Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 445-449
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84059

Hans汉斯

On the Determinant of Product of Matrices

Yi Chen, Xiaoyou Chen*

College of Science, Henan University of Technology, Zhengzhou Henan
Email: 1785253121@qq.com, *cxy19800222@163.com

Received: Jun. 29th, 2018; accepted: Jul. 14th, 2018; published: Jul. 23rd, 2018

Abstract

This paper presents an expression of the determinant of the product of a matrix and its transpose. Also, an application is given.

Keywords

Matrix, Determinant, Transpose, Product

关于矩阵乘积的行列式

陈　意，陈晓友*

河南工业大学理学院，河南 郑州
Email: 1785253121@qq.com, *cxy19800222@163.com

收稿日期：2018年6月29日；录用日期：2018年7月14日；发布日期：2018年7月23日

摘　要

本文给出了矩阵与其自身转置的乘积的行列式的一个表达式以及一个应用。

关键词

矩阵，行列式，转置，乘积

*通讯作者。

文章引用: 陈意, 陈晓友. 关于矩阵乘积的行列式[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 445-449.
DOI: 10.12677/pm.2018.84059

1. 引言

本文所使用的符号和术语都是标准的，可参考[1] [2]与[3] [4]。

对于一个 n 级方阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，其中 a_{ij} 是实数，用 M_{ij} 表示从 A 中删去第 i 行和第 j 列后形成的 $(n-1)\times(n-1)$ 阶矩阵的行列式，并称 M_{ij} 为 A 的对应于 a_{ij} 的余子式，称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式。已知 A 的行列式

$$\det A=|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ .$$

A^{T} 表示 A 的转置，注意到 $|A|=\left|A^{\mathrm{T}}\right|$。从而，

$$\det\left(AA^{\mathrm{T}}\right)=\left|AA^{\mathrm{T}}\right|=|A|^{2},$$

这显示 $\left|AA^{\mathrm{T}}\right|$ 等于 A 的行列式的平方。

对于一般的矩阵 $M=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$，设 $i_1<\cdots<i_k$ 为 k 个行指标，$j_1<\cdots<j_k$ 为 k 个列指标，行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$$

称为 M 的 k 级子式。已知 MM^{T} 是一 $n\times n$ 的方阵。可否通过 M 的子式来表达行列式 $\left|MM^{\mathrm{T}}\right|$？本文通过 M 的子式给出了行列式 $\det\left(MM^{\mathrm{T}}\right)$ 的表达式。事实上，我们有如下结论。

命题 1 设 $M=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$。若 $n>m$，则 $\left|MM^{\mathrm{T}}\right|=0$。若 $n\le m$，则 $\det\left(MM^{\mathrm{T}}\right)=M$ 中所有 n 级子式的平方和。

2. 证明

命题 1 的证明： 若 $n>m$，则 MM^{T} 的秩 $R\left(MM^{\mathrm{T}}\right)$ 不超过 M 的秩 $R(M)$，即，

$$R\left(MM^{\mathrm{T}}\right)<R(M)\le m<n$$

因此 MM^{T} 不是一个满秩方阵，从而 $\det\left(MM^{\mathrm{T}}\right)=0$。

若 $n=m$ 或 $M=0$，则显然定理成立($n=m$ 时利用两方阵的乘积的行列式等于各自的行列式的乘积)。因此下面只需讨论 $M\neq 0$ 且 $n<m$。首先考虑

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

因为 $R(M)\le n$，所以 $M\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 存在非零解。不妨设 $\boldsymbol{X}=\left(x_1\ \cdots\ x_n\ x_{n+1}\right)^{\mathrm{T}}$ 是已正规化的解(即，$\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=1$)。由此推得

$$\begin{aligned}&\left|MM^{\mathrm{T}}\right|\\ &=\left|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ x_1 & \cdots & x_n & x_{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ a_{1,n+1} & \cdots & a_{n,n+1} & x_{n+1} \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ x_1 & \cdots & x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}^{2}\end{aligned}$$

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ x_1 & \cdots & x_n & x_{n+1} \end{pmatrix}$，并用 $A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}$ 分别表示 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 的代数余子式。因此，

$$\left|MM^T\right|=\left|A\right|^2=\left(x_1A_1+\cdots+x_{n+1}A_{n+1}\right)^2=\left|A\right|\sum_{i=1}^{n+1}x_iA_i$$

由于 $MX=\mathbf{0}$ 且 $XX^{\mathrm{T}}=1$，故有

$$\left|A\right|\left(x_iA_i\right)=\left(\left|A\right|x_i\right)A_i=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}x_i & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}x_i & \cdots & a_{n,n+1} \\ x_1 & \cdots & x_i^2 & \cdots & x_{n+1} \end{vmatrix}A_i$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \sum_{i=1}^{n+1}a_{1i}x_i & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \sum_{i=1}^{\mathrm{n+1}}a_{ni}x_i & \cdots & a_{n,n+1} \\ x_1 & \cdots & \sum_{i=1}^{\mathrm{n+1}}x_i^2 & \cdots & x_{n+1} \end{vmatrix}A_i$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n,n+1} \\ x_1 & \cdots & 1 & \cdots & x_{n+1} \end{vmatrix}A_i=A_i^2$$

从而可知 $\left|MM^{\mathrm{T}}\right|=\sum_{i=1}^{n+1}A_i^2$ 。.注意到 M 中所有 n 级子式的平方和为 $\sum_{i=1}^{n+1}A_i^2$ ，从而此情形下定理成立。

现在，设 $M=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$（$n<m$）。下面用归纳法证明该定理。若 $m-n=1$，则由上面的证明知定理成立。假设 $m-n=k$ 时定理成立，下面证明当 $m-n=k+1$ 时定理也成立。考虑 $MY=\mathbf{0}$，由于 $R(M)\le n<m$，故存在正规化的非零解 $Y=\left(y_1,\cdots,y_n,\cdots,y_m\right)^{\mathrm{T}}$ 。由此可得

$$\left|MM^{\mathrm{T}}\right|=\left|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{nm} \\ y_1 & \cdots & y_n & \cdots & y_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} & y_m \end{pmatrix}\right|$$

令 $B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{nm} \\ y_1 & \cdots & y_n & \cdots & y_m \end{pmatrix}$。注意到 $m-\left(n+1\right)=k$ 。由归纳假设可知，

$$\left|MM^{\mathrm{T}}\right|=\left|BB^{\mathrm{T}}\right|=\left|B_1\right|^2+\left|B_2\right|^2+\cdots+\left|B_{\binom{m}{n+1}}\right|^2,$$

其中$|B_1|,|B_2|,\cdots,\left|B_{\binom{m}{n+1}}\right|$是 B 的所有 $n+1$ 级子式。

记 $B_i=\begin{pmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_n} & a_{1i_{n+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{ni_1} & \cdots & a_{ni_n} & a_{ni_{n+1}} \\ y_{i_1} & \cdots & y_{ni_n} & y_{i_{n+1}} \end{pmatrix},\left(1\le i\le\binom{m}{n+1}\right)$，且 $y_{i_1},y_{i_2},\cdots,y_{i_n},y_{i_{n+1}}$ 的代数余子式分别为 $B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_n},B_{i_{n+1}}$，$\left(i_1<i_2<\cdots<i_{n+1};1\le i_1,i_2,\cdots,i_{n+1}\le\binom{m}{n+1}\right)$。于是

$$\left|B_i\right|^2=\left(y_{i_1}B_{i_1}+\cdots+y_{i_{n+1}}B_{i_{n+1}}\right)^2=\left|B_i\right|\sum_{r=1}^{n+1}y_{i_r}B_{i_r}$$

在上式中任选一项如：$\left|B_i\right|\left(y_{i_1}B_{i_1}\right)$。在$\left|B_j\right|^2(j\ne i)$中必存在一些$\left|B_j\right|^2$使得在每一个$\left|B_j\right|^2$的展开式(上式)中都存在唯一一项$\left|B_j\right|\left(y_{j_r}B_{j_r}\right)$满足 $j_r\ne i_1$ 且有

$$j_1,j_2,\cdots,j_{r-1},j_{r+1},\cdots,j_{n+1}\text{ 与 }i_2,\cdots,i_{n+1}$$

对应相等。(显然此 j 的选择有 $m-n-1$ 种从而 j_r 的选择也有 $m-n-1$ 种。)因此，$B_{j_r}=(-1)^{r-1}B_{i_1}$。从而，

$$\left|B_j\right|\left(y_{j_r}B_{j_r}\right)=\left(y_{j_r}\left|B_j\right|\right)B_{j_r}=\begin{vmatrix} y_{j_r}a_{1j_r} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{j_r}a_{nj_r} & a_{ni_2} & \cdots & a_{ni_{n+1}} \\ {y_{j_r}}^2 & y_{i_2} & \cdots & y_{i_{n+1}} \end{vmatrix}B_{i_1}$$

进而再由 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=1$，$M\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$ 可知，

$$\begin{aligned}
&\left|B_i\right|\left(y_{i_1}B_{i_1}\right)+\sum_{j_r\ne i_1}\left|B_j\right|\left(y_{j_r}B_{j_r}\right)\\
&=\begin{vmatrix} y_{i_1}a_{1i_1}+\cdots+y_{i_{n+1}}a_{1i_{n+1}} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{i_1}a_{ni_1}+\cdots+y_{i_{n+1}}a_{ni_{n+1}} & a_{ni_2} & \cdots & a_{ni_{n+1}} \\ y_{i_1}^2+\cdots+y_{i_{n+1}}^2 & y_{i_2} & \cdots & y_{i_{n+1}} \end{vmatrix}+\sum_{j_r\ne i_1}\begin{vmatrix} y_{j_r}a_{1j_r} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{j_r}a_{nj_r} & a_{ni_2} & \cdots & a_{ni_{n+1}} \\ y_{j_r}^2 & y_{i_2} & \cdots & y_{i_{n+1}} \end{vmatrix}\\
&=B_{i_1}^2
\end{aligned}$$

注意到，$B_{i_1}^2,B_{i_2}^2,\cdots,B_{i_{n+1}}^2\left(i=1,2,\cdots,\binom{m}{n+1}\right)$是 M 的所有 n 级子式的平方(计 $m-n$ 次重复)。由此推得

$$\left|MM^{\mathrm{T}}\right|=\left|BB^{\mathrm{T}}\right|=\left|B_1\right|^2+\left|B_2\right|^2+\cdots+\left|B_{\binom{m}{n+1}}\right|^2=\frac{\sum_{i=1}^{\binom{m}{n+1}}\sum_{r=1}^{n+1}B_{i_r}^2}{m-n}$$

即，$\det\left(MM^{\mathrm{T}}\right)$等于 M 的所有 n 级子式的平方和，故得证。

3. 推广与应用

命题 2 设 $M_1=(a_{ij})_{n\times m}$，$M_2=(b_{ij})_{m\times n}$。若 $n>m$，则 $|M_1M_2|=0$。若 $n\le m$，则

$$|M_1M_2|=\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_n\le m} M_1\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix} M_2\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}.$$

上式的符号含义：对任意矩阵 M，及正整数 $i_1<i_2<\cdots<i_r$，$j_1<j_2<\cdots<j_r$，将 M 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行与第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列的交叉位置的元(保证相对位置不变)所形成的行列式称为 M 的一个 r 阶子式，记作 $M\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{pmatrix}$。

对于命题 2 的证明与命题 1 证明类似(几乎不变)，只不过注意：当 $m-n=1$ 时，选取的正规化的非零解 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n & x_{n+1}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 可以是 $M_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解也可以是 $M_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解，但是若选择 $M_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解，则对 $|M_1M_2|$ 进行分解时应对 M_2 加上一列 $\boldsymbol{X}$ 所形成的方阵的行列式进行最后一列展开；若选择 $M_2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解，则对 $|M_1M_2|$ 进行分解时应对 M_1 加上一行 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 所形成的方阵的行列式进行最后一行展开，归纳法证明时也应当如此。

应用命题 1 的结论可以证明 Cauchy-Schwarz 不等式，只需要取 $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$，$(a_i,b_i\in R,1\le i\le n)$，考虑 $\left|AA^{\mathrm{T}}\right|$ 即可推出该不等式成立而且还可以得到等号成立的条件。

致　谢

作者感谢河南工业大学理学院科教融合项目以及河南工业大学“大学生创新创业训练计划项目”的支持。作者同时感谢审稿人的宝贵意见。

基金项目

本文由河南工业大学项目(26510009)，河南省教育厅项目(17A110004)以及科技厅项目(182102410049)资助。

参考文献

[1] Lewis, D.W. (1991) Matrix Theory. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/1424

[2] Rotman, J.J. (2000) A First Course in Abstract Algebra. Prentice Hall, Upper Saddle River.

[3] 李尚志. 线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 213-214.

[4] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013: 175-180.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org