Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(5), 584-588
Published Online September 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.85078

Hans汉斯

Study on the Product of Two Hyperbolic Iterated Function Systems

Yu Zhao

School of Math and Computer, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong
Email: datom@189.cn

Received: Sep. 8th, 2018; accepted: Sep. 23rd, 2018; published: Sep. 30th, 2018

Abstract

By using the two known iterated function systems: $\{X : w_n, n = 1, 2, \cdots, N_1\}$ and $\{Y : w'_n, n = 1, 2, \cdots, N_2\}$, this paper constructs the new iterated function system on product space $X \times Y$, which has some similar properties to the lifting dynamic systems and has lots of relations with the two known systems.

Keywords

Hyperbolic Iterated Function Systems, Product Space, Attractor

关于两个双曲迭代函数系的乘积的研究

赵　瑜

广东海洋大学数学与计算机学院，广东　湛江
Email: datom@189.cn

收稿日期：2018年9月8日；录用日期：2018年9月23日；发布日期：2018年9月30日

摘　要

本文利用两个已知的双曲迭代函数系：$\{X : w_n, n = 1, 2, \cdots, N_1\}$ 和 $\{Y : w'_n, n = 1, 2, \cdots, N_2\}$，构造积空间 $X \times Y$ 上的迭代函数系，使这个新的双曲迭代函数系具有与升腾动力系统相类似的性质，并且与原来的两个迭代函数系有密切的联系。

关键词

双曲迭代函数系，积空间，吸引子

文章引用: 赵瑜. 关于两个双曲迭代函数系的乘积的研究[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 584-588.
DOI: 10.12677/pm.2018.85078

1. 引言

对于两个已知的双曲迭代函数系 $\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$ 和 $\{Y: w_n', n=1,2,\cdots,N_2\}$ [1]，能否像乘积拓扑空间(见[2] [3])一样，以自然的方式构造出在 $X\times Y$ 上的双曲迭代函数系，使得所构造出的双曲迭代函数系不能太平凡，并应与原来两个迭代函数系有很多内在的联系(见[2] [3])，因乘积拓扑和有很多联系，却比它们的结构复杂，所以，$X\times Y$ 上的双曲迭代函数系一定比 X 上的双曲迭代函数系和上的双曲迭代函数系复杂，对此问题的研究至此未见讨论。

度量空间 (X,ρ) 与定义在其上的一有限个压缩映射族 $w_n: X\to X, n=1,2,\cdots,N$，组成一个双曲迭代函数系，用 IFS 表示它，记为 $\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$；如果 w_n 的压缩比为 $c_n, n=1,2,\cdots,N$，则称 $c=\max\{c_n, n=1,2,\cdots,N\}$ 为此 IFS 的压缩比(见[1] [4] [5] [6])。

设 $\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$ 是完备度量空间 (X,ρ) 上的双曲迭代函数系，其压缩比为 c，变换 $W: F(X)\to F(X)$，由下式定义：$W(B)=\bigcup_{n=1}^{N} w_n(B), \forall B\in F(X)$，则 W 是分形空间 $(F(X), h_p)$ 上压缩比为 c 的压缩映射，且存在唯一的不动点(不变集) $A\in F(X)$，满足：$A\in W(A)=\bigcup_{n=1}^{N} w_n(A)$ 且对 $\forall B\in F(X)$，都有 $A=\lim_{n\to\infty} W^n(B)$ (见[1] [3] [4] [5] [6])。

不动点 $A\in F(X)$ 称为此 IFS 的吸引子(见[1] [3] [4] [5] [6])。

2. 若干引理

引理 2.1(见[2] [3])设 $(X,\rho_1),(Y,\rho_2)$ 是度量空间，则它们的度量积空间 $(X\times Y,\rho)$ 是把 X,Y 作为拓扑空间时的积空间，其中：$\rho(x,y)=\sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)}, x=(x_1,x_2)\in X\times Y, y=(y_1,y_2)\in X\times Y$。

引理 2.2(见[2] [3])设 $(X,\rho_1),(Y,\rho_2)$ 是两个度量空间，定义：

$d(x,y)=\max\{\rho(x_1,y_1),\rho(x_2,y_2)\}$，其中 $x=(x_1,x_2)\in X\times Y, y=(y_1,y_2)\in X\times Y$，

则 d 与 ρ 是等价的度量。

引理 2.3 [2]若集合上的两个度量 ρ_1 和 ρ_2 是等价的，则 X 的子集 A 是度量空间 (X,ρ_1) 中的开集当且仅当 A 是度量空间 (X,ρ_2) 中的开集。

以上三个引理的证明极易，故从略。

引理 2.4 [2]设 $(X,\rho_1),(Y,\rho_2)$ 是两个完备度量空间，则 $(X\times Y,d)$ 也是完备度量空间，其中 d 是按引理 2 的方式来定义。

证明：由**引理 2.1** 知 $(X\times Y,d)$ 是度量空间，设有一柯西序列 $\{(x_n,y_n)|n=1,2,\cdots\}$，则对 $\forall\varepsilon>0$，总存在自然数 N，使得当 $n,m>N$ 时，有 $\rho_1(x_n,x_m)<\varepsilon, \rho_2(y_n,y_m)<\varepsilon$，

所以 $\{x_n\}$ 是 X 中的柯西序列，$\{y_n\}$ 是 Y 中的柯西序列，有 X 和 Y 的完备性知，$\lim_{n\to\infty} x_n$ 和 $\lim_{n\to\infty} y_n$ 均存在，记 $\lim_{n\to\infty} x_n=x, \lim_{n\to\infty} y_n=y$，因此 $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x,y)$。

3. 主要结果

定理 3.1：设 $(X,\rho_1),(Y,\rho_2)$ 是两个完备度量空间，$\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$ 和 $\{Y: w_n', n=1,2,\cdots,N_2\}$ 是

两个双曲迭代函数系，w_i 压缩比为 $c_i, i=1,2,\cdots,N_1$，w'_n 的压缩比为 $d_j, j=1,2,\cdots,N_2$，令 $w_i\times w'_j(x,y)=\left(w_i(x),w'_j(y)\right),\forall(x,y)\in X\times Y$，则 $\left\{X\times Y: w_i\times w'_j, i=1,2,\cdots,N_1, j=1,2,\cdots,N_2\right\}$ 是完备度量空间 $(X\times Y,d)$ 上的双曲迭代函数系。

证明：由于

$$\begin{aligned}
&d\left(w_i\times w'_j(x,y),w_i\times w'_j(x',y')\right)=d\left\{\left(w_i(x),w'_j(y)\right),\left(w_i(x'),w'_j(y')\right)\right\}\\
&=\max\left\{\rho_1\left(w_i(x),w_i(x')\right),\rho_2\left(w'_j(y),w'_j(y')\right)\right\}\\
&\le\max\left\{c_i\rho_1(x,x'),d_j\rho_2(y,y')\middle|1\le i\le N_1,1\le j\le N_2\right\}\\
&\le\max\left\{c_i,d_j\middle|1\le i\le N_1,1\le j\le N_2\right\}\cdot\max\left\{\rho_1(x,x'),\rho_2(y,y')\middle|1\le i\le N_1,1\le j\le N_2\right\}\\
&=\max\left\{c_i,d_j\middle|1\le i\le N_1,1\le j\le N_2\right\}\cdot d\left((x,y),(x',y')\right)
\end{aligned}$$

所以 $w_i\times w'_j$ 是压缩映射，$i=1,2,\cdots,N_1, j=1,2,\cdots,N_2$。由引理 4 知 $(X\times Y,d)$ 是完备的，因此定理得证。

称定理 **3.1** 中的双曲迭代函数系 $\left\{X\times Y: w_i\times w'_j, i=1,2,\cdots,N_1, j=1,2,\cdots,N_2\right\}$ 为双曲迭代函数系 $\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$ 和 $\{Y: w'_n, n=1,2,\cdots,N_2\}$ 的乘积。

关于两个迭代函数系的乘积，有以下的性质：

定理 3.2：(影象定理)，设 A 是完备度量空间上的双曲迭代函数系 $\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$ 的吸引子，B 是完备度量空间上的双曲迭代函数系 $\{Y: w'_n, n=1,2,\cdots,N_2\}$ 的吸引子，则 $A\times B$ 是这两个 IFS 的乘积的吸引子；反之，C 是这两个 IFS 乘积的吸引子，则 $P_1(C)$ 是 $\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$ 的吸引子，$P_2(C)$ 是 $\{Y: w'_n, n=1,2,\cdots,N_2\}$ 的吸引子，其中 $P_1: X\times Y\to Y, P_2: X\times Y\to X$ 为自然投影。

证明：1) $W'(A)=\bigcup_{i=1}^{N_1}w_i(A),\forall A\in F(X)$，$W''(B)=\bigcup_{j=1}^{N_2}w'_j(B),\forall B\in F(Y)$，则 $W'\times W''(A\times B)=W'(A)\times W''(B)=A\times B$。于是定理的前半部分得证。

2) $W=W'\times W''$，其中 W' 和 W'' 同(1)中的定义，则 $W(C)=W'\times W''(C)=C$，从而 $P_1\left(W(C)\right)=P_1(C),P_2\left(W(C)\right)=P_2(C)$，又由于 $C=\bigcup_{(x,y)\in C}\{(x,y)\}$，所以

$W(C)=\bigcup_{(x,y)\in C}W\{(x,y)\}=\bigcup_{(x,y)\in C}W'(\{x\})\times W''(\{y\})$，

因而有：$P_1\left(W(C)\right)=\bigcup_{(x,y)\in C}W'(\{x\})=\bigcup_{(x,y)\in C}\bigcup_{i=1}^{N_1}\{w_i(x)\}=W'\left(P_1(C)\right)=P_1(C)$，同理可证得：$P_2\left(W(C)\right)=W''\left(P_2(C)\right)=P_2(C)$。由于吸引子是唯一的不动点，所以有 $A=P_1(C),B=P_2(C)$。

注记 3.1：定理 **3.2** 的证明，用到以下的结果：$F(X\times Y)=F(X)\times F(Y)$。事实上，设 $C\in F(X\times Y)$，则 $P_1(C)\in F(X),P_2(C)\in F(Y)$；反之，若 $A\in F(X),B\in F(Y)$，则有 $A\times B$ 为 $X\times Y$ 的紧子集且非空，即 $A\times B\in F(X\times Y)$。

注记 3.2：$\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$ 与 $\{Y: w'_n, n=1,2,\cdots,N_2\}$ 的乘积的压缩比是两 IFS 的压缩比的最大值。

注记 3.3：以上的定理及定义，可推广到任意有限多个的情形。

定理 3.3 设 $(X,\rho_1),(Y,\rho_2)$ 是两个完备度量空间，$\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$ 和 $\{Y: w'_n, n=1,2,\cdots,N_2\}$ 是两个双曲迭代函数系，他们的乘积为：$\left\{X\times Y: w_i\times w'_j, i=1,2,\cdots,N_1, j=1,2,\cdots,N_2\right\}$ 则有：

1) $\left\{X\times Y: w_i\times w'_j, i=1,2,\cdots,N_1, j=1,2,\cdots,N_2\right\}$ 是全不连通的当且仅当 $\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$ 与

$\{Y:w_n',n=1,2,\cdots,N_2\}$ 都是全不连通的。

2) 若 $\{X\times Y:w_i\times w_j',i=1,2,\cdots,N_1,j=1,2,\cdots,N_2\}$ 是刚触及的，则在两个曲线迭代函数系 $\{X:w_n,n=1,2,\cdots,N_1\}$ 与 $\{Y:w_n',n=1,2,\cdots,N_2\}$ 中，至少有一个也是刚触及的。

3) $\{X:w_n,n=1,2,\cdots,N_1\}$ 与 $\{Y:w_n',n=1,2,\cdots,N_2\}$ 均是刚触及的，则 $\{X\times Y:w_i\times w_j',i=1,2,\cdots,N_1,j=1,2,\cdots,N_2\}$ 也是刚触及的。

证明：设 A 是 $\{X:w_n,n=1,2,\cdots,N_1\}$ 的吸引子，B 是 $\{Y:w_n',n=1,2,\cdots,N_2\}$ 的吸引子，则 $A\times B$ 是完备度量空间 $(X\times Y,d)$ 上的

IFS：$\{X\times Y:w_i\times w_j',i=1,2,\cdots,N_1,j=1,2,\cdots,N_2\}$ 的吸引子，于是有：

$\Phi(\sigma,n,(x,y))=\overline{w}_{\sigma_1}\circ\overline{w}_{\sigma_2}\circ\cdots\circ\overline{w}_{\sigma_n}(x,y)$，其中

$\Sigma=\{x:x=x_1x_2\cdots x_i\cdots,\forall i\in N,x_i\in\{(1,1),(1,2),\cdots,(N_1,N_2)\}\}$，同时要求 $\{(i,j):i=1,2,\cdots,N_1,j=1,2,\cdots,N_2\}$ 以字典顺序关系作为此集合的偏序关系，$\overline{w}_{\sigma_1}=w_{p_1(\sigma_1)}\times w'_{p_2(\sigma_1)}$，$p_1,p_2$ 为自然投射，所以有：

$\overline{w}_{\sigma_1}\circ\overline{w}_{\sigma_2}=\left(w_{p_1(\sigma_1)}\circ w_{p_1(\sigma_2)}\right)\times\left(w'_{p_2(\sigma_1)}\circ w'_{p_2(\sigma_2)}\right)$，由引理 5 知：$\Phi(\sigma)=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(\sigma,n,(x,y))$ 存在，且 $\Phi(\sigma)$ 与 (x,y) 的选择无关以及 $\Phi:\Sigma\to A$ 是连续满射。

1) 若 $\{X\times Y:w_i\times w_j',i=1,2,\cdots,N_1,j=1,2,\cdots,N_2\}$ 是

全不连通的，则 $\forall(a,b)\in A\times B,\Phi^{-1}(a,b)=\{\sigma\}$ 是单点集，由于 $\Phi(\sigma,n,(x,y))=\Phi_1(\sigma',n,x)\times\Phi_2(\sigma'',n,y)$，其中

$$\sigma'=\sigma_1'\circ\sigma_2'\circ\cdots\circ\sigma_i'\circ\cdots,\sigma_i'=p_1(\sigma_i),i=1,2,\cdots$$

$$\sigma''=\sigma_1''\circ\sigma_2''\circ\cdots\circ\sigma_j''\circ\cdots,\sigma_j''=p_2(\sigma_j),j=1,2,\cdots$$

所以 $\Phi(\sigma)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\Phi_1(\sigma',n,x)\times\Phi_2(\sigma'',n,x)\right]=\Phi_1(\sigma')\times\Phi_2(\sigma'')$，其中：

$$\Phi_1(\sigma_1)=\lim_{n\to\infty}\Phi_1(\sigma',n,x),\Phi_2(\sigma_2)=\lim_{n\to\infty}\Phi_2(\sigma'',n,y),$$

$$\Phi_1(\sigma',n,x)=w_{\sigma_1'}\circ w_{\sigma_2'}\circ\cdots\circ w_{\sigma_n'}(x),$$

$$\Phi_2(\sigma'',n,y)=w'_{\sigma_1''}\circ w'_{\sigma_2''}\circ\cdots\circ w'_{\sigma_n''}(y),$$

则 $\forall(a,b)\in A\times B,\{\sigma\}=\Phi^{-1}(a,b)$ 是单点集当且仅当 $\{\sigma'\}=\Phi_1^{-1}(a)$ 和 $\{\sigma''\}=\Phi_2^{-1}(b)$ 也是单点集，因此结论(1)得证。

2) 由 **1)** 知

$\{X\times Y:w_i\times w_j',i=1,2,\cdots,N_1,j=1,2,\cdots,N_2\}$ 不是全不连通的当且仅当 $\{X:w_n,n=1,2,\cdots,N_1\}$ 或 $\{Y:w_n',n=1,2,\cdots,N_2\}$ 不是全不连通的。若 $\{X\times Y:w_i\times w_j',i=1,2,\cdots,N_1,j=1,2,\cdots,N_2\}$ 是刚触及的，则存在非空开集 $V\subset X\times Y$，使得：

① $w_{i_1}\times w'_{j_1}(V)\cap w_{i_2}\times w'_{j_2}(V)=\varnothing,i_1,i_2\in\{1,2,\cdots,N_1\},j_1,j_2\in\{1,2,\cdots,N_2\}$；

② $\bigcup\limits_{j=1}^{N_2}\bigcup\limits_{i=1}^{N_1}w_i\times w_j'(V)\subset V$；

由①有 $\left[w_{i_1}(p_1(V))\times w'_{j_1}(p_2(V))\right]\cap\left[w_{i_2}(p_1(V))\times w'_{j_2}(p_2(V))\right]=\varnothing$，所以 $w_{i_1}(p_1(V))\cap w_{i_2}(p_1(V))=\varnothing$ 或者 $w'_{j_1}(p_2(V))\cap w'_{j_2}(p_2(V))=\varnothing$，又 $(i_1,j_1)\neq(i_2,j_2)$，若 $j_1=j_2$，则 $\forall i_1,i_2\in\{1,2,\cdots,N_1\}$，有 $w_{i_1}(p_1(V))\cap w_{i_2}(p_1(V))=\varnothing$，而 $p_1(V)$ 是 X 中的非空开集，同理可证得 $w'_{j_1}(p_2(V))\cap w'_{j_2}(p_2(V))=\varnothing$，$\forall j_1,j_2\in\{1,2,\cdots,N_2\}$，$j_1\neq j_2$，且 $p_1(V)$ 为中的非空开集。

由②有 $\bigcup\limits_{j=1}^{N_2}\bigcup\limits_{i=1}^{N_1}\left[w_i(p_1(V))\times w_j'(p_2(V))\right]\subset V$，所以有 $\bigcup\limits_{i=1}^{N_1}w_i(p_1(V))\subset p_1(V)$，并且也有

$\bigcup_{j=1}^{N_2} w_j'\left(p_2\left(V\right)\right) \subset p_2\left(V\right)$，因此$\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$或$\{Y: w_n', n=1,2,\cdots,N_2\}$是刚触及的。

3) $\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$和$\{Y: w_n', n=1,2,\cdots,N_2\}$是刚触及的，由**1)**可知：

$\left\{X \times Y: w_i \times w_j', i=1,2,\cdots,N_1, j=1,2,\cdots,N_2\right\}$不是全不连通的，且存在一个非空开集$V_1 \subset X$，使得：

① $\forall i_1, i_2 \in \{1,2,\cdots,N_1\}$，$i_1 \neq i_2$，有$w_{i_1}\left(V_1\right) \cap w_{i_2}\left(V_1\right) = \varnothing$；

② $\bigcup_{i=1}^{N_1} w_i\left(V_1\right) \subset V_1$，从而

$w_{i_1} \times w_{j_1}'\left(V_1 \times V_2\right) \cap w_{i_2} \times w_{j_2}'\left(V_1 \times V_2\right) = \left[w_{i_1}\left(V_1\right) \cap w_{i_2}\left(V_1\right)\right] \times \left[w_{j_1}'\left(V_2\right) \cap w_{j_2}'\left(V_2\right)\right] = \varnothing$，$\left(i_1, j_1\right) \neq \left(i_2, j_2\right)$(因为也存在非空开集$V_2 \subset Y$，使得：③ $\forall j_1, j_2 \in \{1,2,\cdots,N_2\}$，$j_1 \neq j_2$，有$w_{j_1}'\left(V_2\right) \cap w_{j_2}'\left(V_2\right) = \varnothing$；④ $\bigcup_{j=1}^{N_2} w_j'\left(V_2\right) \subset V_2$)，显然$\bigcup_{j=1}^{N_2}\bigcup_{i=1}^{N_1} w_i \times w_j'\left(V_1 \times V_2\right) \subset V_1 \times V_2$且$V_1 \times V_2$是$X \times Y$中的非空开集，因此结论得证。

推论 3.1 设$\left(X, \rho_1\right), \left(Y, \rho_2\right)$是两个完备度量空间，$\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$与$\{Y: w_n', n=1,2,\cdots,N_2\}$是两个双曲迭代函数系，则有

1) 若$\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$与$\{Y: w_n', n=1,2,\cdots,N_2\}$是重叠的，则它们的乘积$\left\{X \times Y: w_i \times w_j', i=1,2,\cdots,N_1, j=1,2,\cdots,N_2\right\}$也是重叠的。

2) 若$\left\{X \times Y: w_i \times w_j', i=1,2,\cdots,N_1, j=1,2,\cdots,N_2\right\}$是重叠的，则$\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$是重叠的，或者$\{Y: w_n', n=1,2,\cdots,N_2\}$是重叠的。

证明： 1) 由定理 **3.3** 中的 **1)**可知

$\left\{X \times Y: w_i \times w_j', i=1,2,\cdots,N_1, j=1,2,\cdots,N_2\right\}$不是全不连通的，再由定理 **3.3** 中的 **2)**知$\left\{X \times Y: w_i \times w_j', i=1,2,\cdots,N_1, j=1,2,\cdots,N_2\right\}$不是刚触及的，因此结论得证。

2) 由定理 **3.3** 中的 **1)**可知，$\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N_1\}$与$\{Y: w_n', n=1,2,\cdots,N_2\}$都不是全不连通的，再由定理 **3.3** 中的 **3)**知结论成立。

参考文献

[1] 曾文曲, 王向阳, 孙炜, 刘丹, 王福龙. 分形理论与分形的计算机模拟(修订版) [M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2001.

[2] 熊金城. 点集拓扑讲义(第二版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.

[3] 谢和平, 薛绣谦. 分形应用中的数学基础与方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[4] 王兴元. 广义 M-J 集的分形机理[M]. 大连: 大连理工出版社, 2002.

[5] 严珍珍, 杨润生. 树上乘积自映射周期点集的局部度量稳定性[J]. 系统科学与数学, 2004, 24(1): 35-40.

[6] Barnsley, M.F. and Demko, S.G. (1985) Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals. *The Proceedings of the Royal Society*, **A399**, 243-275.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org