令 $g_i=\chi_{\Omega_i},i=1,2$，其中每一个 Ω_i 就像图 2 中所示。那么由定理 3.1，$\left\{g_{k,l}^{(1)}\oplus g_{k,l}^{(2)}\right\}$ 是长度为 2 的超 Gabor 框架。

例 4.2：1) 存在长度为 6 的超 Gabor 框架：

$$G(g,\Lambda)=\left\{g_{k,l}^{(1)}\oplus g_{k,l}^{(2)}\oplus\cdots\oplus g_{k,l}^{(6)}:k\in\mathcal{K}_1,l\in\mathcal{L}_1\right\}\left(\mathcal{K}_1=-2\mathbb{Z},\mathcal{L}_1=\frac{1}{12}\mathbb{Z}\right)$$

存在另一个长度为 6 的超 Gabor 框架：

$$G(h,\Lambda)=\left\{h_{k,l}^{(1)}\oplus h_{k,l}^{(2)}\oplus\cdots\oplus h_{k,l}^{(6)}:k\in\mathcal{K}_2,l\in\mathcal{L}_2\right\}\left(\mathcal{K}_2=\frac{1}{2}\mathbb{Z},\mathcal{L}_2=\frac{1}{3}\mathbb{Z}\right)$$

它们的格是同构的，因为 $\left|-2\times\frac{1}{12}\right|=\frac{1}{6}=\left|\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right|$。

2) 存在对角矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1/4&0\\0&4\end{bmatrix}$ 是一个矩阵格变换算子，使得 $\begin{bmatrix}-1/4&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1/12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\1/3\end{bmatrix}$ 并且

$\left|det\left(A\right)\right|=1$。上述框架可见图 3 和图 4。

最后我们给出一些 $L^2\left(R^2\right)$ 上构造超 Gabor 框架的例子：

例 4.3：令 $A=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$。$AB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$\left|detAB\right|^{-1}=2$，$\left|detAB\right|^{-1}=2$。令 $\Omega=\left[-2,2\right]^2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个瓦格。令 $g_i=\chi_{\Omega_i},i=1,2$，其中每一个 Ω_i 就像图 5 中所示。那么由定理 3.2，$\left\{g_{k,l}^{(1)}\oplus g_{k,l}^{(2)}\right\}$ 长度为 2 正交超 Gabor 框架。

例 4.4：令 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$。$AB=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，$\left|detAB\right|^{-1}=9$。令 $\Omega=\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]^2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个瓦格。令 $g_i=\chi_{\Omega_i},i=1,2,\cdots,9$，其中每一个 Ω_i 就像图 6 中所示。那么由定理 3.2，$\left\{g_{k,l}^{(1)}\oplus g_{k,l}^{(2)}\oplus\cdots\oplus g_{k,l}^{(9)}\right\}$ 长度为 9 的超 Gabor 框架。

5. 结论

本文给出了如何构造任意满秩格的超 Gabor 框架。发现超 Gabor 框架必格同构到一个正交超 Gabor 框架。奇妙的是，可以采取矩阵格变换算子使它们有联系。通过构造方法可以很容易地得到一个

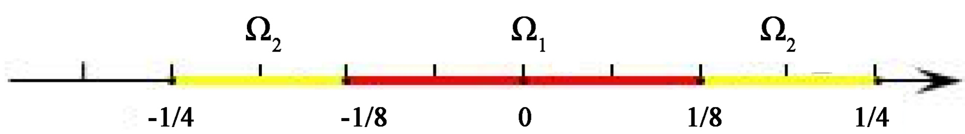

Figure 1. Example 4.1 (1)
图 1. 例 4.1 (1)

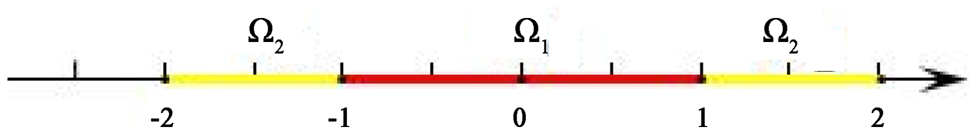

Figure 2. Example 4.1 (2)
图 2. 例 4.1 (2)

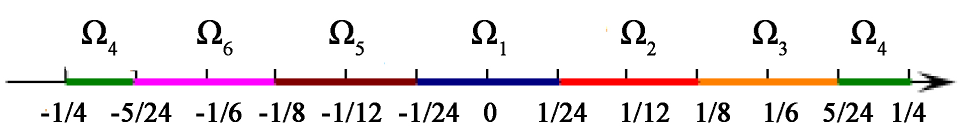

Figure 3. Example 4.2 (1): G (g, Λ)
图 3. 例 4.2 (1)

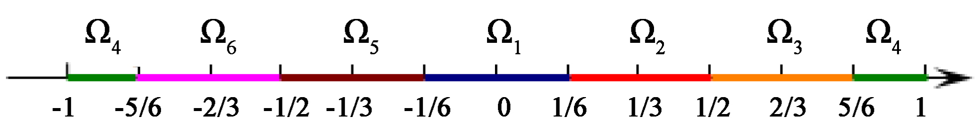

Figure 4. Example 4.2 (1): G (h, Λ)
图 4. 例 4.2 (2)

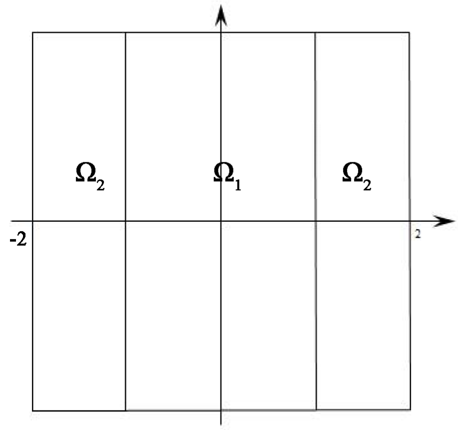

Figure 5. Example 4.3
图 5. 例 4.3

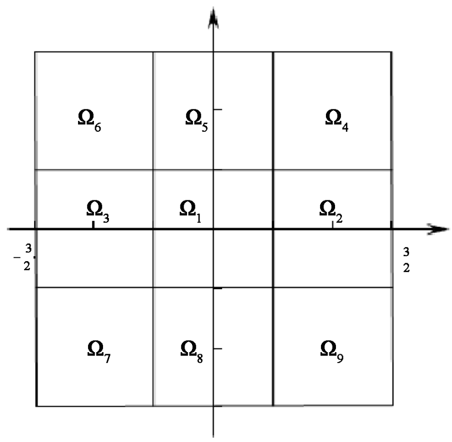

Figure 6. Example 4.4
图 6. 例 4.4

$\mathcal{K}=\mathbb{Z},\mathcal{L}=a\mathbb{Z}$ 正交的超 Gabor 框架，任何超 Gabor 框架都可以和它是格同构的。因此，可以更好地理解超 Gabor 框架和正交超 Gabor 框架。

致 谢

感谢审稿老师提出的宝贵的修改意见。感谢国家自然科学基金委的支持。

基金项目

国家自然科学基金(项目号：11571107)。

参考文献

[1] Regev, O. (2004) New Lattice-Based Cryptographic Constructions. *Journal of the ACM*, **51**, 899-942. https://doi.org/10.1145/1039488.1039490

[2] Balan, R. (1999) Density and Redundancy of the Noncoherent Weyl-Heisenberg Superframes. In: *Contemporary Mathematics*, 247, American Mathematical Society, Providence, RI, 29-41. https://doi.org/10.1090/conm/247/03796

[3] Gabardo, J.P. and Han, D. (2002) Aspects of Garbor Analysis and Operator Algebras. In: Feichtinger, H.G. and Strohmer, T., Eds., *Advances in Gabor Analysis*, Birkhauser, Boston, 129-150.

[4] Han, D. and Wang, Y. (2001) Lattice Tiling and the Weyl—Heisenberg Frames. *Geometric Functional Analysis GAFA*, **11**, 742-758. https://doi.org/10.1007/PL00001683

[5] Li, Z.Y. and Han, D.G. (2010) Constructing Super Gabor Frames: The Rational Time-Frequency Lattice Case. *Science China*, **53**, 3179-3186. https://doi.org/10.1007/s11425-010-4109-1

[6] Gu, Q. and Han, D. (2003) Functional Gabor Frame Multipliers. *Journal of Geometric Analysis*, **13**, 467-478. https://doi.org/10.1007/BF02922054

[7] Gabardo, J.P. and Han, D. (2003) Frame Representations for Group-Like Unitary Operator Systems. *The Journal of Operator Theory*, **49**, 223-244.

[8] Shi, X.L. and Chen, F. (2007) Necessary Conditions for Gabor Frames. *Science in China*, **50**, 276-284. https://doi.org/10.1007/s11425-007-2058-0

[9] Casazza, P.G. (2001) Modern Tools for Weyl-Heisenberg (Gabor) Frame Theory. Advances in Imaging. *Electron Physics*, **115**, 1-127. https://doi.org/10.1016/S1076-5670(01)80094-X