Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(5), 508-515
Published Online September 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.85068

Hans汉斯

Wave Equation: Quasi-Stability and Generalized Exponential Attractor

Na Fu*, **Linlin Liu**

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan
Email: *1510048466@qq.com

Received: Aug. 19th, 2018; accepted: Sep. 4th, 2018; published: Sep. 11th, 2018

Abstract

This paper studies the long-term dynamical behavior of the solution of the wave equation. By using the methods developed by Chueshov and Lasiecha, we get the quasi-stability property of the system and obtain the existence of a global attractor which has finite fractal dimension. Result on exponential attractors of the system is also proved.

Keywords

Wave Equation, Quasi-Stability, Global Attractor, Fractal Dimension, Exponential Attractor

波动方程：拟稳定性和广义指数吸引子

富　娜*，**刘琳琳**

西南交通大学数学学院，四川 成都
Email: *1510048466@qq.com

收稿日期：2018年8月19日；录用日期：2018年9月4日；发布日期：2018年9月11日

摘　要

本文研究波动方程解的长时间动力学行为，通过使用Chueshov和Lasiecha的方法，得到系统具有拟稳定的性质，从而得到全局吸引子是存在而且有限维的，并且得到广义指数吸引子也是存在的。

关键词

波动方程，拟稳定，全局吸引子，有限维，指数吸引子

*通讯作者。

文章引用: 富娜, 刘琳琳. 波动方程: 拟稳定性和广义指数吸引子[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 508-515.
DOI: 10.12677/pm.2018.85068

1. 引言

波动方程是数学物理中最具吸引力的研究领域之一。它始于简单的小提琴弦的模型，并发展成用于研究各种各样的现象，近年来对其研究日益加深，因此波动方程的数学模型越来越复杂，对其挑战性问题也越来越多。其中对于波动方程解的存在唯一性，长时间行为已有广泛的研究[1] [2] [3] [4] [5]，并得出了吸引子及其结构。但是 Chueshov 和 Lasiecha [6]给出了一种新的方法研究吸引子的存在性和几何结构，并且可以得到解关于时间的正则性和广义指数吸引子的存在性等更好的性质。基于[6]的思想方法，Feng [7]中考虑了 Timoshenko-Coleman-Gurtin 系统的拟稳定性和吸引子的存在性，基于[6] [7]，我们考虑下面的波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}+\alpha u_t-\Delta u+f(u)=q(x), & \text{in } \Omega, t>0, \\ u|_{\Gamma}=u_t|_{\Gamma}=0, & \text{on } \Omega, t>0, \\ u(0,x)=u_0(x)\in H_0^1(\Omega), \\ u_t(0,x)=u_1(x)\in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{1}$$

其中 α 是一个正常数，设 Ω 是 R^3 中具有光滑边界 Γ 的有界区域。

设(1)中的函数 $f:R\to R, F(s)=\int_0^{\infty} f(\eta)\mathrm{d}\eta$，且函数 f,F 满足下面的条件

$$\liminf_{|s|\to\infty}\frac{F(s)}{s^2}\geq 0, \tag{2}$$

并且存在 $c_1,c_2>0$，使得

$$\liminf_{|s|\to\infty}\frac{sf(s)-c_1F(s)}{s^2}\geq 0, \tag{3}$$

$$|f'(s)|\leq c_2\left(1+|s|^2\right), \tag{4}$$

不失一般性，假设 $q:R^3\to R, q\in L^2(\Omega)$。

方程(1)具有丰富的物理意义，如当 $f(s)=-\sin s$ 时，(1)为 Sine-Gordon 方程；当 $f(s)$ 为多项式时，(1)为量子力学中的非线性波动方程。

我们已经知道方程(1)的解决定了一个在空间 $H=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 上的半群，对于该半群的动态性状我们已经有在H上存在整体吸引子，但是对于解关于时间的正则性和广义指数吸引子的存在性仍然没有得到，本文的目的就在于此。

2. 半群

在这一部分，我们将证明方程(1)确定一个半群，为了证明方便，将空间 $L^2(\Omega)$ 中的内积和范数表示为

$$(u,v)_0=\int_\Omega uv\mathrm{d}x, \quad \|u\|_0^2=(u,u)_0,$$

将空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的内积和范数表示为

$$(u,v)_1=(u,v)_0+(\nabla u,\nabla v)_0\text{，}\quad \|u\|_1^2=(u,u)_1$$

引入内积空间 $H=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$，将空间 H 中的内积和范数表示为

$$(w,w')_H=(w_1,w_1')_1+(w_2,w_2')_0\text{，}\quad \|w\|_H^2=\|w_1\|_1^2+\|w_2\|_0^2\text{。}$$

对任意 $w=(w_1,w_2)$，$w'=(w_1',w_2')\in H$。

$$D(A)=\left\{u,-\Delta u\in L^2(\Omega),u|_\Gamma=u_t|_\Gamma=0\right\}\text{，}$$

A 的特征值为 $\{\lambda_i\}_{i\in N^+}$ 满足 $0\le\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_m\le\cdots$，且当 $m\to\infty$ 时 $\lambda_m\to\infty$。

为了证明解的存在性，我们设 $v=u_t$，则方程(1)可以改写为如下的一阶方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v,\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\alpha v-\Delta u+f(u)=q(x),\\ u|_\Gamma=v|_\Gamma=0,\\ u(0,x)=u_0(x)\in H_0^1(\Omega),\\ v(0,x)=u_1(x)\in L^2(\Omega),\end{cases}\tag{5}$$

设

$$W=\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\text{，}\quad L=\begin{bmatrix}-v\\ \alpha v-\Delta u\end{bmatrix}\text{，}\quad G(W)=\begin{bmatrix}0\\ q(x)-f(u)\end{bmatrix}\text{，}$$

则方程(5)可转化为如下形式

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+LW=G(W)\text{，}\quad W(0)=W_0\text{。}\tag{6}$$

文献[8]中的定理 2.1 证明算子 $-L$ 是 H 上的一个扇形算子，并且生成 H 上的一个强连续半群 e^{-Lt}，由条件(2)~(4)容易验证函数 $G(W):H\to H$ 关于 W 是局部 Lipschitz 连续的，因此我们有下面的结果。

定理 2.1： 若假设(2)-(4)成立，则对任意 $W_0\in H$，方程(6)都存在唯一的柔和解 $W\in C^0([0,\infty);H)$ 满足

$$W(t)=\mathrm{e}^{-Lt}W(0)+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-L(t-s)}G(W(s))\mathrm{d}s,t\ge0\text{，}$$

且对固定的 $t\ge0$ 有连续影射 $T(t)$，使得

$$T(t):W(0)=(u_0,u_1)^T\to W(t)=(u(t),u_t(t))^T\text{，}\quad H\to H.$$

证明： 因为 e^{-Lt} 是强连续半群，并且 $G(W):H\to H$ 关于 W 是局部 Lipschitz 连续的，解的局部存在唯一性容易得到，整体解的存在性由下面的引理 3.2 得到。由定理 2.1 可以知道 $T(t),t\ge0$ 是一个半群。

3. 吸收集

在这一部分，我们采用 Temam [1]中证明吸收集的存在性的方法证明系统吸收集的存在性。

设 $\varphi_1=u,\varphi_2=u_t+\varepsilon u$，其中 $\varepsilon=\dfrac{\alpha(\alpha^2-1)}{3(\alpha^2-1)+\sqrt{\alpha^4-1}}$，因此方程(1)可写作如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}+\varepsilon\varphi_1-\varphi_2=0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}-\varepsilon\varphi_2+\varepsilon^2\varphi_1+\alpha\left(\varphi_2-\varepsilon\varphi_1\right)-\Delta\varphi_1-f\left(\varphi_1\right)=q\left(x\right), \\ u\big|_{\Gamma}=v\big|_{\Gamma}=0, \\ u\left(0,x\right)=u_0\left(x\right)\in H_0^1\left(\Omega\right), \\ v\left(0,x\right)=u_1\left(x\right)\in L^2\left(\Omega\right), \end{cases} \tag{7}$$

设

$$\theta=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix},\quad L_\varepsilon\left(\theta\right)=\begin{bmatrix}\varepsilon\varphi_1-\varphi_2\\ -\varepsilon\varphi_2+\varepsilon^2\varphi_1+\alpha\left(\varphi_2-\varepsilon\varphi_1\right)-\Delta\varphi_1\end{bmatrix},\quad G\left(\theta\right)=\begin{bmatrix}0\\ q\left(x\right)-f\left(\varphi_1\right)\end{bmatrix},$$

则(7)等价于

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+L_\varepsilon\left(\theta\right)=G\left(\theta\right),\quad \theta\left(0\right)=\left(\varphi_1\left(0\right),\varphi_2\left(0\right)\right)^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

由方程(8)可知，其解可以定义一个连续的算子半群 $T_\varepsilon\left(t\right):\theta\left(0\right)\to\theta\left(t\right)$。

由于 $T\left(t\right)=R_{-\varepsilon}T_\varepsilon\left(t\right)R_\varepsilon$，其中 $R_\varepsilon:\left(u,v\right)^{\mathrm{T}}\mapsto\left(v+\varepsilon u\right)^{\mathrm{T}}$ 是 H 上的一个同构，于是我们将对 $T\left(t\right)$ 的研究转化到对系统(8)以及 $T_\varepsilon\left(t\right)$ 的研究上来。

下面介绍一个辅助引理，它是证明吸引子存在性的核心工具。

引理 3.1：对任意的 $\theta=\left(\varphi_1,\varphi_2\right)^{\mathrm{T}}=\left(u,u_t+\varepsilon u\right)^{\mathrm{T}}\in H$，有

$$\left(L_\varepsilon\left(\theta\right),\theta\right)_H\ge\frac{\varepsilon}{2}\left\|\theta\right\|_H^2+\frac{\alpha}{2}\left\|\varphi_2\right\|_0^2。$$

证明：在 H 中

$$\left(L_\varepsilon\left(\theta\right),\theta\right)_H=\left(\varepsilon\varphi_1-\varphi_2,\varphi_1\right)_1+\left(-\varepsilon\varphi_2+\varepsilon^2\varphi_1+\alpha\left(\varphi_2-\varepsilon\varphi_1\right)-\Delta\varphi_1,\varphi_2\right)_0,$$

由 Green 第二公式以及零边界条件可得

$$\begin{aligned}&\left(L_\varepsilon\left(\theta\right),\theta\right)_H-\frac{\varepsilon}{2}\left\|\theta\right\|_H^2-\frac{\alpha}{2}\left\|\varphi_2\right\|_0^2\\ &=\varepsilon\left\|\varphi_1\right\|_1^2-\left(\varphi_1,\varphi_2\right)_1+\left(\varepsilon^2-\alpha\varepsilon\right)\left(\varphi_1,\varphi_2\right)_0-\varepsilon\left\|\varphi_2\right\|_0^2+\alpha\left\|\varphi_2\right\|_0^2\\ &\quad-\left(\Delta\varphi_1,\varphi_2\right)_0-\frac{\varepsilon}{2}\left\|\varphi_1\right\|_1^2-\frac{\varepsilon}{2}\left\|\varphi_2\right\|_0^2-\frac{\alpha}{2}\left\|\varphi_2\right\|_0^2\\ &\ge\frac{\varepsilon}{2}\left\|\varphi_1\right\|_0^2-\left(1-\varepsilon^2+\alpha\varepsilon\right)\left\|\varphi_1\right\|_0\left\|\varphi_2\right\|_0+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\varepsilon}{2}\right)\left\|\varphi_2\right\|_0^2\end{aligned}。$$

由于

$$\alpha-3\varepsilon\ge0,\quad 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\alpha-3\varepsilon}{2}}\ge1-\varepsilon^2+\alpha\varepsilon,$$

因此引理成立。

引理 3.2：对 H 的任意有界集 B，存在一个常数 $C_1>0$ 和 $T\left(B\right)$，当 $t\ge T$ 时，对任意 $\varphi\left(0\right)\in B$，有

$$\left\|T_\varepsilon\left(t\right)\varphi\left(0\right)\right\|_H^2\le C_1。$$

证明：在 H 中，取 θ 与方程(8)两边在 H 中做内积，并结合引理 3.1 可得

DOI: 10.12677/pm.2018.85068

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta\|_H^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\theta\|_H^2+\frac{\alpha}{2}\|\varphi_2\|_0^2+\left(F(\varphi_1),1\right)_0+\left(f(\varphi_1),\varphi_1\right)_0\le\left(q(x),\varphi_2\right)_0。$$

由(2)和(3)，存在常数 $k>0$，使得

$$\left(\varphi_1,f(\varphi_1)\right)_0\ge c_1\left(F(\varphi_1),1\right)_0-\frac{1}{16}\|\varphi\|_1^2-k, \tag{9}$$

$$\left(F(\varphi_1),1\right)_0\ge-\frac{1}{16(1+c_1)}\|\varphi\|_1^2-k, \tag{10}$$

由(9)和(10)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\theta\|_H^2+2\left(F(\varphi_1),1\right)_0\right)+\frac{7\varepsilon}{16}\|\varphi_1\|_1^2+\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\|\varphi_2\|_0^2+c_1\varepsilon\left(F(\varphi_1),1\right)_0\le\left(q,\varphi_2\right)_0+\varepsilon k,$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\varphi\|_H^2+2\left(F(\varphi_1),1\right)_0\right)+\frac{7\varepsilon}{16}\|\varphi_1\|_1^2+\frac{7\varepsilon}{16}\|\varphi_2\|_0^2+c_1\varepsilon\left(F(\varphi_1),1\right)_0\le\frac{1}{2\alpha}\|q\|_0^2+\varepsilon k,$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\theta\|_H^2+2\left(F(\varphi_1),1\right)_0\right)+\frac{7\varepsilon}{8}\left(\|\theta\|_H^2+2c_1\left(F(\varphi_1),1\right)_0\right)\le\frac{1}{\alpha}\|q\|_0^2+2\varepsilon k。$$

由(10)可得

$$\|\theta\|_H^2+2\left(F(\varphi_1),1\right)_0\ge\frac{7}{8}\|\theta\|_H^2,$$

由 Gronwall’s 不等式可得

$$\|\theta\|_H^2+2\left(F(\varphi_1),1\right)_0\le\|\theta\|_H^2+2\left(F(\varphi_1),1\right)_0\mathrm{e}^{-\frac{7k_1\varepsilon}{8}t}+\left(\frac{8}{7\alpha k_1\varepsilon}\|q\|_0^2+\frac{16k}{7k_1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{7k_1\varepsilon}{8}t}\right),$$

其中

$$k_1=\min\{1,4c_1\}。$$

设 $\|\theta_0\|_H^2\le r$，由(4)和 Sobolev’s 嵌入定理，则存在 $K(r)>0$，使得

$$\|\theta\|_H^2+2\left(F(\varphi_1),1\right)_0\le K(r)。$$

因此

$$\|\theta_0\|_H^2\le\frac{8}{7}K(r)\mathrm{e}^{-\frac{k_1\varepsilon}{4}t}+\left(\frac{64}{49\alpha k_1\varepsilon}\|q\|_0^2+\frac{128k}{49k_1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k_1\varepsilon}{4}t}\right)。$$

设

$$C_1=\frac{64}{49\alpha k_1\varepsilon}\|q\|_0^2+\frac{128k}{49k_1},$$

故结论成立。

定理 3.3： 对半群 $T_\varepsilon(t)$ 存在 H 上的有界吸收集 B_0，使得

$$T_\varepsilon(t)B_0\subseteq B_0,$$

其中的 B_0 的半径为 r_0， $r_0^2 \ge C_1$。

4. 动力系统的拟稳定性和渐进光滑性

在这一部分，我们将会讨论动力系统 (H, T_ε) 是拟稳定的并且是渐近光滑的。

假设 4.1：设 X，Y 是两个自反的 Banach 空间，且 X 紧嵌入 Y，我们定义 $H = X \times Y$。考虑由发展算子

$$S(t)U_0 = (u, u_t), \quad U_0 = (u(0), u_t(0)) \in H, \tag{11}$$

给定的动力系统 $(H, S(t))$，其中函数 u 具有正则性

$$u \in C(R^+, X) \cap C^1(R^+, Y)。\tag{12}$$

定义 4.2：动力系统 $(H, S(t))$ 在集合 $B \subset H$ 上称为拟稳定的：如果在 X 上存在紧的半范数 n_X 和非负内积函数 $a(t)$， $b(t)$ 和 $c(t)$ 使得

(i) $a(t)$， $c(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上局部有界，

(ii) $b(t) \in L^1(R^+)$ 且 $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$，

(iii) 对任意的 $u^1, u^2 \in B$ 和 $t > 0$ 下面的关系成立：

$$\left\| S(t)U^1 - S(t)U^2 \right\|_H^2 \le a(t) \left\| U^1 - U^2 \right\|_H^2, \tag{13}$$

且

$$\left\| S(t)U^1 - S(t)U^2 \right\|_H^2 \le b(t) \left\| U^1 - U^2 \right\|_H^2 + c(t) \sup_{0<s<t} \left[n_X \left(u^1(s) - u^2(s) \right) \right]^2。\tag{14}$$

引理 4.3：假设 B 是空间 H 中的一个有界集，则存在常数 $r, b_0 > 0$ 和 $C_B > 0$ 使得

$$\left\| T_\varepsilon U^1 - T_\varepsilon U^2 \right\| \le b_0 \mathrm{e}^{-rt} \left\| U^1 - U^2 \right\|_H^2 + C_B \left(1 - \mathrm{e}^{-rt} \right) \left\| u^1 - u^2 \right\|_0^2, \tag{15}$$

其中 $T_\varepsilon(t)U^i = \left(u^i, u_t^i + \varepsilon u^i\right)$ 是方程(8)在 B 中关于初值条件 $U^i, i = 1,2$ 的解。

证明：对任意的 $\left(u_0^i, u_1^i\right) \in B, i = 1,2$，其中假设 B 是空间 H 中的有界集。设 $U^i(t) = \left(u^i, u_t^i + \varepsilon u^i\right), i = 1,2$，是关于初值条件 $\left(u_0^i, u_1^i\right)$ 的两个弱解。我们定义 $\Phi = \left(u^1 - u^2, u_t^1 + \varepsilon u^1 - u_t^2 - \varepsilon u^2\right) = \left(U^2 - U^1\right)$，且 $G(\Phi) = \left(0, f\left(u^1\right) - f\left(u^2\right)\right)^{\mathrm{T}}$，则满足

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + L_\varepsilon(\Phi) = G(\Phi)。\tag{16}$$

由 Dirichlet 边界条件和初值条件

$$U^1(0) - U^2(0) = (\Phi_0, \Phi_1)$$

并取 Φ 与方程(16)两边做内积结合引理 3.1，我们可以得到下面的不等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Phi\|_H^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\Phi\|_H^2 + \frac{\alpha}{2}\|\Phi\|_0^2 &\le -\left(f\left(u^1\right) - f\left(u^2\right), \Phi_2\right)_0 \\ &\le \left\| f\left(u^1\right) - f\left(u^2\right) \right\|_0 \|\Phi_2\|_0 \\ &\le \frac{1}{2\alpha}\left\| f\left(u^1\right) - f\left(u^2\right) \right\|_0^2 + \frac{\alpha}{2}\|\Phi_2\|_0^2 \end{aligned}。$$

由(4)、Holder 不等式、Young 不等式以及 Sobolev 嵌入定理可得

$$\begin{aligned}\left\|f\left(u^1\right)-f\left(u^2\right)\right\|_0^2&=\int_\Omega\left(f\left(u^1\right)-f\left(u^2\right)\right)^2\mathrm{d}x\le C_2\int_\Omega\left(\left|u^1\right|^3-\left|u^2\right|^3\right)^2\mathrm{d}x\\&\le\left(C_2\int_\Omega\left(\left|u^1\right|^2+u^1u^2+\left|u^2\right|^2\right)^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_\Omega\left(u^1-u^2\right)^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\\&\le C_2\left(\frac{1}{4k}\left\|\left|u^1\right|^2+u^1u^2+\left|u^2\right|^2\right\|_{L^3}^2+k\left\|u^1-u^2\right\|_{L^6}^2\right)\\&\le K\left\|u^1-u^2\right\|_{L^6}^2\le K\left\|u^1-u^2\right\|_{H_0^1}^2\end{aligned},$$

可得存在常数 $k>0$，使得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Phi\|_H^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\Phi\|_H^2\le K\left\|u^1-u^2\right\|_{H_0^1}^2,$$

结合 Gronwall’s 不等式

$$\|\Phi(t)\|_H^2\le\|\Phi(0)\|_H^2\mathrm{e}^{-\varepsilon t}+\frac{2k}{\varepsilon}\left\|u^1-u^2\right\|_{H_0^1}^2\left(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\right),$$

我们有

$$\left\|T_\varepsilon U^1-T_\varepsilon U^2\right\|_H^2\le\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\left\|U^1-U^2\right\|_H^2+\frac{2k}{\varepsilon}\left(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\right)\left\|u^1-u^2\right\|_{H_0^1}^2。$$

因此得到(16)。证毕。

定理 4.4： 动力系统 $\left(H,T_\varepsilon(t)\right)$ 在任意有界正向不变集 $B\subset H$ 上是拟稳定的。

证明： 因为动力系统 $\left(H,T_\varepsilon(t)\right)$ 是方程(8)的解半群确定的。因此当 $X=H_0^1,Y=L^2$ 时(11)~(12)成立。此外，由解的存在性我们容易得到条件(13)成立。

设 $B\subset H$ 关于 $T(t)$ 的有界正向不变集。设 $T(t)U^i=\left(u^i,u^i+\varepsilon u^i\right)$ 是方程(8)关于初值条件 $U^i,i=1,2$ 在 B 中的解，我们定义半范数

$$n_X(\Phi)=\|\Phi\|_{L^2}^2,$$

其中 $\Phi=U^1-U^2$。由紧嵌入定理 $H_0^1\subset L^2$，我们可知 $n_X(\cdot)$ 在 X 上是紧的。由引理 4.3 可以推断出

$$\left\|T_\varepsilon U^1-T_\varepsilon U^2\right\|_H^2\le b(t)\left\|U^1-U^2\right\|_H^2+c(t)\sup_{0<s<t}\left[n_X\left(u^1(s)-u^2(s)\right)\right]^2,$$

其中 $b(t)=b_0\mathrm{e}^{-rt}$，$c(t)=C_b\left(1-\mathrm{e}^{-rt}\right),t\ge0$。可以得到

$$b(t)\in L^1\left(R^+\right)\text{ 并且 }\lim_{t\to\infty}b(t)=0。$$

因为 $B\subset H$ 是有界的，我们可知 $c(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上是局部有界的。因此拟稳定不等式成立，即动力系统 $\left(H,S(t)\right)$ 在任意正向有界不变集 $B\subset H$ 上是拟稳定的。

定理 4.5: 假设动力系统 $\left(H,T_\varepsilon(t)\right)$ 在每个正向有界不变集 $B\subset H$ 是拟稳定的，则动力系统 $\left(H,T(t)\right)$ 是渐近光滑的。

证明： 定理的证明由 Chueshov 和 Lasiecka [6]中定理 7.9.4 给出。

5. 全局吸引子和广义指数吸引子

在这一部分中，我们将证明整体吸引子和广义指数吸引子的存在性。

定理 5.1： 假设(2)~(4)成立，则由方程(9)生成的动力系统 $\left(H,T_\varepsilon(t)\right)$ 具有一个紧的全局吸引子 A 并且

维数是有限的。

证明：由定理4.5，我们可得动力系统$\left(H,T_{\varepsilon}(t)\right)$是渐近光滑的，则由引理3.2和定理4.3，我们可以得到问题(8)具有紧的全局吸引子A，且A是有限维的。

定理5.2：假设(2)~(4)成立，则动力系统$\left(H,T_{\varepsilon}(t)\right)$具有一个广义指数吸引子$A_{\exp}\subset H$，并且在广义空间$\tilde{H}=L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\supset H$中是有限维的

证明：因为动力系统$\left(H,T_{\varepsilon}(t)\right)$在$B$上是拟稳定的，对具有初值条件$y=U(0)\in B$的解$U(t)$，我们可以由$B$的不变性知，存在$C_B>0$使得对任意$0\le t\le T$，

$$\left\|U_t(t)\right\|_{\tilde{H}}\le C_B,$$

因此，对任意的$0\le t_1\le t_2\le T$，

$$\left\|T_{\varepsilon}(t_1)U-T_{\varepsilon}(t_2)U\right\|_{\tilde{H}}\le\int_{t_1}^{t_2}\left\|U_t(\tau)\right\|_{\tilde{H}}\mathrm{d}\tau\le C_B\left|t_1-t_2\right|^{r},t_1,t_2\in[0,T],U\in B \tag{17}$$

由(18)式，对任意$U\in B$，映射$t\to T(t)y$在广义空间$\tilde{H}$是Holder连续的，则我们可得到存在指数吸引子并且在空间$\tilde{H}$中是有限维的。

基金项目

本研究得到国家自然科学基金(项目编号：71273214)的资助。

参考文献

[1] Temam, R. (1998) Infinite-Dimension Dynamical Systems in Mechanics and Physics. 2nd Edition, New York.

[2] Aviles, P. and Sandefur, J. (1985) Nonlinear Second Order Equations with Applications to Partial Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **58**, 404-427. https://doi.org/10.1016/0022-0396(85)90008-7

[3] Fitzgibbon, W.E. (1981) Strongly Damped Quasilinear Evolution Equations. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **79**, 536-550.

[4] Zelik (1991) Asymptotic Regularity of Solutions of Singularly Perturbed Damped Wave Equations with Supercritical Nonlinearities.

[5] Frigeri, S. (2010) Attractors for Semilinear Damped Wave Equations with an Acoustic Boundary Condition. *Journal of Evolution Equations*, **10**, 29-58. https://doi.org/10.1007/s00028-009-0039-1

[6] Chueshov, I. and Lasiecka, I. (2012) Von Karman Evolution Equation: Well-Posedness and Longtime Dynamics. Springer, New York.

[7] Feng, B. (2017) On a Semilinear Timoshenko-Colean-Gurtin System: Quasi-Stability and Attractors. *Discrete Continuous Dynamical Systems*, **3**, 4427-4451.

[8] Beale, J.T. (1967) Spectral Properties of an Acoustic Boundary Conditions. *Indiana University Mathematics Journal*, **25**, 895-917. https://doi.org/10.1512/iumj.1976.25.25071

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org