Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(6), 676-680
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.86091

Hans汉斯

Uniformly Fuzzy Posets and Its Applications

Hui Li, Lu Chen

School of Mathematical Sciences, Huaibei Normal University, Huaibei Anhui
Email: 1270229940@qq.com

Received: Oct. 25th, 2018; accepted: Nov. 6th, 2018; published: Nov. 16th, 2018

Abstract

In this paper, the concept of uniform fuzzy posets is introduced on the fuzzy directed posets, and the basic properties of the uniformly fuzzy posets are discussed. Secondly, the uniformly fuzzy complete posets are introduced on the basis of uniformly fuzzy posets. Finally, by introducing a new fuzzy way-below relation, the concept of uniformly fuzzy continuous posets is introduced and some properties are given.

Keywords

Uniformly Fuzzy Posets, Uniformly Fuzzy Complete Posets, Uniformly Fuzzy Continuous Posets

一致模糊偏序集及其应用

李　辉，陈　璐

淮北师范大学数学科学学院，安徽 淮北
Email: 1270229940@qq.com

收稿日期：2018年10月25日；录用日期：2018年11月6日；发布日期：2018年11月16日

摘　要

本文在模糊定向集上引入一致模糊集的概念，讨论一致模糊集的基本性质。其次在一致模糊集的基础上引入一致模糊完备集，最后通过给出一种新的模糊way-below关系引入一致模糊连续集的概念，给出其若干性质。

关键词

一致模糊集，一致模糊完备集，一致模糊连续集

文章引用: 李辉, 陈璐. 一致模糊偏序集及其应用[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 676-680.
DOI: 10.12677/pm.2018.86091

1. 引言

1965 年 Zadeh, L.A.提出模糊集[1]的概念，它的提出标志着模糊数学的诞生。模糊数学是传统数学的一个推广。文献[2]讨论了模糊偏序集上的若干性质，得到了若干好的等价刻画。文献[3]提出模糊 DCPO 的概念，给出了若干好的性质，然后在模糊 DCPO 的基础上引入模糊 Domain 的概念，进而得到了模糊 Domain 上的若干重要结果。文献[4]给出了模糊半连续格的概念，并讨论了其上的一些范畴性质。文献[5]在模糊 Dcpo 的基础上讨论了模糊 Domain 上的 Ω 范畴性质。文献[6]引入完备模糊格的概念，给出模糊完备格上若干好的性质。本文在以上文献基础上引入一致模糊集和一致模糊完备集的概念，讨论其上的若干性质。其次在一致模糊完备的基础上利用新的模糊 way-below 关系给出一致模糊 Domain 的概念，探讨其若干性质。一致模糊集是模糊定向集的一个推广。

2. 预备

本节给出本文所需的基本概念和符号。

定义 2.1 [2]：设 X 是非空偏序集，$e: X\times X\to L$ 为映射，称 e 是 X 上的一个模糊偏序关系，若 e 满足：

i) 自反性：$\forall x\in X$，$e(x,x)=1$；

ii) 传递性：$\forall x,y,z\in X$，$e(x,y)\wedge e(y,z)\le e(x,z)$；

iii) 反对称性：$\forall x,y\in X$，$e(x,y)=e(y,x)=1\Rightarrow x=y$；

称偶对 (X,e) 为模糊偏序集，简称模糊集。

例 2.1 [2]：设 X 为非空集合，定义 $sub_X: L^X\times L^X\to L$ 为 $\forall A,B\in L^X$，

$$sub_X(A,B)=\bigwedge_{x\in X} A(x)\to B(x)$$

定义 1.2 [3]：设 (X,e) 是模糊偏序集，$x_0\in X$，$A\in L^X$，如果：

1) $\forall x\in X$，$A(x)\le e(x,x_0)$；(相应的，$\forall x\in X$，$A(x)\le e(x_0,x)$)

2) $\forall y\in X$，$\bigwedge_{x\in X}\left(A(x)\to e(x,y)\right)\le e(x_0,y)$

(相应的，$\forall y\in X$，$\bigwedge_{x\in X}\left(A(x)\to e(y,x)\right)\le e(y,x_0)$)，则称 x_0 为 A 的上确界(相应的，下确界)，记作 $x_0=\coprod A$ (相应的，$x_0=\prod A$)。

定义 2.3 [3]：设 (X,e) 是模糊偏序集，$A\in L^X$，若 $\forall x,y\in X$，$e(x,y)\wedge_L A(x)\le A(y)$ ($e(x,y)\wedge_L A(y)\le A(x)$)，则称 A 为模糊上集(模糊下集)。

定义 2.4 [3]：设 (X,e) 是模糊偏序集，$\forall A\in L^X$，定义 $\downarrow A\in L^X$ 为：

$$\forall y\in X,\ \downarrow A(x)=\bigvee_{y\in X} A(y)\wedge e(x,y)\ \ \left(\uparrow A(x)=\bigvee_{y\in X} A(y)\wedge e(y,x)\right).$$

对于 $A\subseteq X$，$\chi_A\in L^X$ (称为 A 的特征函数)定义为 $\chi_A(x)=1$，若 $x\in A$；否则为 0.0，1 分别为 L 的最小元和最大元。

定义 2.5 [3]：设 (X,e) 是模糊偏序集，$\forall D\in L^X$，如果 D 满足：

1) $\bigvee_{x\in X} D(x)=1$；2) $\forall x,y\in X$，$D(x)\wedge D(y)\le\bigvee_{z\in X} D(z)\wedge e(x,z)\wedge e(y,z)$，

则称 D 为模糊定向集。如果模糊定向集 $D \in L^X$ 还是一个下集，则称 D 为模糊理想。(X,e) 上的全体模糊定向子集记为 $D(X)$。

定义 2.6 [3]：设 (X,e) 是模糊偏序集，如果 $\forall A \in D(X)$，$\coprod A$ 存在，则称 (X,e) 是模糊 Dcpo。

定义 2.7 [7]：设 (X,e_X)、(X,e_Y) 是模糊偏序集，$f: X \to Y, g: Y \to X$ 是两个保模糊序的映射。如果 $\forall x \in X, y \in Y, e_Y(f(x),y) = e_X(x,g(y))$，则称 (f,g) 为 X 和 Y 之间的一个模糊 Galois 伴随。f 称为 g 的左伴随，g 称为 f 的右伴随。

3. 主要结果

在本节中引入一致模糊偏序集和一致模糊连续偏序集的概念。

定义 3.1：设 (X,e) 为模糊偏序集，$A \in L^X$ 为模糊子集，若 $\forall D \subseteq A$，$\forall x, y \in X$ 满足：

1) $\bigvee_{x \in X} A(x) = 1$；

2) $D(x) \wedge D(y) \le \bigvee_{z \in X} A(z) \wedge e(x,z) \wedge e(y,z)$。

则称 A 为一致模糊偏序集。(X,e) 上的一致模糊偏序集的全体记为 $UF(X)$，若 A 还是一个模糊下集，则称 A 为一致模糊理想，全体一致模糊理想记为 $UFI(X)$。

注 3.1：在定义 2.1 中若令 $D = A$，则此时 A 为模糊定向集。即模糊定向集为一致模糊集。

定义 3.2：设 (X,e) 为模糊偏序集，若 $\forall A \in UF(X)$，$\coprod A$ 存在，则称 (X,e) 为一致模糊完备偏序集。记为 UFCPO。

注 3.2：设 (X,e) 是 UFCPO，$A \in UF(X)$，$D \subseteq A$ 为模糊子集，则 $\coprod D \le \coprod A$，等号成立当且仅当 $D = A$。

定义 3.3：设 (X,e) 为 UFCPO，定义其上的一致模糊 way-below 关系为，$\forall x, y \in X$，

$$\Downarrow_{UF} x(y) = \bigwedge_{I \in UFI(X)} \left(e(x, \coprod I) \to I(y)\right).$$

称 $\Downarrow_{UF}: X \times X \to L$ 为 (X,e) 上的一致模糊 way-below 关系，且 $\Downarrow_{UF} x(y) = \Downarrow_{UF}(y,x)$。如果 $\forall x \in X$，$\Downarrow_{UF} x \in UF(X)$ 且 $x = \Downarrow_{UF} \coprod x$，则称 (X,e) 为一致模糊连续偏序集或一致模糊 Domain。

定理 3.1：设 (X,e) 为 UFCPO，$\forall x \in X, A \in UF(X)$，若 $x = \coprod A$，则 $\Downarrow_{UF} x \le \downarrow A$。

证明：设 (X,e) 为 UFCPO，故 $\forall A \in UF(X)$，$\coprod A$ 存在，且 $\downarrow A$ 为一致模糊理想，故 $x = \coprod A = \coprod \downarrow A$。因此 $\forall y \in X$，有

$$\Downarrow_{UF} x(y) \le e(x, \coprod A) \to \downarrow A(y) = 1 \to \downarrow A(y) = \downarrow A(y).$$

命题 3.1：设 (X,e) 为 UFCPO，$\forall x, y \in X$，$\forall I \in UFI(X)$，则以下条件成立：

1) $\bigwedge_{y \in X} e(x,y) \le I(x)$；

2) $\bigwedge_{z \in X} e(x,y) \le \Downarrow_{UF} y(x)$；

3) $\Downarrow_{UF} x \le \downarrow x$；

4) 对任意的 $u, v \in X, e(u,x) \wedge \Downarrow_{UF} y(x) \wedge e(y,v) \le \Downarrow_{UF} v(u)$。

证明：

1) $\bigwedge_{y \in X} e(x,y) = \left(\bigwedge_{y \in X} e(x,y)\right) \wedge \left(\bigvee_{z \in X} I(z)\right) = \bigvee_{z \in X} \left(\bigwedge_{y \in X} e(x,y) \wedge I(z)\right) \le \bigvee_{z \in X} \left(e(x,z) \wedge I(z)\right) \le I(x)$。

2) $\Downarrow_{UF} y(x) = \bigwedge_{I \in UFI(X)} e(y, \coprod I) \to I(x) \ge \bigwedge_{I \in UFI(X)} I(x) \ge \bigwedge_{z \in X} e(x,z)$。

3) $\Downarrow_{UF} x(y) \le e(x, \coprod \downarrow x) \to \downarrow x(y) = e(x,x) \to e(y,x) = e(y,x) = \downarrow x(y)$。

4) $$\begin{aligned} e(v,\coprod I) \wedge e(u,x) \wedge e(y,u) \wedge \left(e(y,\coprod I) \to I(x)\right) &\le e(y,\coprod I) \wedge \left(e(y,\coprod I) \to I(x)\right) \wedge e(u,x) \\ &\le e(u,x) \wedge I(x) \le I(u) \end{aligned}$$ 。

且 $e(u,x)\wedge e(y,u)\wedge(e(y,\coprod I)\to I(x))\le e(v,\coprod I)\to I(u)$。

进而

$$\begin{aligned}&e(u,x)\wedge \Downarrow_{UF} y(x)\wedge e(y,v)\\&=e(u,x)\wedge e(y,u)\wedge\left(\bigwedge_{I\in UFI(X)} e(y,\coprod I)\to I(x)\right)\\&\le\bigwedge_{I\in UFI(X)} e(u,x)\wedge e(y,u)\wedge(e(y,\coprod I)\to I(x))\\&\le\bigwedge_{I\in UFI(X)} e(v,\coprod I)\to I(u)=\Downarrow_{UF} v(u)\end{aligned}$$

。

定理 3.2： 设 (X,e) 为一致模糊 Domain，则 $\forall x,y\in X$，$\Downarrow_{UF} y(x)=\bigvee_{z\in X}\Downarrow_{UF} z(x)\wedge\Downarrow_{UF} y(z)$。

证明： 由命题 3.1 可知 $\bigvee_{z\in X}\Downarrow_{UF} z(x)\wedge\Downarrow_{UF} y(z)\le\Downarrow_{UF} y(x)$。下证

$$\Downarrow_{UF} y(x)\le\bigvee_{z\in X}\Downarrow_{UF} z(x)\wedge\Downarrow_{UF} y(z).$$

$\forall a\in X$，令 $A(a)=\bigvee_{z\in X}\Downarrow_{UF} z(x)\wedge\Downarrow_{UF} y(z)$。故只需证 $\Downarrow_{UF} y(a)\le A(x)$。

首先证 A 是一致模糊理想。

1)
$$\begin{aligned}\bigvee_{a\in X}A(a)&=\bigvee_{a\in X}\bigvee_{z\in X}\Downarrow_{UF} z(a)\wedge\Downarrow_{UF} y(z)=\bigvee_{z\in X}\bigvee_{a\in X}\Downarrow_{UF} z(a)\wedge\Downarrow_{UF} y(z)\\&=\bigvee_{z\in X}\left(\Downarrow_{UF} y(z)\wedge\left(\bigvee_{a\in X}\Downarrow_{UF} z(a)\right)\right)=\bigvee_{z\in X}\Downarrow_{UF} y(z)=1\end{aligned}$$

2) $\forall a,b\in X$，

$$A(a)\wedge e(b,a)=\bigvee_{z\in X}\Downarrow_{UF} z(a)\wedge\Downarrow_{UF} y(z)\wedge e(b,a)\le\bigvee_{z\in X}\Downarrow_{UF} z(b)\wedge\Downarrow_{UF} y(z)=A(b).$$

因此 A 是模糊下集。

3) $\forall a,b\in X$，$\forall D\subseteq A$，由命题 3.1 (4)，

$$\begin{aligned}&D(a)\wedge D(b)\\&=\bigvee_{a_1,b_1\in X}\Downarrow_{UF} a_1(a)\wedge\Downarrow_{UF} b_1(b)\wedge\Downarrow_{UF} y(a_1)\wedge\Downarrow_{UF} y(b_1)\\&\le\bigvee_{a_1,b_1\in X}\bigvee_{c\in X}\Downarrow_{UF} a_1(a)\wedge\Downarrow_{UF} b_1(b)\wedge\Downarrow_{UF} y(c)\wedge e(a,c)\wedge e(b,c)\\&=\bigvee_{a_1,b_1\in X}\bigvee_{c\in X}(\Downarrow_{UF} a_1(a)\wedge e(a,c))\wedge(\Downarrow_{UF} b_1(b)\wedge e(b,c))\wedge\Downarrow_{UF} y(c)\\&\le\bigvee_{a_1,b_1\in X}\bigvee_{c\in X}\Downarrow_{UF} c(a)\wedge\Downarrow_{UF} c(b)\wedge\Downarrow_{UF} y(c)\\&=\bigvee_{c\in X}\Downarrow_{UF} c(a)\wedge\Downarrow_{UF} c(b)\wedge\Downarrow_{UF} y(c)\\&\le\bigvee_{c\in X}\bigvee_{d\in X}\Downarrow_{UF} c(d)\wedge e(a,d)\wedge e(b,d)\wedge\Downarrow_{UF} y(c)\\&=\bigvee_{d\in X}\left(e(a,d)\wedge e(b,d)\wedge\left(\bigvee_{c\in X}\Downarrow_{UF} c(d)\wedge\Downarrow_{UF} y(c)\right)\right)\\&=\bigvee_{d\in X}e(a,d)\wedge e(b,d)\wedge A(d)\end{aligned}$$

其次，$y=\coprod A$。事实上，$\forall a\in X$，

$$\begin{aligned}\bigwedge_{z\in X}A(z)\to e(z,a)&=\bigwedge_{z\in X}\bigwedge_{a_1\in X}(\Downarrow_{UF} a_1(z)\wedge\Downarrow_{UF} y(a_1)\to e(z,a))\\&=\bigwedge_{a_1\in X}\left(\Downarrow_{UF} y(a_1)\to\bigwedge_{z\in X}(\Downarrow_{UF} a_1(z)\to e(z,a))\right)\\&=\bigwedge_{a_1\in X}\Downarrow_{UF} y(a_1)\to e(\coprod\Downarrow_{UF} a_1,a)\\&=\bigwedge_{a_1\in X}\Downarrow_{UF} y(a_1)\to e(a_1,a)=e(y,a)\end{aligned}$$

.

最后，$\Downarrow_{UF} y(x)=\bigwedge_{I\in UFI(X)} e(y,\coprod I)\to I(x)\le e(y,\coprod A)\to A(x)=1\to A(x)=A(x)$。

定理 3.3： (X,e) 是一致模糊 Domain 当且仅当 $(\Downarrow_{UF},\coprod)$ 是 (X,e) 和 $(UFI(X),subX)$ 之间的一个模糊 Galois 伴随。

证明：

1) 必要性。$\forall x,y\in X$，

$$\begin{aligned} sub(\Downarrow_{UF} x,\Downarrow_{UF} y)&=\bigwedge_{z\in X}\left(\bigwedge_{I\in UFI(X)} e(x,\coprod I)\to I(z)\right)\to\left(\bigwedge_{J\in UFI(X)} e(y,\coprod J)\to J(z)\right)\\ &\ge\bigwedge_{z\in X}\left(\bigwedge_{J\in UFI(X)} e(y,\coprod I)\to J(z)\right)\to\left(e(y,\coprod J)\to J(z)\right)\\ &\ge\bigwedge_{J\in UFI(X)} e(y,\coprod J)\to e(x,\coprod J)\ge e(x,y)\end{aligned}.$$

则 $\Downarrow_{UF}$ 是保模糊序的。$\forall I,J\in UFI(X)$，

$e(\coprod I,\coprod J)=\bigwedge_{x\in X} I(x)\to e(x,\coprod J)\ge\bigwedge_{x\in X} I(x)\to J(x)=sub_X(I,J)$，故 $\coprod$ 也是保模糊序的。

$$\forall x\in X,I\in UFI(X),$$

$$sub_X(\Downarrow_{UF} x,I)=\bigwedge_{y\in X}\Downarrow_{UF} x(y)\to I(y)\ge\bigwedge_{y\in I}\left(e(x,\coprod I)\to I(y)\right)\to I(y)\ge e(x,\coprod I).$$

并且，$e(x,\coprod I)=\bigwedge_{y\in X}\Downarrow_{UF} x(y)\to e(y,\coprod I)\ge\bigwedge_{y\in X}\Downarrow_{UF} x(y)\to I(y)=sub_X(\Downarrow_{UF} x,I)$。

因此，$(\Downarrow_{UF},\coprod)$ 是 (X,e) 和 $(UFI(X),subX)$ 之间的一个模糊 Galois 伴随。

2) 充分性。因 $(\Downarrow_{UF},\coprod)$ 是 (X,e) 和 $(UFI(X),sub_X)$ 之间的一个模糊 Galois 伴随，故 $\forall x\in X$，$\Downarrow_{UF} x\in UFI(X)$ 且 $e(x,\coprod\Downarrow_{UF} x)=1$，进而 $x\le\coprod\Downarrow_{UF} x\le\coprod\downarrow x=x$，故 $x=\coprod\Downarrow_{UF} x$。所以 (X,e) 是一致模糊 Domain。

参考文献

[1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] 张奇业. L-Fuzzy Domain 理论[D]: [博士学位论文]. 北京: 首都师范大学, 2002.

[3] Yao, W. and Shi, F.G. (2010) Quantitative Domain via Fuzzy Sets: Part I: Continuity of Fuzzy Directed Complete Posets. *Fuzzy Sets and Systems*, **161**, 973-987. https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.06.018

[4] 韩艳伟. 模糊半连续格及其范畴性质[D]: [硕士学位论文]. 西安: 陕西师范大学, 2011.

[5] Lai, H. and Zhang, D. (2007) Complete and Directed Complete Ω-Categories. *Theoretical Computer Science*, **388**, 1-25. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2007.09.012

[6] Lai, H.L. (2005) Complete Fuzzy Lattice. Foundations of Fuzzy Set Theory, Beijing, IFSA: 246-251.

[7] Yao, W. and Lu, L.X. (2009) Fuzzy Galois Connections on Fuzzy Posets. *Mathematical Logic Quarterly*, **55**, 84-91. https://doi.org/10.1002/malq.200710079

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org