Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(6), 712-722
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.86096

The Hereditary Idempotent Radicals, Supplementing Radicals, Dual Radicals, Sub-Idempotent Radicals and Nil Radicals in Normal Classes of Complete Pointwise Algebra

Zongwen Yang, Qinghai He

Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: zwyang@ynu.edu.cn, heqh@ynu.edu.cn

Received: Nov. 6th, 2018; accepted: Nov. 23rd, 2018; published: Nov. 30th, 2018

Abstract

In this paper, we first study some constitutive properties of hereditary idempotent radicals, supplementing radicals, dual radicals, sub-idempotent radicals, and then study some constitutive properties of nil radicals, nilpotent radicals, local nilpotent radicals, countable local nilpotent radicals in normal classes of complete pointwise algebra.

Keywords

Normal Classes of Complete Pointwise Algebras, Hereditary Idempotent Radicals, Supplementing Radicals, Dual Radicals, Sub-Idempotent Radicals, Nil Radicals

点态化完备代数正规类中的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根及诣零根

杨宗文，何青海

云南大学数学系，云南 昆明
Email: zwyang@ynu.edu.cn, heqh@ynu.edu.cn

收稿日期：2018年11月6日；录用日期：2018年11月23日；发布日期：2018年11月30日

文章引用: 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根及诣零根[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 712-722. DOI: 10.12677/pm.2018.86096

摘　要

本文首先研究点态化完备代数正规类中的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根的的结构性质；然后研究了诣零根、幂零根、局部幂零根、可数局部幂零根的结构性质。

关键词

点态化完备代数正规类，遗传幂等根，补根，对偶根，子幂等根，诣零根

1. 引言

环及其它代数系统根理论的统一研究促使一般代数正规类根理论的建立[1]-[15]，但由于一般代数正规类缺乏理想乘积等概念，一般代数正规类根理论研究受到极大的限制。为了能在一般代数正规类中进行进一步的研究，文献[16] [17]引入了可积代数正规类、文献[18]-[23]引入了完备代数正规类，对特殊根等进行了研究，并对一类特殊的半环——大半环(可做单侧减法的半环)建立了相应的根理论；文献[24]对完备代数正规类进行了点态化，研究了点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类及其确定的上根——反单根的结构性质。

本文在文献[24]建立的点态化完备代数正规类概念基础上，研究点态化完备代数正规类中的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根及诣零根的结构性质。

2. 预备知识及基本引理

点态化完备代数正规类的相关概念及性质参见文献[24]。

引理 2.1 [15]：$\mathscr{A}$是一个完备代数正规类，则：

1) 如果$i, j \lhd a$，则$ij \leqslant i \wedge j$，特别$ii \leqslant i$；

2) 如果$i, j \lhd a$，则$ij \lhd a$；

3) n是正整数，如果$i_1, i_2, \cdots, i_n \lhd a$，则$i_1 i_2 \cdots i_n \lhd a$。

引理 2.2 [13] [14]：$\mathscr{A}$是一个完备代数正规类，R为$\mathscr{A}$中的一个根类，$a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$。如果$a/i \in \mathrm{PR}$，则$\mathrm{R}(a) \leqslant i$。

引理 2.3 [15]：$\mathscr{A}$是一个完备代数正规类，K为$\mathscr{A}$的一个子类，K中每个代数的理想都在K中(即K对理想封闭)。则$\mathrm{R} = \{a \in A \mid \forall i \lhd a, 0 \neq a/i \notin \mathrm{K}\}$是一个根类(称由K确定的上根，记为UK)，且$\mathrm{K} \subseteq \mathrm{PR}$。进一步有：如果$\mathrm{R}_1$是一个根类，且$\mathrm{K} \subseteq \mathrm{PR}_1$，则$\mathrm{R}_1 \subseteq \mathrm{R}$，记为根类$\mathrm{R}_1 \leqslant \mathrm{R}$。

引理 2.4 [15]：$\mathscr{A}$是一个完备代数正规类，$\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，$k \lhd i$，$\bar{k}$是$a$的包含$k$的最小理想。则$\bar{k} = k \vee ak \vee ka \vee aka$，且$\bar{k}^3 \leqslant k$。

引理 2.5 [24]：设$a \in \mathscr{A}$是一个非零代数，$\phi_a : L_a^s \to P(S_a)$如上定义。则$\forall i, j \in L_a^s$有：

$i \leqslant j$当且仅当$\phi_a(i) \subseteq \phi_a(j)$；

证明：此处只证明当$\phi_a(i) \subseteq \phi_a(j)$时有$i \leqslant j$。

当 $\phi_a(i) \subseteq \phi_a(j)$ 时有 $\phi_a(i \wedge j) = \phi_a(i) \cap \phi_a(j) = \phi_a(i)$，而 $\phi_a: L_a^s \to P(S_a)$ 是单射，故 $i \wedge j = i$，故 $i \leqslant j$。证毕。

引理 2.6 [24]：设 $a \in \mathscr{A}$ 是一个非零代数，$\phi_a: L_a^s \to P(S_a)$ 如上定义，$0 \neq t \in S_a$，$\varnothing \neq A \subseteq S_a$。则：

1) 存在 a 的一个最大的理想 i_t，使得 $t \notin \phi_a(i_t)$；

2) 分别存在 a 的一个最小的在 ϕ_a 下的像包含 t 的子代数 $\langle t\rangle$、右理想 $\langle t)$、左理想 $(t\rangle$、理想 (t)，且
$\langle t\rangle = \wedge\left\{b \in L_a^s \mid t \in \phi_a(b)\right\}$，$\langle t) = \wedge\left\{b \in L_a^r \mid t \in \phi_a(b)\right\}$，
$(t\rangle = \wedge\left\{b \in L_a^l \mid t \in \phi_a(b)\right\}$，$(t) = \wedge\left\{b \in L_a \mid t \in \phi_a(b)\right\}$，
分别称 t 生成的主子代数 $\langle t\rangle$、主右理想 $\langle t)$、主左理想 $(t\rangle$ 及主理想 (t)；

3) 分别存在 a 的一个最小的 ϕ_a 下的像包含 A 的子代数 $\langle A\rangle$、右理想 $\langle A)$、左理想 $(A\rangle$、理想 (A)，且
$\langle A\rangle = \wedge\left\{b \in L_a^s \mid A \in \phi_a(b)\right\}$，$\langle A) = \wedge\left\{b \in L_a^r \mid A \subseteq \phi_a(b)\right\}$，
$(A\rangle = \wedge\left\{b \in L_a^l \mid A \in \phi_a(b)\right\}$，$(t) = \wedge\left\{b \in L_a \mid A \in \phi_a(b)\right\}$，
分别称 A 生成的子代数 $\langle A\rangle$、右理想 $\langle A)$、左理想 $(A\rangle$ 及理想 (A)；

4) $\forall i \in L_a^s$，$i = \vee\left\{\langle t\rangle \mid t \in \phi_a(i)\right\}$；$\forall i \in L_a^r$，$i = \vee\left\{\langle t) \mid t \in \phi_a(i)\right\}$；$\forall i \in L_a^l$，$i = \vee\left\{(t\rangle \mid t \in \phi_a(i)\right\}$；$\forall i \in L_a$，$i = \vee\left\{(t) \mid t \in \phi_a(i)\right\}$；

5) $\forall i \in L_a, t \in S_a$，则 $i \vee \langle t\rangle = \langle t\rangle$ 当且仅当 $t \in \phi_a(i)$。

引理 2.7 [24]：a 是有幂等心 h 的亚直既约代数的亚直和，$0 \neq i \lhd a$，则 i 也是有幂等心 h 的亚直既约代数的亚直和。

3. 点态化完备代数正规类中的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根

$\mathscr{A}$是一个完备代数正规类。

定义 3.1：1) 设 R，S 为$\mathscr{A}$中的 2 个根类。如果 $\forall a \in \mathscr{A}$，满足下列条件：

i) $\mathrm{R}(a) \wedge \mathrm{S}(a) = 0$；

ii) 对任意$\mathscr{A}$中的根类 T，若 $\forall a \in \mathscr{A}$ 都有 $\mathrm{R}(a) \wedge \mathrm{T}(a) = 0$，则 $\mathrm{T} \leqslant \mathrm{S}$；

则称根 S 是 R 的补根，记为 $\mathrm{S} = \mathrm{R}'$。

2) 设 R，S 为$\mathscr{A}$中的 2 个根类。如果根 S 是 R 的补根，且根 R 也是 S 的补根，则称 R 与 S 互为双补根或互为对偶根。此时有 $\mathrm{S} = \mathrm{R}', \mathrm{R} = \mathrm{S}', \mathrm{S} = \mathrm{S}'', \mathrm{R} = \mathrm{R}''$。

定义 3.2：设 R 为$\mathscr{A}$中的一个根类。$\forall a \in \mathscr{A}$，如果 a 的商都是 R-半单代数，则称代数 a 为强 R-半单代数。

引理 3.3：设 R，S 为$\mathscr{A}$中的 2 个根类，S 是 R 的补根，即 $\mathrm{S} = \mathrm{R}'$。则：

1) 每个 R-半单代数的理想是 R-半单代数[14]；

2) 每个 S 根代数都是强 R-半单代数；每个 R 根代数都是强 S-半单代数。

证明：2) $\forall a \in \mathrm{R} \subseteq \mathscr{A}$，$i \lhd a$，由根的定义([24])及定义 3.1，$\mathrm{R}(a/i) = a/i$，且 $\mathrm{R}(a/i) \wedge \mathrm{S}(a/i) = \mathrm{S}(a/i) = 0$，即 a/i 是 R-半单代数。再由定义 3.2，a 是强 S-半单代数，即每个 R 根代数都是强 S-半单代数。

同理，每个 S 根代数都是强 R-半单代数。证毕。

引理 3.4：设 R 为$\mathscr{A}$中的一个根类，$a \in \mathscr{A}$，$\{a_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 是一个代数集，$\forall \alpha \in \Gamma$，$a_\alpha$ 是 R-半单代数，$a = \sum_s \{a_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$，则 a 是 R-半单代数。

证明：因为 $a = \sum_s \{a_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$，故存在 a 的一个理想集 $\{i_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 满足 $\wedge\{i_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\} = 0$，且 $\forall \alpha \in \Gamma, a_\alpha \sim a/i_\alpha$。因为 $\forall \alpha \in \Gamma$，$a_\alpha$ 是 R-半单代数，所以 $\mathrm{R}(a) \leqslant i_\alpha$，因此 $\mathrm{R}(a) \leqslant \wedge\{i_\alpha\} = 0$，即 a 是

R-半单代数。证毕。

设 R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类，所有 R 根心的亚直既约代数类确定的上根记为 S_R。

引理 3.5： 设 $a=\sum_s\{a/i_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$，$\{i_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 是 a 的满足 $\wedge\{i_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}=0$ 理想集，$\forall\alpha\in\Gamma$，a/i_α 是心为 h_α 的亚直既约代数，i 是 a 的理想。则 $i=\sum_s\{i/(i\wedge i_\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}$，其中 $i/(i\wedge i_\alpha)\neq 0$ 时是心为 $h'_\alpha\sim h_\alpha$ 的亚直既约代数。

证明： 因为 $a=\sum_s\{a/i_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$，$i$ 是 a 的理想，故对于 i 的理想集 $\{i\wedge i_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 有 $\wedge\{i\wedge i_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}=i\wedge(\wedge\{i_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\})=0$，所以 $i=\sum_s\{i/(i\wedge i_\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}$。又因为 $\forall\alpha\in\Gamma$，$i/(i\wedge i_\alpha)\sim(i\vee i_\alpha)/i_\alpha\lhd a/i_\alpha$，当 $(i\vee i_\alpha)/i_\alpha\neq 0$ 时，由引理 2.7 知 $(i\vee i_\alpha)/i_\alpha$ 是心为 h_α 的亚直既约代数，从而 $i/(i\wedge i_\alpha)\neq 0$ 是心为 $h'_\alpha\sim h_\alpha$ 的亚直既约代数。证毕。

定义 3.6： 1) $a\in\mathscr{A}$，如果 $\forall i\lhd a$，都有 $i^2=i$，则称代数 a 是遗传幂等的；

2) $a\in\mathscr{A}$，如果 $\forall t\in S_a$，都有 $t\in\phi_a((t)^2)$，则称代数 a 是 f-正则的。

定理 3.7： 设 S 是反单根，$a\in\mathscr{A}$，则以下 7 个条件等价。

1) a 是遗传幂等的；

2) a 是 f-正则的；

3) $\forall i,j\lhd a$，都有 $i\wedge j=ij$；

4) 不存在 a 的非 0 商 b 是有幂 0 心的亚直既约代数；

5) a 的非 0 商 b 都是有幂等心的亚直既约代数的亚直和；

6) a 是强 S-半单代数；

7) $\forall i\lhd a$，都有 $i=\wedge\{p\lhd a\mid i\le p$，$p$ 是素理想且 $i\le p$ 和 a/p 有极小理想$\}$。

证明： 1) $\Rightarrow$ 2)如果 a 是遗传幂等代数，则 $\forall i\lhd a$，$t\in\phi_a(i)$，有 $(t)^2=(t)$，故 $t\in\phi_a(t)=\phi_a((t)^2)$，从而 a 是 f-正则的；

2) $\Rightarrow$ 1)如果 a 是 f-正则的，$\forall i\lhd a$，$t\in\phi_a(i)$，则 $t\in\phi_a((t)^2)$ 及 $(t)\le(t)^2$，从而 $(t)=(t)^2$，$i=\vee\{(t)\mid t\in\phi_a(i)\}=\vee\{(t)^2\mid t\in\phi_a(i)\}=i^2$，所以 $i^2=i$，即 a 是遗传幂等的；

1) $\Rightarrow$ 3)如果 a 是遗传幂等代数，则 $\forall i,j\lhd a$，有 $i\wedge j=(i\wedge j)^2\le ij$；又因为 $ij\le i\wedge j$，故 $i\wedge j=ij$；

3) $\Rightarrow$ 1)如果 $\forall i,j\lhd a$，$i\wedge j=ij$，则 $i=i\wedge i=i^2$，即 a 是遗传幂等代数；

1) $\Rightarrow$ 4)如果 a 是遗传幂等代数，b 是 a 的非 0 商，如果 b 是有幂 0 心的亚直既约代数 $\{b_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 的亚直和，则每个项 $b_\alpha\sim a/i_\alpha$ 也有幂 0 心 $0\neq h_\alpha\sim h/i_\alpha(h\lhd b)$，因此 $0=h_\alpha^2=(h/i_\alpha)^2=(h^2\vee i_\alpha)/i_\alpha=(h\vee i_\alpha)/i_\alpha=h/i_\alpha\neq 0$，矛盾，故 4)成立；

4) $\Rightarrow$ 5)对 a 的非 0 商 b，则 b 是有心 $\{0\neq h_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 的亚直既约代数 $\{b_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 的亚直和，如果有 b_α 有幂 0 心 h_α，则 b_α 也是 a 的有幂 0 心 h_α 的非 0 商，矛盾，故 5)成立；

5) $\Rightarrow$ 6) $a\in\mathscr{A}$，$b=a/i$ 是 a 的非 0 商，则由 5)知 b 都是有幂等心 $\{h_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 的亚直既约代数 $\{b_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 的亚直和。因此 b_α 是 S-半单代数，从而 b 也是 S-半单代数，因此 a 是强 S-半单代数，即 6)成立；

6) $\Rightarrow$ 5)设 a 是强 S-半单代数，b 是 a 的非 0 商 $b=a/i$，则 b 也是 S-半单代数，从而 b 也是有幂等心 $\{h_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 的亚直既约代数 $\{b_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 的亚直和，即 5)成立；

5) $\Rightarrow$ 7) a 的非 0 商都是有幂等心的亚直既约代数的亚直和，$i\lhd a$，则 $b=a/i$ 是有幂等心 $\{h_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 的亚直既约代数 $\{b_\alpha=a/i_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 的亚直和，因此 $i=\wedge\{i_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$。因为 $\forall\alpha\in\Gamma$，$b_\alpha=b/i_\alpha$ 是有幂等心的亚直既约代数，所以 $b_\alpha=a/i_\alpha$ 是素代数，i_α 是 a 的素理想，且 h_α 是 a/i_α 的极小理想，即 7)成立；

7) $\Rightarrow$ 1) $\forall i\lhd a$，则 $i^2=\wedge\{p_\alpha\lhd a\mid i^2\le p_\alpha$，$p_\alpha$ 是素理想且 a/p_α 有极小理想$\}$。$\forall\alpha\in\Gamma$，$i^2\le p_\alpha$，p_α 是素理想，故 $i\le p_\alpha$，所以 $i\le\wedge\{p_\alpha\lhd a\mid\alpha\in\Gamma\}=i^2\le i$，即 $i^2=i$，即 a 是遗传幂等的。证毕。

定义 3.8： 设 R 为 $\mathscr{A}$ 中的根类。如果 1) R 是遗传根；2) R 根代数都是幂等的；则称 R 是一个子幂等根。

由具有定理 3.7 性质的代数类是根类，它的补根是反单根。

R 为 $\mathscr{A}$ 中的根类，设 S_R 是所有具有 R-根心的亚直既约代数类 K' 确定的上根 UK'。

定理 3.9： 设 R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个遗传根类，$a \in \mathscr{A}$，则以下 4 个条件等价。

1) a 是 S_R-根代数；

2) a 的非 0 商 b 都是有 R-半单心的亚直既约代数的亚直和；

3) a 是强 S-半单代数；

4) $\forall i \lhd a$，都有 $i = \wedge\{i_\alpha \lhd a \mid i \le i_\alpha$，$a/i_\alpha$ 是有 R-半单心的亚直既约代数的亚直和$\}$。

证明： 1) $\Rightarrow$ 2)如果 a 是 S_R-根代数，对 a 的非 0 商 b，则 b 是有心 $\{0 \ne h_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 的亚直既约代数 $\{b_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 的亚直和。$\forall \alpha \in \Gamma$，如果 h_α 不是 R-半单，则 h_α 是 R-根代数，从而 a 有非 0 商 b_α 是有 R-根心的亚直既约代数的亚直和，因此 a 不是 S_R-根代数，矛盾，故 2)成立；

2) $\Rightarrow$ 1)如果 a 不是 S_R-根代数，则存在 a 的非 0 商 b 是有 R-根心的亚直既约代数的亚直和，与 2)矛盾，故(1)成立；

2) $\Rightarrow$ 3) 对 a 的非 0 商 b，则 a 的非 0 商 b 是有心 $\{0 \ne h_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 的亚直既约代数 $\{b_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 的亚直和，所以 $\{b_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 都是 R-半单的，从而 b 是 R-半单的，即 3)成立；

3) $\Rightarrow$ 2)设 a 是强 S-半单代数，b 是 a 的非 0 商，则 b 是有心 $\{0 \ne h_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 的亚直既约代数 $\{b_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 的亚直和。$\forall \alpha \in \Gamma$，$b_\alpha$ 也是 a 的非 0 商，由条件 3)知 b_α 是 R-半单的，所以 h_α 是 R-半单的，即 2)成立；

2) $\Rightarrow$ 4) $\forall i \lhd a$，则 $i = \wedge\{i_\alpha \lhd a \mid i \le i_\alpha$，$a/i_\alpha$ 是有 R-半单心的亚直既约代数的亚直和$\}$，即 $\forall i \lhd a$，有 $b = a/i$ 是有 R-半单心的 $\{0 \ne h_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 亚直既约代数 $\{b_\alpha \sim a/i_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 的亚直和，且 $i = \wedge\{i_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$。所以 $\forall \alpha \in \Gamma$，则每个项 $b_\alpha \sim a/i_\alpha$ 也是有半单心的亚直既约代数的亚直和，故 4)成立；

4) $\Rightarrow$ 2)对 a 的非 0 商 b，则有 $i \lhd a$，$b \sim a/i$，由 4)知 $i = \wedge\{i_\alpha \lhd a \mid i \le i_\alpha$，$a/i_\alpha$ 是有 R-半单心的亚直既约代数的亚直和$\}$，从而 $b \sim a/i$ 是有 R-半单心的亚直既约代数 $\{b_\alpha \sim a/i_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 的亚直和，即 2)成立。证毕。

定理 3.10： 设 R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个遗传根类，则存在 R 的补根 $R' = S_R = \{a|a$ 是强 R-半单代数$\}$。

证明： 设 a 是 R'-根代数，$i \lhd a$，则 a 是 R-半单的，从而 i 也是 R-半单的，所以 i 是有 R-半单心的亚直既约代数的亚直和，即 i 也是 R'-根代数，故 R' 是遗传根；

$\forall a \in \mathscr{A}$，设 $d = R(a) \wedge R'(a)$，则 d 是 R-根代数也是 R-半单代数，所以 $d = 0$。

设 T 是一个根类，$\forall$T-根代数 a，$\forall i \lhd a$，有 $0 = R(a/i) \wedge T(a/i)$，则 $0 = R(a/i) \wedge T(a/i) = R(a/i) \wedge (a/i) = R(a/i)$，即 a 的非 0 商 a/i 是 R-半单代数，所以 a 是强 R-半单代数，因此 a 是 R'-根代数，即 $T \le R'$，R' 是 R 的补根。证毕。

引理 3.11： 设 S 为 $\mathscr{A}$ 中的一个超幂 0 根类，则：

1) 强 S-半单代数的理想是强 S-半单代数；

2) 强 S-半单代数是子幂等根代数。

证明： 设 S 为 $\mathscr{A}$ 中的一个遗传超幂 0 根类，$a \in \mathscr{A}$，$b \lhd a$，$c \lhd b$，$\bar{c}$ 是 c 在 a 中生成的理想，则 $\bar{c}^3 \le c \le \bar{c}$。

1) 因为 $\bar{c}/\bar{c}^3 \le a/\bar{c}^3$ 及 $a/\bar{c}^3$ 是 S-半单代数，所以 $\bar{c}^3 = \bar{c}$ 及 $c = \bar{c}$，从而 $c \lhd a$，b/c 是 a/c 的 S-半单理想，所以 b/c 也是 S-半单代数，从而 b 是强 S-半单代数。

2) 因为 b/b^2 是 S-半单代数，所以 $b^2 = b$。证毕。

引理 3.12： 设 S 为 $\mathscr{A}$ 中的超幂 0 根或者子幂等根，$a \in \mathscr{A}$，则 a 的 S-半单极小理想是强 S-半单代

DOI: 10.12677/pm.2018.86096

数。

证明： 设 S 为 $\mathscr{A}$ 中的超幂 0 根，$a \in \mathscr{A}$，m 是 a 的 S-半单极小理想，则 $m^2 = m$。设 $0 \neq i \lhd m$，$\bar{i}$ 是 i 在 a 中生成的理想，有 $\bar{i}^3 \leq i \leq \bar{i}$，从而 $\bar{i} \neq 0$ 及 $\bar{i}^3 \neq 0$，由 m 的极小性知 $i = \bar{i} = m$，因此 m 是单代数，故 m 是 S-半单代数，所以 m 是强 S-半单代数。

设 S 为 $\mathscr{A}$ 中的子幂等根，$a \in \mathscr{A}$，m 是 a 的 S-半单极小理想。如果 $m^2 = m$，与前面证明类似有 m 是单代数，由 m 的单性及 S-半单性即得 m 是强 S-半单代数。如果 $m^2 = 0$，则 m 的非 0 商都是 0，因此得 m 也是强 S-半单代数。证毕。

定理 3.13： 设 S 为 $\mathscr{A}$ 中的一个超幂 0 根类，则 S 的补根 S' 及 S' 的补根 S'' 都存在，且 S' 与 S'' 形成一对对偶根。$\mathrm{S}' = \mathrm{S}'''$，$\mathrm{S} \leq \mathrm{S}''$ 及 S' 都是子幂等根。更多地有，$\mathrm{S} = \mathrm{S}''$ 当且仅当 S 为是由全部有 S-半单心的亚直既约代数类确定的上根。从而当 $\mathrm{S} = \mathrm{S}''$ 时 S 是特殊根。

证明： 因为 S 是遗传根，由定理 3.10 及定理 3.9 有 S' 存在并 a 是 S' 根代数当且仅当 a 是强 S-半单代数。由定理 3.10，S' 是遗传根。因为 S 是超幂 0 根，从而 S' 是强 S-半单代数，进而 S' 是子幂等根。进一步有 S'' 存在并且 S'' 是由全部有 S'-根心的亚直既约代数类确定的上根，亦即由全部有 S-半单心的亚直既约代数类确定的上根。故有 $\mathrm{S} \leq \mathrm{S}''$，由于 S'' 是遗传根，故 S'' 也是超幂 0 根。设 T 是一个根类，如果 $\forall a \in \mathscr{A}$，有 $\mathrm{T}(a) \wedge \mathrm{S}''(a) = 0$，则 $\mathrm{T}(a) \wedge \mathrm{S}(a) = 0$。因为 $\mathrm{T} \leq \mathrm{S}'$，故 $\mathrm{S}''' \leq \mathrm{S}'$，因此 $\mathrm{S}''' = \mathrm{S}'$。类似可证 $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}$。由于 $\mathrm{S}'' = (\mathrm{S}')'$ 且 $\mathrm{S}' = (\mathrm{S}'')'$，因此 S' 与 S'' 是一对对偶根。因为 S 是超幂 0 根，S'' 是特殊根，超幂 0 根故亚直既约代数的 S-半单心是幂等的，因此当 $\mathrm{S} = \mathrm{S}''$ 时，S 是特殊根。证毕。

4. 点态化完备代数正规类中的诣零根

$\mathscr{A}$ 是一个点态化完备代数正规类。

定义 4.1： $\forall a \in \mathscr{A}$：

1) $x \in S_a$，如果有正整数 n，使得 $\langle x \rangle^n = 0$，则称 x 是幂零元；

2) 如果 $\forall x \in S_a$，x 都是幂零元，则称 a 是诣零代数；

3) $i \lhd a (i \leq a, i \lhd_r a, i \lhd_l a)$，如果 i 是诣零代数，则称 i 是 a 的一个诣零理想(诣零子代数、诣零右理想，诣零左理想)；

4) 如果对任意有限集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \subseteq S_a$ 生成的子代数 $\langle x_1, x_2, \cdots, x_k \rangle$ 是幂零的，则称 a 是局部幂零代数；

5) $i \lhd a (i \leq a, i \lhd_r a, i \lhd_l a)$，如果 i 是局部幂零代数，则称 i 是 a 的一个局部幂零理想(局部幂零子代数、局部幂零右理想，局部幂零左理想)；

6) 如果对任意可数集 $A = \{x_n \in S_a \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 生成的子代数 $\langle A \rangle$ 是幂零的，则称 a 是可数局部幂零代数；

7) $i \lhd a (i \leq a, i \lhd_r a, i \lhd_l a)$，如果 i 是可数局部幂零代数，则称 i 是 a 的一个可数局部幂零理想(可数局部幂零子代数、可数局部幂零右理想，可数局部幂零左理想)。

一个幂零代数是局部幂零代数、可数局部幂零代数，一个可数局部幂零代数是局部幂零代数，一个幂零代数、局部幂零代数、可数局部幂零代数都是诣零代数。

引理 4.2： $\forall a \in \mathscr{A}$，$0 \neq p \lhd a$。则：

1) p 是半素理想当且仅当 $\forall x \in S_a$，$\langle x \rangle a \langle x \rangle \leq p$ 可推出 $\langle x \rangle \leq p$；

2) p 是素理想当且仅当 $\forall x, y \in S_a$，$\langle x \rangle a \langle y \rangle \leq p$ 可推出 $\langle x \rangle \leq p$ 或 $\langle y \rangle \leq p$。

证明： 1) 设 p 是半素理想，$x \in S_a$，$\langle x \rangle a \langle x \rangle \leq p$，则 $(a\langle x \rangle a)^2 = (a\langle x \rangle a)(a\langle x \rangle a) \leq (a\langle x \rangle aa\langle x \rangle a) \leq (a\langle x \rangle a\langle x \rangle a) \leq apa \leq p$，据 p 是半素理想，故 $\langle x \rangle a \langle x \rangle \leq p$ 及

$\langle x\rangle^3 \le \langle x\rangle a\langle x\rangle \le p$，因此 $(x)^3 \le a(x)a = a(\langle x\rangle \vee a(x) \vee a(x) \vee a(x)a)a \le a\langle x\rangle a \le p$，据 p 是半素理想，因此 $\langle x\rangle \le (x) \le p$。

反之，如果 $\langle x\rangle a\langle x\rangle \le p$ 可推出 $\langle x\rangle \le p$，如果 $i \lhd a$，$i^2 \le p$，则 $\forall x \in \phi_a(i)$，有 $\langle x\rangle \le (x) \le i$，因此 $\langle x\rangle a\langle x\rangle \le (x)a(x) \le (x)a(x) \le (x)^2 \le i^2 \le p$，所以 $i = \vee\{\langle x\rangle \mid x \in \phi_a(i)\} \le p$，即 p 是半素理想。

2) 设 p 是素理想，$x, y \in S_a$，$\langle x\rangle a\langle y\rangle \le p$，则 $(a\langle x\rangle a)(a\langle y\rangle a) \le a(\langle x\rangle a\langle y\rangle)a \le apa \le p$，据 p 是素理想，故 $a\langle x\rangle a \le p$ 或 $a\langle y\rangle a \le p$。由于 p 是素理想从而是 p 是半素理想，故如果 $a\langle x\rangle a \le p$ 则 $\langle x\rangle \le p$，如果 $a\langle y\rangle a \le p$ 则 $\langle y\rangle \le p$。

反之，如果 $\langle x\rangle a\langle y\rangle \le p$ 可推出 $\langle x\rangle \le p$ 或 $\langle y\rangle \le p$。如果 $i, j \lhd a$，$ij \le p$，如果 $i \not\le p, j \not\le p$，则存在 $x, y \notin \phi_a(p)$ $x \in \phi_a(i)$，$y \in \phi_a(j)$，所以 $\langle x\rangle \not\le p$ 或 $\langle y\rangle \not\le p$，因此 $\langle x\rangle a\langle y\rangle \not\le p$。但是 $\langle x\rangle a\langle y\rangle \le (x)a(y) \le (x)(y) \le ij \le p$，矛盾，所以 $i \le p$ 或 $j \le p$，即 p 是素理想。证毕。

引理 4.3： $\forall a \in \mathscr{A}$，$0 \ne p \lhd a$。则：

1) 诣零代数 a (幂零代数、局部幂零代数、可数局部幂零代数)的商 $b = a/i$ 是诣零代数(幂零代数、局部幂零代数、可数局部幂零代数)；

2) $\forall i \lhd a$，如果 i 及 a/i 两者都是诣零代数(幂零代数、局部幂零代数、可数局部幂零代数)，则 a 是诣零代数(幂零代数、局部幂零代数、可数局部幂零代数)。

证明： 下面只证明诣零情形，其他类似。

1) 如果 a 是幂零代数，显然商 $b = a/i$ 是幂零代数。

如果 a 是诣零代数，$\forall y \in S_{a/i}$，存在 $x \in S_a$ 使得 $\varphi_i(x) = y$。因为 a 是诣零代数，所以存在 n 使得 $\langle x\rangle^n = 0$，因此 $\langle y\rangle = \langle \varphi_i(x)\rangle = (\langle x\rangle \vee i)/i$，故 $\langle y\rangle^n = ((\langle x\rangle \vee i)/i)^n = (\langle x\rangle^n \vee i)/i = 0$，即商 $b = a/i$ 是诣零代数。

如果 a 是可数局部幂零代数，$\forall B = \{y_n \in S_{a/i} \mid n = 1,2,3,\cdots\}$，存在 $A = \{x_n \in S_a \mid n = 1,2,3,\cdots\}$，使得 $\varphi_i(x_n) = y_n, n = 1,2,3,\cdots$。因为 a 是可数局部幂零代数，所以存在 m 使得 $A^m = 0$，因此 $B^m = \langle\{\varphi_i(x_n) \mid n = 1,2,3,\cdots\}\rangle^m = ((\langle A\rangle \vee i)/i)^m = (\langle A\rangle^m \vee i)/i = 0$，即商 $b = a/i$ 是可数局部幂零代数。

如果 a 是局部幂零代数，类似可证商 $b = a/i$ 是局部幂零代数。

2) 如果 i 及 a/i 都是幂零代数，显然 a 是幂零代数。

如果 i 及 a/i 都是诣零代数，$x \in S_a$，则存在正整数 n 使得 $\langle \varphi_i(x)\rangle^n = 0$，即 $((\langle x\rangle \vee i)/i)^n = (\langle x\rangle^n \vee i)/i = 0$，从而 $\langle x\rangle^n \le i$。因为存在 $z \in \langle x\rangle^n \le i$ 使得 $\langle x\rangle^{n+1} = \langle x\rangle\langle z\rangle = \langle z\rangle\langle x\rangle$，所以存在正整数 m 使得 $\langle z\rangle^m = 0$，所以 $\langle x\rangle^{m(n+1)} = (\langle x\rangle\langle z\rangle)^m = \langle x\rangle^m\langle z\rangle^m = 0$，即 a 是诣零代数。

如果 i 及 a/i 都是可数局部幂零代数，$A = \{x_n \in S_a \mid n = 1,2,3,\cdots\} \subseteq S_a$，则 $B = \varphi_i(a) = \{y_n = \varphi_i(x_n) \mid n = 1,2,3,\cdots\} \subseteq S_{a/i}$ 是可数集，则存在正整数 m 使得 $\langle B\rangle^m = \langle \varphi_i(A)\rangle^m = 0$，即 $\langle A\rangle^m \le i$，又存在 $A'_s \subseteq \langle A\rangle^m \le i$ 使得 $\langle A\rangle^{m+1} = \langle A\rangle\langle A'_s\rangle = \langle A'_s\rangle\langle A\rangle$，所以存在正整数 n 使得 $\langle A'_s\rangle^n = 0$，所以 $\langle A\rangle^{n(m+1)} = \langle A'_s\rangle^n\langle A\rangle^n = 0$，即 a 是可数局部幂零代数。

如果 i 及 a/i 是局部幂零代数，类似可证 a 是局部幂零代数。证毕。

引理 4.4： $\forall a \in \mathscr{A}$，$i_1, i_2 \lhd a$，$i_1, i_2$ 诣零理想(幂零理想、局部幂零理想、可数局部幂零理想)，则 $i_1 \vee i_2$ 也是诣零理想(幂零理想、局部幂零理想、可数局部幂零理想)。

证明： 因为 i_1 是诣零理想，因此 $(i_1 \vee i_2)/i_1 \sim i_1/(i_1 \wedge i_2)$ 是诣零理想诣零理想(幂零理想、局部幂零理想、可数局部幂零理想)，又 i_1 是诣零理想诣零理想(幂零理想、局部幂零理想、可数局部幂零理想)，所以由引理 4.3 有 $i_1 \vee i_2$ 是诣零理想(幂零理想、局部幂零理想、可数局部幂零理想)。证毕。

引理 4.5： $\forall a \in \mathscr{A}$，则：

1) $U(a) = \vee\{i \mid i$ 是诣零理想$\}$，则 $U(a)$ 是诣零理想；

2) $L(a) = \vee\{i \mid i$ 是局部幂零理想$\}$，则 $L(a)$ 是局部幂零理想；

3) $L_C(a)=\vee\{i\mid i$ 是可数局部幂零理想$\}$，则 $L_C(a)$ 是局部幂零理想；

4) $N(a)=\vee\{i\mid i$ 是幂零理想$\}$，则 $N(a)$ 是诣零理想，且 $N(a)$ 包含 a 的所有幂零右理想及所有幂零左理想。

证明： 1) 设 $x\in S_{U(a)}$，则存在正整数 k 及 a 的诣零理想是 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，使得 $x\in\phi_a(i_1\vee i_2\vee\cdots\vee i_k)$。因为由引理 4.4 有 $i_1\vee i_2\vee\cdots\vee i_k$ 是 a 的诣零理想，所以存在正整数 n，使得 $\langle x\rangle^n=0$，因此 $U(a)$ 是 a 的诣零理想；

2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_l\in S_{L(a)}$，则存在正整数 k 及 a 的诣零理想是 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，使得 $x_1,x_2,\cdots,x_l\in\phi_a(i_1\vee i_2\vee\cdots\vee i_k)$。因为由引理 4.4 有 $i_1\vee i_2\vee\cdots\vee i_k$ 是 a 的局部幂零理想，所以存在正整数 n，使得 $\langle x_1,x_2,\cdots,x_l\rangle^n=0$，所以 $L(a)$ 是 a 的局部幂零理想；

3) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_l\in S_{L_C(a)}$，则存在正整数 k 及 a 的可数局部幂零理想是 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，使得 $x_1,x_2,\cdots,x_l\in\phi_a(i_1\vee i_2\vee\cdots\vee i_k)$。因为由引理 4.4 有 $i_1\vee i_2\vee\cdots\vee i_k$ 是 a 的局部幂零理想，所以存在正整数 n，使得 $\langle x_1,x_2,\cdots,x_l\rangle^n=0$，所以 $L_C(a)$ 是局部幂零理想；

4) $N(a)=\vee\{i\mid i$ 是幂零理想$\}$，设 $x\in S_{N(a)}$，则由幂零理想是诣零理想及 1)的证明知存在正整数 n，使得 $\langle x\rangle^n=0$，故 $N(a)$ 是诣零理想。对 a 的每个幂零右理想 i，且 $i^k=0$，则 $\overline{i}=i\vee ai\lhd a$，因为 $\overline{i}^k=(i\vee ai)^k\le i^k\vee ai^k=0$ 是 a 的幂零理想，因此 $i\le\overline{i}\le N(a)$，从而 $N(a)$ 包含 a 的所有幂零右理想。同理有 $N(a)$ 包含 a 的所有幂零左理想。证毕。

注 1： 通常 $N(a)$ 不是幂零理想，$L_C(a)$ 不是可数局部幂零理想。

$\forall a\in\mathscr{A}$：

$\mathrm{K}(a)=\vee\{i\mid i$ 是诣零理想$\}$，$\mathrm{L}_C(a)=\vee\{i\mid i$ 是局部幂零理想$\}$。

对每个序数 α，理想 $N(\alpha)$ 定义为：

1) $N(0)=0$；

假设 $\forall\alpha<\beta$，$N(\alpha)$ 已经定义，则：

2) 如果 $\beta=\alpha+1$，则 $N(\beta)/N(\alpha)=\vee\{i\mid i$ 是 $a/N(\alpha)$ 的幂零理想$\}$；

3) 如果 β 是极限序数，$N(\beta)=\vee\{N(\alpha)\mid\alpha<\beta\}$。

因为 S_a 是一个集合，故 $\forall a\in\mathscr{A}$，存在一个序数 γ 使得 $N(\gamma)=N(\gamma+1)$，则理想 $N(\gamma)$ 记为 $\mathrm{N}(a)$。

类似对每个序数 α，理想 $L_C(\alpha)$ 定义为：

1) $L_C(0)=0$；

假设 $\forall\alpha<\beta$，$L_C(\alpha)$ 已经定义，则：

2) 如果 $\beta=\alpha+1$，则 $L_C(\beta)/L_C(\alpha)=\vee\{i\mid i$ 是 $a/L_C(\alpha)$ 的幂零理想$\}$；

3) 如果 β 是极限序数，$L_C(\beta)=\vee\{L_C(\alpha)\mid\alpha<\beta\}$。

因为 S_a 是一个集合，故 $\forall a\in\mathscr{A}$，存在一个序数 γ 使得 $L_C(\gamma)=L_C(\gamma+1)$，则理想 $L_C(\gamma)$ 记为 $\mathrm{L}_C(a)$。

设 $\mathscr{A}$是一个点态化完备代数正规类，$\mathrm{N},\mathrm{L},\mathrm{K}$ 及 L_C 是 $\mathscr{A}$的 4 个子类：

1) $\mathrm{N}=\{a\in\mathscr{A}\mid\mathrm{N}(a)=a\}$；

2) $\mathrm{L}=\{a\in\mathscr{A}\mid\mathrm{L}(a)=a\}$；

3) $\mathrm{K}=\{a\in\mathscr{A}\mid\mathrm{K}(a)=a\}$；

4) $\mathrm{L}_C=\{a\in\mathscr{A}\mid\mathrm{L}_C(a)=a(a)=a\}$。则：

定理 4.6： $\forall a\in\mathscr{A}$：

1) 存在 $\mathrm{N}(a)\lhd a$，且 $\mathrm{N}(a/\mathrm{N}(a))=0$；

2) 存在 $\mathrm{L}(a)\lhd a$，且 $\mathrm{L}(a/\mathrm{L}(a))=0$；

3) 存在 $\mathrm{K}(a)\lhd a$，且 $\mathrm{K}(a/\mathrm{K}(a))=0$；

4) 存在 $\mathrm{L}_C(a) \lhd a$，且 $\mathrm{L}_C(a/\mathrm{L}_C(a)) = 0$。

因此，$\mathrm{N},\mathrm{L},\mathrm{K}$ 及 L_C 都是根类，且 $\mathrm{N} \le \mathrm{L}_C \le \mathrm{L} < \mathrm{K}$。

证明：首先存在 a 的理想 $\mathrm{N}(a)$，$\mathrm{L}(a)$，$\mathrm{K}(a)$，及 $\mathrm{L}_C(a)$。

1) 因为 $\mathrm{N}(a) = N(\gamma) = N(\gamma+1)$。如果 $\mathrm{N}(a/\mathrm{N}(a)) \ne 0$，则 $\mathrm{N}(a/\mathrm{N}(a)) = k/\mathrm{N}(a)$ 且 $k \lhd a$，$\mathrm{N}(a) \le k$，$\mathrm{N}(a) \ne k$，从而 $N(\gamma+1) = k$，矛盾。所以 $\mathrm{N}(a/\mathrm{N}(a)) = 0$；

2) 如果 $\mathrm{L}(a/\mathrm{L}(a)) \ne 0$，则 $\mathrm{L}(a/\mathrm{L}(a)) = k/\mathrm{L}(a)$ 且 $k \lhd a$，$\mathrm{L}(a) \le k$，$\mathrm{L}(a) \ne k$，则由于 $k/\mathrm{L}(a)$，$\mathrm{L}(a)$ 都是局部幂零的，从而 k 局部幂零，与 $\mathrm{L}(a) \ne k$ 矛盾。所以 $\mathrm{L}(a/\mathrm{L}(a)) = 0$；

3) 与 2)类似可证；

4) 与 1)类似可证。证毕。

定义 4.7：根类 $\mathrm{N},\mathrm{L},\mathrm{K}$ 及 L_C 分别称 Bear 根、Levitzki 根、Koethe 根和可数 Levitzki 根。

注 2：根类 N 即是 Bear 根 B [16]。

定义 4.8：$\forall a \in \mathscr{A}$。

1) $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 是 S_a 中的序列，如果存在是 S_a 中的序列 $y_0,y_1,y_2,\cdots$，使得 $x_{k+1} \in \phi_a(\langle x_k\rangle\langle y_k\rangle\langle x_k\rangle)$ 且 $\langle x_{k+1}\rangle \le \langle x_k\rangle\langle y_k\rangle\langle x_k\rangle$（$k = 0,1,2,\cdots$），则称 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 为一个 m-序列；

2) $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 为一个 m-序列，如果存在一个 k，使得 $\langle x_k\rangle = 0$，则称 m-序列 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 消失；

3) $x \in S_a$，如果所有以 x 开始的 m-序列都消失，则称 x 是强幂 0 元；

4) $M \subseteq S_a$，如果 $\forall x,y \in M$，都存在 $z \in M$，使得 $\langle x\rangle\langle z\rangle\langle y\rangle \subseteq M$，则称 M 是一个 m-系统。

引理 4.9：$\forall a \in \mathscr{A}$，$d,e \lhd a$，$x_0,x_1,x_2,\cdots$ 为一个 m-序列。如果 $x_i \in \phi_a(d)$，$x_j \in \phi_a(e)$，则存在 $x_k \in \phi_a(de)$ 且 $\langle x_k\rangle \le de$（$i,j,k$ 是整数)。

证明：

$$\begin{aligned}\langle x_k\rangle &\le \langle x_j\rangle\langle y_j\rangle\langle x_j\rangle \le \langle x_{j-1}\rangle\langle y_{j-1}\rangle\langle x_{j-1}\rangle\langle y_j\rangle\langle x_j\rangle \\ &\le \langle x_i\rangle\langle y_i\rangle\langle x_i\rangle\cdots\langle y_{j-1}\rangle\langle x_{j-1}\rangle\langle y_j\rangle\langle x_j\rangle \\ &\le \langle x_i\rangle a\langle x_j\rangle \le \langle x_i\rangle\langle x_j\rangle \le de\end{aligned}$$

。证毕。

引理 4.10：$\forall a \in \mathscr{A}$，$b \lhd a$，$a/b$ 不含非幂 0 理想，$c \lhd a$，$b \le c$，$b \ne c$，a/b 不含非 0 理想。则存在 a 的素理想 p，使得 $b \le p$ 各 $c \not\le p$。

证明：因为 $b \le c$，$b \ne c$，因此 $\phi_a(c) \not\subseteq \phi_a(b)$。选取 $x_0 \in \phi_a(c)$ 使得 $x_0 \notin \phi_a(b)$，则由 a/b 不含非幂零理想，对 $\forall k$ 有 $(x_0)^k \not\le b$。因为 $(x_0)^3 \le a\langle x_0\rangle a$，故 $\forall k$ 有 $(a\langle x_0\rangle a)^k \not\le b$，所以 $\langle x_0\rangle a\langle x_0\rangle \not\le b$，因此存在 $y_0 \in S_a$ 使得存在 $x_1 \in \phi_a(\langle x_0\rangle\langle y_0\rangle\langle x_0\rangle)$ 且 $x_1 \notin \phi_a(b)$ 及 $x_1 \in \phi_a(\langle x_0\rangle\langle y_0\rangle\langle x_0\rangle) \subseteq \phi_a(\langle x_0\rangle a\langle x_0\rangle) \subseteq \phi_a(cac) \subseteq \phi_a(c)$。用 x_1 代替 x_0 重复以上过程可得 $x_2 \in \phi_a(\langle x_1\rangle\langle y_1\rangle\langle x_1\rangle)$ 且 $x_2 \notin \phi_a(b)$ 及 $x_2 \in \phi_a(c)$，进而可得 $\phi_a(c)$ 在 m-序列 $\mathrm{X} = \{x_0,x_1,x_2,\cdots\}$ 且 $\forall k$，$x_k \notin \phi_a(b)$。由 Zorn 引理存在满足条件 $b \le p$，$\mathrm{X} \subseteq \phi_a(c)$ 及 $\mathrm{X} \cap \phi_a(p) = \varnothing$ 的极大理想 p，下面仅证明 p 是 a 的素理想。设 $d,e \lhd a$，$d \not\le p$，$e \not\le p$，则 $\phi_a(d \vee p) \cap \mathrm{X}$，$\phi_a(e \vee p) \cap \mathrm{X}$ 都非空，所以存在 $x_i \in \phi_a(d \vee p)$，$x_j \in \phi_a(e \vee p)$，进而由引理 4.9 存在正整数 n，使得 $\langle x_n\rangle \le (d \vee p)(e \vee p) = de \vee p$，故 $de \vee p \not\le p$，所以 p 是 a 的素理想。证毕。

定理 4.11：$\forall a \in \mathscr{A}$，B 是 Bear 根，则有：

1) $\mathrm{B}(a) = \wedge\{p \lhd a \mid p$ 是素理想$\}$[16]；

2) $\mathrm{B}(a) = \vee\{\langle x\rangle \mid x \in S_a$，每个以 x 开始的 m-序列都消失$\} = \vee\{\langle x\rangle \mid x \in S_a$，$x$ 是强幂 0 元$\}$；

3) $\mathrm{B}(a) = \vee\{\langle x\rangle \mid x \in S_a$，每个含 x 的 m-序列都包含 0$\}$。

证明：2)与 3)等价，下面只证 2)。

设 $x \in S_a$，$x \notin \phi_a(\mathrm{B}(a))$，则 $\forall k$，有 $(x)^k \not\le \mathrm{B}(a)$。因为 $(x)^3 \le a(x)a$，因此 $\forall k$，$(a(x)a)^k \not\le \mathrm{B}(a)$，因此 $(a(x)a)^3 \not\le \mathrm{B}(a)$，从而 $a(x)a \not\le \mathrm{B}(a)$。从而存在 $x_1,y_1 \in S_a$ 满足 $\langle x_1\rangle\langle y_1\rangle\langle x_1\rangle \not\le \mathrm{B}(a)$，故存在 $x_2 \in \phi_a(\langle x_1\rangle\langle y_1\rangle\langle x_1\rangle)$ 满足，$\langle x_2\rangle \not\le \mathrm{B}(a)$，即 $x_2 \notin \phi_a(\mathrm{B}(a))$。类似，可得 $x_i,y_i \in S_a$，$x_i \in \phi_a(\langle x_{i-1}\rangle\langle y_{i-1}\rangle\langle x_{i-1}\rangle)$

且 $x_i \notin \phi_a(\mathrm{B}(a))$，即 $x = x_0, x_1, x_2, \cdots$ 为一个不消失的 m-序列。

设 $x \in S_a$，$x \in \phi_a(\mathrm{B}(a))$，$x_1, x_2, x_3, \cdots$ 为一个 m-序列，则 $\forall i$，$x_i \in \phi_a(\mathrm{B}(a))$。设 α_i 是使得 $x_i \in \mathrm{N}(\alpha_i)$ 的一个极小序数，则 α_i 不是极限序数。设 α_k 是所有 α_i 的极小序数。如果 $\alpha_k \neq 0$ 则 $\alpha_k = \beta + 1$，从而对某个指数 2^k 有 $(x_k)^{2^k} \not\leq \mathrm{N}(\beta)$。因为 $\langle x_{k+1} \rangle \leq \langle x_k \rangle \langle y_k \rangle \langle x_k \rangle \leq \langle x_k \rangle^2$ 及 $\langle x_{k+2} \rangle \leq \langle x_{k+1} \rangle \langle y_{k+1} \rangle \langle x_{k+1} \rangle \leq \langle x_k \rangle^4$，因此有 $\langle x_{k+l} \rangle \leq \langle x_k \rangle^{2k} \leq \mathrm{N}(\beta)$。这与 α_k 的极小性矛盾，所以 $\alpha_k = 0$，所以 $\langle x_k \rangle = 0$。

综上，$\mathrm{B}(a) = \vee\{\langle x \rangle \mid x \in S_a$，每个以 x 开始的 m-序列都消失$\}$。证毕。

5. 小结

本文在点态化的完备代数正规类中，进一步研究根的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根、诣零代数、幂零代数、局部幂零代数、可数局部幂零代数的结构性质。

基金项目

国家自然科学基金(11261067)。

参考文献

[1] Száse, F.A. (1981) Radicals of Rings. John Wiley & Sons, New York.

[2] Ferrero, M. and Wisbauer, R. (2003) Unitary Stonglyprimerings and Related Radicals. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **181**, 209-226. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(02)00311-0

[3] Beidar, K.I., Fong, Y. and Ke, W.-F. (1998) On Complemented Radicals. *Journal of Algebra*, **201**, 328-356. https://doi.org/10.1006/jabr.1997.7254

[4] Tumurbat, S. and Zand, H. (2001) Hereditariness, Strongness and Relationship between Brown-McCoy and Behrens Radicals. *Contributions to Algebra and Geometry*, **42**, 275-280.

[5] Krause, H. (1998) On the Nilpotecy of the Jacobson Radical for Noetherian Rings. *Archiv der Mathematik*, **70**, 430-437. https://doi.org/10.1007/s000130050216

[6] Singh, S. (1997) Artinian Right Serial Rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **125**, 2239-2240. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-97-03820-3

[7] Smith, P.F. (2004) Radical Submodules and Uniform Dimension of Modules. *Turkish Journal of Mathematics*, **28**, 255-270.

[8] Gűngűroggļu, G. (2000) Strongly Prime Ideals in CS-Rings. *Turkish Journal of Mathematics*, **24**, 233-238.

[9] Kelarev, A.V. and Okniński, J. (1996) The Jacobson Radical of Graded PI-Rings and Related Classes of Rings. *Journal of Algebra*, **186**, 818-830. https://doi.org/10.1006/jabr.1996.0397

[10] 蔡传仁. 对偶根和 F A SZASZ 的问题 21[J]. 数学学报: 中文版, 1989, 32(3): 394-400.

[11] 蔡传仁. 半遗传根的一个特征性质[J]. 数学研究与评论, 1991, 11(1): 9-12.

[12] Puczylowski, E.R. (1993) On General Theory of Radicals. *Algebra Universalis*, **39**, 53-60. https://doi.org/10.1007/BF01196549

[13] Wang, Y. and Zhang, A.H. (2002) Radicals and Semisimple Classes of the Class of Algebras. *Journal of Anshan Normal University*, **4**, 5-10.

[14] 任艳丽, 王尧. 代数正规类中的遗传根与强半单根[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(4): 597-602.

[15] Yang, Z.W. (2006) The Upper Radical Classes of the Class of Algebras. *Journal of Yunnan University* (*Natural Sciences Edition*), **28**, 8-11.

[16] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2008) The Supernilpotent Radical, Special Radical and Bear Radical in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **32**, 181-192.

[17] Yang, Z.W. and Yang, Z.Y. (2011) The Semihereditary and Semisupernilpotent Radicals in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **35**, 891-902.

[18] 杨宗文, 杨柱元. 完备代数正规类的根与右理想[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2006, 31(3): 112-116, 120.

[19] 杨宗文, 杨柱元. 子环的和与积[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2007, 29(4): 335-338.

[20] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 大半环子半环的和与积[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2007, 32(6): 113-118.

[21] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 可积代数正规类中半素代数类及半素一致代数类确定的上根[J]. 数学理论与应用,2008, 28(4): 71-75.

[22] Yang, Z.W., Yang, Z.Y. and Li, Y.B. (2010) The General Radicals Theory of the Big Semirings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 1149-1167.

[23] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2010) The Radicals and Likemodules in Normal Classes of Complete Alagebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 377-386.

[24] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类 [J]. 理论数学, 2018, 8(5): 546-554.