Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 373-377
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84050

Hans汉斯

Local Stability of a Class of Epidemic Model

Qun Wang, Wei Feng

School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing
Email: qunwang@buaa.edu.cn, wfeng_323@buaa.edu.cn

Received: Jun. 21st, 2018; accepted: Jul. 5th, 2018; published: Jul. 12th, 2018

Abstract

In this paper, the local stability condition of a class of bilinear incidence epidemic model with vertical transmission and contact transmission is presented.

Keywords

Epidemic Model, Center Manifold, Local Stability

一类传染病模型的稳定性研究

王　群，冯　伟

北京航空航天大学，数学与系统科学学院，北京
Email: qunwang@buaa.edu.cn, wfeng_323@buaa.edu.cn

收稿日期：2018年6月21日；录用日期：2018年7月5日；发布日期：2018年7月12日

摘　要

本文主要利用中心流形定理给出一类具有垂直传染和接触传染的双线性发生率传染病模型的地方病平衡点的局部稳定性条件。

关键词

传染病模型，中心流形，局部稳定性

文章引用: 王群, 冯伟. 一类传染病模型的稳定性研究[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 373-377.
DOI: 10.12677/pm.2018.84050

1. 引言

近年来，在生物动力系统中，传染病模型是人们研究的重要课题，含有疾病影响因素的传染病模型也有了可喜的研究成果[1]-[6]。平衡点的存在性、局部稳定性、全局渐进稳定性、数值仿真是传染病模型研究的主要内容，文献[7]中，作者主要给出了以下传染病模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\dfrac{S(t)+I(t)}{k}\right)S(t)-dS(t)-\beta I(t)S(t)+qr\left(1-\dfrac{S(t)+I(t)}{k}\right)I(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\beta I(t)S(t)-(d+\mu)I(t)+(1-q)r\left(1-\dfrac{S(t)+I(t)}{k}\right)I(t)\end{cases}\tag{1}$$

平衡点的存在性、局部稳定性以及全局稳定性条件。其中 r 为自然增长率，k 为环境容纳量，d 为自然死亡率，β 为有效接触率，q 为染病类中新生个体未染病的比例系数，$0<q<1$，$1-q$ 为染病类中新生个体的染病速率，μ 为因病死亡率。

文献[7]在研究过程中把模型(1)等价为以下模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=(r-d)N(t)-\dfrac{r}{k}N^2(t)-\mu I(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\left[(1-q)r-(d+\mu)\right]I(t)+\dfrac{\beta k-(1-q)r}{k}N(t)I(t)-\beta I^2(t)\end{cases}\tag{2}$$

其中，$N(t)=I(t)+S(t)$。

另外有如下规定：

$$R_0=\frac{r}{d},\quad N_0=\frac{k(r-d)}{r},\quad \bar{N}=\frac{k\left[(1-q)r-(d+\mu)\right]}{(1-q)r-\beta k},\quad N_\Delta=\frac{\beta k(r-d)+\mu\left[(1-q)r-\beta k\right]}{2\beta r},$$

$$R=\frac{\bar{N}}{N_0}=\frac{r\left[(1-q)r-(d+\mu)\right]}{(r-d)\left[(1-q)r-\beta k\right]},\quad \sigma_1=\frac{(1-q)r}{\beta k},\quad \sigma_2=\frac{(1-q)r}{d+\mu},$$

这里 R_0 称为基本再生数，R 称为病毒主导再生数。

2. 结论

本节给出本文的主要结论，并给出证明此结论所用到的一个引理——中心流形定理。

定理 若满足以下条件之一：

1) $R_0>1>\sigma_i$，$R<1$，$2N_*>N_0$，$i=1,2$；

2) $R_0>\sigma_i>1$，$R<1$，$\beta r(2N_*-N_0)>\mu\left[(1-q)r-\beta k\right]$，$i=1,2$，系统(2)的地方病平衡点 $E(N_*,I_*)$ 是局部稳定的。

引理[8] (中心流形定理)给定向量场

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+f(x,y)\\ \dot{y}&=By+g(x,y)\end{aligned}\quad (x,y)\in R^c\times R^s\tag{3}$$

其中

$$f(0,0)=0,\ Df(0,0)=0;\ g(0,0)=0,\ Dg(0,0)=0.$$

如果(3)存在一个C^r的中心流形

$$W^c(0)=\left\{(x,y)\in R^c\times R^s \,\middle|\, y=h(x),|x|<\delta,h(0)=0,Dh(0)=0,0<\delta\ll 1\right\},$$

那么(3)的动态约束在中心流形上，对于充分小的v，可以通过下面的c维向量场给出

$$\dot{v}=Av+f(v,h(v)),\ v\in R^c. \tag{4}$$

如果(4)的零解$v=0$稳定(渐进稳定，不稳定)，则(3)的零解$(x,y)=(0,0)$稳定(渐进稳定，不稳定)。

3. 定理证明

本节主要利用中心流形定理来补充证明系统(2)的一个地方病平衡点的局部稳定性条件，文献[7]中系统(2)存在一个地方病平衡点$E(N_*,I_*)$的条件为：

1) $R_0>\sigma_2>1>\sigma_1$，$\beta k(r-d)=2\sqrt{\beta k\mu r\left[(1-q)r-(d+\mu)\right]}+\mu\left[\beta k-(1-q)r\right]$，$\beta k(r-d)+\mu\left[(1-q)r-\beta k\right]>0$；

2) $R_0>1>\sigma_i$，$R<1$，$i=1,2$；

3) $R_0>\sigma_i>1$，$R<1$，$i=1,2$；

4) $R_0>\sigma_i>1$，$R>1$，$\beta k(r-d)-\mu\left[(1-q)r-\beta k\right]>0$，$i=1,2$，$\left[\beta k(r-d)\right]^2=4\beta k\mu r\left[(1-q)r-(d+\mu)\right]-\mu\left[(1-q)r-\beta k\right]\left\{\left[(1-q)r-\beta k\right]\mu+2\beta k(r-d)\right\}$。

证明：

在地方病$E(N_*,I_*)$处，系统(2)的Jacobian矩阵为

$$J_E=\begin{pmatrix} r-d-\dfrac{2r}{k}N_* & -\mu \\ \dfrac{\beta k-(1-q)r}{k}I_* & -\beta I_* \end{pmatrix}.$$

此时，特征方程为

$$\lambda^2+b_1\lambda-b_0=0.$$

其中，$b_1=\dfrac{\beta kI_*+2rN_*-k(r-d)}{k}$，$b_0=\dfrac{\beta\left[k(r-d)-2rN_*\right]+\mu\left[(1-q)r-\beta k\right]}{k}I_*$。

特征值为：

$$\lambda_1=\frac{-b_1-\sqrt{b_1^2+4b_0}}{2},\quad \lambda_2=\frac{-b_1+\sqrt{b_1^2+4b_0}}{2}.$$

针对条件1)，此时的地方病平衡点为$E(N_*,I_*)$，

$$N_*=\frac{\beta k(r-d)+\mu\left[(1-q)r-\beta k\right]}{2\beta r},$$

$$\begin{aligned} I_*&=\frac{(1-q)r-(d+\mu)}{\beta}-\frac{(r-d)\left[(1-q)r-\beta k\right]}{2\beta r}-\frac{\mu\left[(1-q)r-\beta k\right]^2}{2\beta^2 kr} \\ &=\frac{k(r-d)^2}{4\mu r}-\frac{\mu\left[(1-q)r-\beta k\right]^2}{4\beta^2 kr} \end{aligned}.$$

显然，在这种条件下

$$b_0=\frac{\beta\left[k(r-d)-2rN_*\right]+\mu\left[(1-q)r-\beta k\right]}{k}I_*=0.$$

此时，若 $b_1<0$ 成立，则会出现正的特征值，那么，地方病平衡点 $E(N_*,I_*)$ 不稳定；所以要求 $b_1>0$，若 $\beta k(r-d)^2-\beta k\left[\mu(\sigma_1-1)\right]^2+4\mu r(\sigma_1-1)>0$ 成立，则 $b_1>0$。此时，特征值 $\lambda_1<0$，$\lambda_2=0$，下面用中心流形定理来判断地方病平衡点 $E(N_*,I_*)$ 的稳定性。

首先，对系统(2)做平移变换：$N(t)=x(t)+N_*$，$I(t)=y(t)+I_*$，将地方病平衡点 $E(N_*,I_*)$ 移至原点 $(0,0)$ 处，此时系统(2)变为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=(r-d)x(t)-\dfrac{2r}{k}N_*x(t)-\mu y(t)-\dfrac{r}{k}x^2(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta k-(1-q)r}{k}I_*x(t)-\beta I_*y(t)+\dfrac{\beta k-(1-q)r}{k}x(t)y(t)-\beta y^2(t)\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(r-d)-\dfrac{2r}{k}N_* & -\mu\\ \dfrac{\beta k-(1-q)r}{k}I_* & -\beta I_*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\dfrac{r}{k}x^2\\ \dfrac{\beta k-(1-q)r}{k}xy-\beta y^2\end{pmatrix}.$$

其线性化方程对应的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-b_1$。通过计算，可以得到 λ_1，λ_2 对应的特征向量分别为 $\begin{pmatrix}1\\1-\sigma_1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\A\end{pmatrix}$，这里 $A=\dfrac{\beta I_*}{\mu}$。记 $T=\begin{pmatrix}1 & 1\\1-\sigma_1 & A\end{pmatrix}$，通过变换 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}$，可以得到：

$$\begin{pmatrix}m'\\n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}+T^{-1}\begin{pmatrix}-\dfrac{r}{k}m^2-\dfrac{r}{k}n^2-\dfrac{2r}{k}mn\\ \beta(1-\sigma_1)(1-\sigma_1-A)mn+\beta A(1-\sigma_1-A)n^2\end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{cases}m'=-\dfrac{Ar}{(A+\sigma_1-1)k}m^2-\dfrac{Ar}{(A+\sigma_1-1)k}n^2-\dfrac{2Ar}{(A+\sigma_1-1)k}mn+\beta(1-\sigma_1)mn+\beta An^2\\ n'=-b_1n-\dfrac{r(\sigma_1-1)}{(A+\sigma_1-1)k}m^2-\dfrac{r(\sigma_1-1)}{(A+\sigma_1-1)k}n^2-\dfrac{2r(\sigma_1-1)}{(A+\sigma_1-1)k}mn-\beta(1-\sigma_1)mn-\beta An^2\end{cases}$$

计算中心流形，假设 $h(m)=am^2+bm^3+O(m^4)$，带入上面的系统，我们可以得到

$$a=\frac{r(1-\sigma_1)}{(A+\sigma_1-1)b_1k},\quad b=-\frac{\beta r(1-\sigma_1)^2}{(A+\sigma_1-1)b_1^2k}+\frac{2r^2(\sigma_1-1)(\sigma_1-1-A)}{(A+\sigma_1-1)^2b_1^2k^2}.$$

所以，约束在中心流形上，$m'=-\dfrac{Ar}{(A+\sigma_1-1)k}m^2+O(m^3)$。显然在这种情况下 $\dfrac{Ar}{(A+\sigma_1-1)k}>0$，$(0,0)$ 是不稳定的平衡点，因此可以得出地方病平衡点 $E(N_*,I_*)$ 在这种条件下是不稳定的。

针对条件 2)，此时的地方病平衡点为 $E(N_*,I_*)$，

$$N_*=\frac{\beta k(r-d)+\mu\left[(1-q)r-\beta k\right]+\sqrt{\left\{\beta k(r-d)+\mu\left[(1-q)r-\beta k\right]\right\}^2-4\beta k\mu r\left[(1-q)r-(d+\mu)\right]}}{2\beta r},$$

$$I_*=\frac{\beta k-(1-q)r}{\beta k}N_*+\frac{(1-q)r-(d+\mu)}{\beta}.$$

若此时 $2N_* > N_0$ 成立，则 $b_0 < 0$， $b_1 > 0$，进而特征方程必有两个负实根或一对带负实部的复根，因此系统(2)的地方病平衡点 $E(N_*, I_*)$ 在这种条件下是局部稳定的。

针对条件 3)，通过与条件 2)相同的证明方法可以得到当满足条件： $R_0 > \sigma_i > 1$， $R < 1$， $\beta r(2N_* - N_0) > \mu[(1-q)r - \beta k]$， $i = 1,2$，地方病平衡点 $E(N_*, I_*)$ 是局部稳定的。

针对条件 4)，通过与条件 1)相同的证明方法，利用中心流形定理得到当满足条件：

$$R_0 > \sigma_i > 1,\quad R > 1,\quad \beta k(r-d) - \mu[(1-q)r - \beta k] > 0,\quad i = 1,2,$$

$$\left[\beta k(r-d)\right]^2 = 4\beta k\mu r\left[(1-q)r - (d+\mu)\right] - \mu\left[(1-q)r - \beta k\right]\left\{\left[(1-q)r - \beta k\right]\mu + 2\beta k(r-d)\right\},$$

地方病平衡点 $E(N_*, I_*)$ 是不稳定的。 证毕

参考文献

[1] Ma, Z.E., Liu, J.P. and Li, J. (2003) Stability Analysis for Differential Infectivity Epidemic Models. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **4**, 841-856. https://doi.org/10.1016/S1468-1218(03)00019-1

[2] Wang, W.D. and Ruan, S.G. (2004) Bifurcation in a Epidemic Model with Constant Removal Rate of the Infectives. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **291**, 775-793. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.11.043

[3] Huang, Y.J., Chen, F.D. and Li, Z. (2006) Stability Analysis of a Prey-Predator Model with Holling Type III Response Function Incorporating a Prey Refuge. *Applied Mathematics and Computation*, **182**, 672-683. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.04.030

[4] Wang, W.D. (2006) Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Treatment. *Mathematical Biosciences*, **201**, 58-71. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2005.12.022

[5] Cui, J.G., Cui, X.X. and Wan, H. (2008) Saturation Recovery Leads to Multiple Endemic Equilibria and Backward Bifurcation. *Journal of Biology*, **254**, 275-283.

[6] Chen, L.J. and Chen, F.D. (2010) Qualitative Analysis of a Predator-Prey Model with Holling Type II Functional Response Incorporating a Constant Prey Refuge. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **11**, 246-252. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2008.10.056

[7] 傅金波, 陈兰荪. 具有垂直传染和接触传染的传染病模型的稳定性研究[J]. 数学杂志, 2016, 36(6): 1283-1290.

[8] Wiggins (1990) Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer-Verlag, New York, 193-211. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4067-7