Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(5), 576-579
Published Online September 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.85076

Hans汉斯

Finitely Generated Residually Finite Groups with Automorphisms of Prime Order

Zhihai Wang, Tao Xu*

College of Science, Hebei University of Engineering, Handan Hebei
Email: ZhiHai_WYang@163.com, *gtxutao@163.com

Received: Sep. 4th, 2018; accepted: Sep. 19th, 2018; published: Sep. 26th, 2018

Abstract

Let α be an automorphism of prime order p of a finitely generated residually finite group G. If the map $G \to G$ defined by $g^{\varphi} = [g,\alpha]$ is surjective, then G is nilpotent of class at most $h(p)$, where $h(p)$ is a function depending only on p. In particular, if α is of order 2, then G is abelian.

Keywords

Finitely Generated, Residually Finite Group, Fixed-Point-Free Automorphism

有限生成剩余有限群的素数阶自同构

王志海，徐　涛*

河北工程大学数理学院，河北　邯郸
Email: ZhiHai_WYang@163.com, *gtxutao@163.com

收稿日期：2018年9月4日；录用日期：2018年9月19日；发布日期：2018年9月26日

摘　要

设α是有限生成剩余有限群G的素数p阶自同构，映射$\varphi: G \to G\left(g \mapsto [g,\alpha]\right)$是满射，则$G$是幂零类至多为$h(p)$的幂零群，其中$h(p)$是与素数$p$有关的函数。特别地，如果$\alpha$是2阶自同构，那么$G$是交换群。

关键词

有限生成，剩余有限群，无不动点自同构

*通讯作者。

文章引用: 王志海, 徐涛. 有限生成剩余有限群的素数阶自同构[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 576-579.
DOI: 10.12677/pm.2018.85076

1. 引言

本文采用的符号和术语都是标准的，按照[1]。

在群论中，如果群 G 的自同构 α 只有平凡的不动点，那么称 α 是无不动点自同构。

Burnside [2]证明了：具有 2 阶无不动点自同构的有限群是奇阶交换群。这是有限群中的一个经典的结论。随后，Neumann [3]考虑了任意群的 3 阶无不动点自同构，得到了下面的结果。

命题 1.1：设 α 是群 G 的 3 阶无不动点自同构，如果映射 $\varphi: G \to G(g \mapsto [g,\alpha])$ 是满射，那么 G 是幂零类 2 的幂零群。

在[4]中，我们研究了有限秩的剩余有限可解群的素数 p 阶无不动点自同构，证明了下面的结论。

命题 1.2：设 α 是有限秩的剩余有限可解群 G 的素数 p 阶无不动点自同构，如果映射 $\varphi: G \to G\left(g \mapsto [g,\alpha]\right)$。是满射，那么 G 是幂零类至多为 $h(p)$ 的幂零群，其中 $h(p)$ 是与素数 p 有关的函数。

在[5]中，我们舍去无不动点自同构的假设，在满射的条件下，仅考虑自同构的阶数对群结构的影响，研究了有限生成无挠幂零群的素数 p 阶自同构，得到了下面的命题。

命题 1.3：设 α 是有限生成无挠幂零群 G 的素数 p 阶自同构，映射 $\varphi: G \to G\left(g \mapsto [g,\alpha]\right)$ 是满射，则 G 是幂零类至多为 $h(p)$ 的幂零群，其中 $h(p)$ 是与素数 p 有关的函数。

在本文中，我们考虑更一般的有限生成剩余有限群的素数 p 阶自同构，得到了下面的定理，推广了命题 1.3。

定理 1.1：设 α 是有限生成剩余有限群 G 的素数 p 阶自同构，映射 $\varphi: G \to G\left(g \mapsto [g,\alpha]\right)$ 是满射，则 G 是幂零类至多为 $h(p)$ 的幂零群，其中 $h(p)$ 是与素数 p 有关的函数。特别地，如果 α 是 G 的 2 阶自同构，那么 G 是交换群。

2. 定理的证明及推论

引理 2.1 [4]：设 α 是任意群 G 的自同构，H 是群 G 的指数有限的特征子群，如果映射 $\varphi: G \to G\left(g \mapsto [g,\alpha]\right)$ 是满射，那么 α 诱导了 G/H 的无不动点自同构。

引理 2.2 [6]：设 α 是有限群 G 的素数 p 阶无不动点自同构，则 G 是幂零群。

引理 2.3 [7]：设 α 是局部幂零群 G 的素数 p 阶无不动点自同构，则 G 是幂零类至多为 $h(p)$ 的幂零群，其中 $h(p)$ 是与素数 p 有关的函数。

定理 1.1 的证明：因为 G 是有限生成剩余有限群，任取 $1 \neq g \in G$，存在 $g \notin N_g \lhd G$，使得 G/N_g 是有限群并且 $\bigcap_g N_g = 1$。不妨设 $\left|G:N_g\right| = m$，则 $g \notin G^m \leq N_g$，于是

$$\bigcap_m G^m \leq \bigcap_g N_g = 1。$$

因为 G/G^m 是幂指数有限的有限生成群，所以 G/G^m 是有限群。由引理 2.1 可知 α 诱导了 G/G^m 的无不动点自同构，再由引理 2.2 可知 G/G^m 是幂零群，最终由引理 2.3 可知 G/G^m 是幂零类至多为 $h(p)$ 的幂零群，其中 $h(p)$ 是与素数 p 有关的函数。记 $\bar{G} = G/G^m$，则对任意的 $g_1, g_2, \cdots, g_{h(p)+1} \in G$，有 $\left[\bar{g}_1, \bar{g}_2, \cdots, \bar{g}_{h(p)+1}\right] = \bar{1}$，从而

$$\left[g_1,g_2,\cdots,g_{h(p)+1}\right]\in G^m。$$

进而

$$\left[g_1,g_2,\cdots,g_{h(p)+1}\right]\in\bigcap_m G^m=1。$$

因此 G 是幂零类至多为 $h(p)$ 的幂零群。如果 α 是 G 的 2 阶自同构，那么 α 诱导了 G/N_g 的 2 阶无不动点自同构。由 Burnside 的经典结果得到 G/N_g 是交换群。所以任取 $\overline{h}_1,\overline{h}_2\in G/N_g$，都有 $\left[\overline{h}_1,\overline{h}_2\right]=1$，从而

$$\left[h_1,h_2\right]\in N_g。$$

进而

$$\left[h_1,h_2\right]\in\bigcap_g N_g=1。$$

这表明 G 是交换群。

应用定理 1.1，我们可以得到如下推论。

推论 2.1：设 G 是有限生成剩余有限群的有限扩张且 α 是 G 的素数 p 阶自同构，如果映射 $\varphi:G\to G\left[g\to[g,\alpha]\right]$ 是满射，那么 G 是幂零类至多为 $h(p)$ 的幂零群，其中 $h(p)$ 是与素数 p 有关的函数。特别地，如果 α 是 2 阶自同构，那么 G 是交换群。

证明：设 G 是有限生成剩余有限群 N 的有限扩张，则 G/N 是有限群且 N 是有限剩余有限群。不妨设 G/N 的幂指数为 n，则 $G^n\le N$，注意到 G/G^n 为幂指数有限的有限生成群，所以 G/G^n 为有限群。因为 $G^n\le N$ 为有限生成剩余有限群，由定理 1.1 的证明可知，任取 $1\ne g\in G^n$，G^n 包含指数有限的正规子群 H_g，使得 $\bigcap_g H_g=1$。容易验证 G/H_g 为有限群。由定理 1.1 的证明可知，G 是幂零类至多为 $h(p)$ 的幂零群，其中 $h(p)$ 是与素数 p 有关的函数。特别地，如果 α 是 2 阶自同构，那么 G 是交换群。

推论 2.2：设 α 是多重循环群 G 的素数 p 阶自同构，如果映射 $\varphi:G\to G\left[g\to[g,\alpha]\right]$ 是满射，那么 G 是幂零类至多为 $h(p)$ 的幂零群，其中 $h(p)$ 是与素数 p 有关的函数。特别地，如果 α 是 2 阶自同构，那么 G 是交换群。

证明：由[8]可知多重循环群是有限生成的并且是剩余有限群，因此由定理 1.1 可得推论 2.1。

推论 2.3：设 α 是有限生成交换群被幂零群的扩张 G 的素数 p 阶自同构，如果映射 $\varphi:G\to G\left[g\to[g,\alpha]\right]$ 是满射，那么 G 是幂零类至多为 $h(p)$ 的幂零群，其中 $h(p)$ 是与素数 p 有关的函数。特别地，如果 α 是 2 阶自同构，那么 G 是交换群。

证明：由[9]的定理 1 可知有限生成的交换群被幂零群的扩张是剩余有限的。因此由定理 1.1 可得推论 2.3。

推论 2.4：设 α 是有限生成线性群 G 的素数 p 阶自同构，如果映射 $\varphi:G\to G\left[g\to[g,\alpha]\right]$ 是满射，那么 G 是幂零类至多为 $h(p)$ 的幂零群，其中 $h(p)$ 是与素数 p 有关的函数。特别地，如果 α 是 2 阶自同构，那么 G 是交换群。

证明：由[10]的定理 VII 和定理 VIII 可知有限生成线性群是剩余有限的，因此由定理 1.1 可得推论 2.4。

推论 2.5：设 α 是有限生成无挠幂零群 G 的素数 p 阶自同构，映射 $\varphi:G\to G\left[g\to[g,\alpha]\right]$ 是满射，则 G 是幂零类至多为 $h(p)$ 的幂零群，其中 $h(p)$ 是与素数 p 有关的函数。特别地，如果 α 是 2 阶自同构，那么 G 是交换群。

证明：由[1]的定理 5.2.21 可知有限生成无挠幂零群是剩余有限群，因此由定理 1.1 可得推论 2.5。

基金项目

国家自然科学基金(11801129)，河北省教育厅拔尖人才项目(BJ2018025)，邯郸市科学技术研究与发展计划项目(1723208068-5)资助。

参考文献

[1] Robinson, D.J.S. (1996) A Course in the Theory of Groups. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8594-1

[2] Burnside, W. (1955) Theory of Groups of Finite Order. 2nd Edition, Dover Publications Inc., New York.

[3] Neumann, B.H. (1956) Group with Automorphisms that Leave Only the Neutral Element Fixed. *Archiv der Mathematik*, **7**, 1-5. https://doi.org/10.1007/BF01900516

[4] 徐涛, 刘合国. 有限秩的可解群的正则自同构[J]. 数学年刊, 2014, **35**A(5): 543-550.

[5] Xu, T. and Liu, H. (2016) Finitely Generated Torsion-Free Nilpotent Groups Admitting an Automorphism of Prime Order. *Communications in Mathematical Sciences*, **32**, 167-172.

[6] Thompson, J. (1959) Finite Groups with Fixed-Point-Free Automorphisms of Prime Order. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **45**, 578-581. https://doi.org/10.1073/pnas.45.4.578

[7] Higman, G. (1957) Groups and Rings Having Automorphisms without Non-Trivial Fixed Elements. *Journal of the London Mathematical Society*, **64**, 321-334. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-32.3.321

[8] Smelkin, A.L. (1968) Polycyclic Groups. *Siberian Mathematical Journal,* **9**, 234-235. https://doi.org/10.1007/BF02196676

[9] Hall, P. (1959) On the Finiteness of Certain Soluble Groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **9**, 595-622. https://doi.org/10.1112/plms/s3-9.4.595

[10] Mal´cev, A.I. (1940) On the Faithful Representation of Infinite Groups by Matrices. *Mat. sb.*, **8**, 405-422.